<36611087270013

<36611087270013

Bayer. Staatsbibliothek

<36611087270013

<36611087270013

Bayer. Staatsbibliothek

8.18.55.

Inst. Gr. Vet. 101. - p. 540.

Euklids

Elemente,

funfzehn Bücher,

aus dem Griechischen übersetzt

von

Johann Friedrich Lorenz.

Halle, 1781.

Im Verlag der Buchhandlung des Waysenhauses.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.
Bayerische Staatsbibliothek München

Einleitung.

Euklides, von dessen Vaterlande und übrigen Lebensumständen wir wenig oder nichts wissen, eröfnete zu Alexandrien, unter der Regierung des Königes Ptolemäus Soter, 300 Jahre vor der gemeinen Zeitrechnung, eine Schule der Mathematik, in welcher fast alle grosse Mathematiker des Alterthumes gezogen worden sind. Von seinen Schriften sind die **Elemente** allein ganz unverstümmelt auf die Nachwelt gekommen; gerade dasjenige Werk, welches seinem Verfasser die Unsterblichkeit erwerben muste, und welches von den größten Geistern alter und neuer Zeiten als ein unverbesserliches Meisterstück erkannt und bewundert ward. Sie enthalten die **ersten Lehren der gesammten Mathematik** in einer

solchen Vollkommenheit der Deutlichkeit und Verbindung, daß seit ihrer Erscheinung, das ist, seit 2000 Jahren, in Rücksicht auf Methode und System, nichts Vollkommneres geliefert worden ist. Das Studium des Euklides wird nicht nur von Männern empfohlen, welche selbst die grössesten und ausgebreitetesten Kenntnisse in der Mathematik besitzen; sondern auch in den Schulen der Philosophen wird, so oft von Methode die Rede ist, der Name desjenigen genannt, welcher ihre Vorschriften von der besten Lehrart alle beobachtet und ausgeübt hat, oder vielmehr, aus dessen Mustern diese Vorschriften alle hergenommen sind. Daß ein mathematisches Lehrbuch, welches nur diejenigen Kenntnisse umfasset, die man im Zeitalter Alexanders des Grossen hatte, die aber nachmals, und besonders in den beyden neuesten Jahrhunderten zum Erstaunen vermehrt und erweitert worden sind, auch jetzt, da wir uns der vortreflichsten Lehrbücher einer weit ausgebreitetern Mathematik rühmen können, immer noch seinen Werth behält, und von Kennern immer noch geschätzt und gelesen wird: dies ist wohl unstreitig ein Umstand, der für dasselbe ein sehr günstiges Vorurtheil erwecken, und manchen begierig machen muß, ein Buch von so seltner Art näher kennen zu lernen. Auch findet jeder Freund und Liebhaber der Mathematik darinnen Vieles, was ihm in seiner Wissenschaft besondre Dienste leistet; und überhaupt jeder denkende Kopf schöpfet daraus Nahrung für den Geist, und lernet besser, als aus allen Anweisungen zur Methode, dasjenige kennen, was mit Recht Methode genannt zu werden verdient. In allen Büchern der Elemente zeigt sich der Geist und Scharfsinn des Euklides, in keinem derselben aber mehr, als in dem zehnten; welches Buch dem, was wir irgend

Scharf=

Einleitung.

Scharfsinniges in der neuern Mathematik haben, wo nicht völlig gleichkommt, doch gewiß nicht gar weit nachstehen möchte. Schon bey seinen Lebzeiten, da seine Anfangsgründe freylich das erste vollständige Lehrbuch der Mathematik waren, verursachten sie so vieles Aufsehen, daß selbst Ptolemäus dadurch begierig gemacht ward, dem Namen eines grossen Kriegers und mächtigen Königes auch den Ruhm eines Mathematikers beyzufügen, und noch in seinem Alter ein Schüler des Euklides zu werden. Nur schien es ihm, als ob der Gang des Gelehrten kein Gang für den König sey; allein er erhielt auf diese Aeusserung zur Antwort: **daß die Mathematik keinen absonderlichen Zugang für gekrönte Häupter habe.** So sehr war Euklides überzeugt, daß, so wie es für Jedermann nur Eine Wahrheit und nur Eine Tugend giebt, auch nur Eine Methode vorhanden sey, Wissenschaften zu lehren und zu lernen. Vielleicht wär es für die Ehre und die Ausbreitung der Gelehrsamkeit zu wünschen, daß man zu allen Zeiten so gedacht hätte, und nie auf den Einfall gerathen wäre zu versuchen, ob man nicht etwas Bequemeres für Herren und Damen ausfindig machen könne. Wem es ein Ernst ist, seinen Verstand recht zu bilden — und niemand anders solte sich dem Heiligthum der Wissenschaften nahen — dem müßte ungemein viel daran liegen, die Begriffe und Sätze, die er ein für allemal ganz durchschauen muß, von denen er in der Folge so häufigen Gebrauch und Anwendung zu machen hat, die den Grund abgeben auf den das ganze Gebäude seiner weitern Kenntnisse sich stützet, so zu lernen, wie sie gelernt werden müssen; und ihn wird es um so weniger verdriessen, alle Anstrengung des Verstandes dabey anzuwenden, je mehr diese Anstrengung selbst

zur Bildung seines Geistes beyträgt, und demselben die zu allen weitern Progressen so nöthige und unentbehrliche Kraft und Richtung giebt. Auch scheinen dieses alle Mathematiker des Alterthums, welche nach dem Euklides gelebt, erkannt zu haben; indem sie der Bahn, die Er ihnen vorgezeichnet hatte, schlechterdings folgten, und bey ihren weitern Untersuchungen das, was Er vorgetragen und erwiesen hatte, auch als vorgetragen und erwiesen voraussetzten. So lebte Euklides noch lange nach seinem Tode in der Schule zu Alexandrien, welche, wie schon oben gesagt, eine Schule der Mathematik für die Welt war. Er lebt auch noch jetzt, wiewohl er, wenigstens in Deutschland, wo doch die mathematischen Wissenschaften vorzüglich blühen, nicht so allgemein genutzt wird, als er es verdient, und als es selbst für das Studium der neuern Mathematik zuträglich seyn würde. Doch vielleicht ist nicht so sehr Mangel an Geschmack und Lust, als vielmehr mancher äusserliche Umstand, Schuld daran, daß die Elemente des Euklides sich nicht in Vieler Händen befinden. Der griechische Text ist nicht für Jedermann, und auch nicht leicht zu haben. Lateinische Ausgaben sind zwar vorhanden, und können von vielen benutzt werden, aber ausserdem, daß noch mancher Freund der Mathematik übrig bleibt, der den Euklides in dieser Sprache nicht lesen kann: so behält der Vortrag der Wissenschaften in einer geläufigen neuern Sprache, in mancher Rücksicht, doch immer einen gewissen Vorzug. Die deutschen Dollmetschungen, die wir bis jetzt von allen Elementen, oder von einem Theile derselben haben, sind fast gänzlich in Vergessenheit gerathen. Dies alles wird mich vermuthlich rechtfertigen, wenn ich meinem deutschen Vaterlande, zum gefälligen Gebrauche,

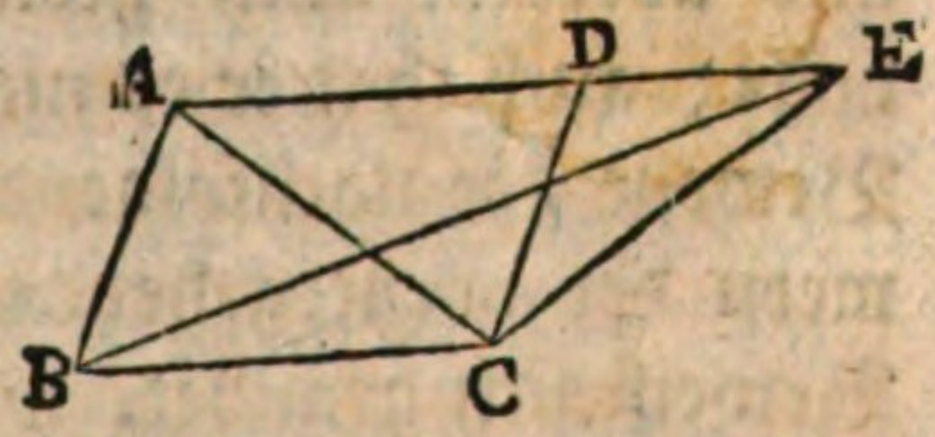
eine

eine neue Ueberſetzung der Elemente darbiete, von der ich vor einigen Jahren ſchon einen Verſuch bekannt gemacht habe. Weil ich dabey auf Materie und Form zugleich zu ſehen hatte: ſo war mein eifriges Bemühen dahin gerichtet, nicht nur die Sachen, ſondern, was das vorzüglichſte iſt, auch den Geiſt des Euklides aufs möglichſte darzuſtellen. Ich bin daher bey meiner Ueberſetzung der vortreflichen Oxforder Ausgabe des griechiſchen Textes vom Jahre 1703 treulich gefolgt; nur daß ich, der Kürze wegen, mich der Citationen und allgemeinen Zeichen bedient, einer Gewohnheit, die in den neuern Schriften nun einmal eingeführt iſt, und wodurch, wenn nur das gehörige Maaß nicht überſchritten wird, die Verſtändlichkeit des Vortrags ungemein viel gewinnt. Damit ich jedoch durch dieſe Abkürzung einer richtigen Vorſtellung vom Originale nicht hinderlich ſeyn möge, ſo will ich hier durch eine pünktliche Ueberſetzung eines beliebigen Satzes eine Probe geben, was für einen Gang der griechiſche Text überall nimmt. Ich wähle dazu, der Kürze wegen, den 41. Satz des 1. Buchs.

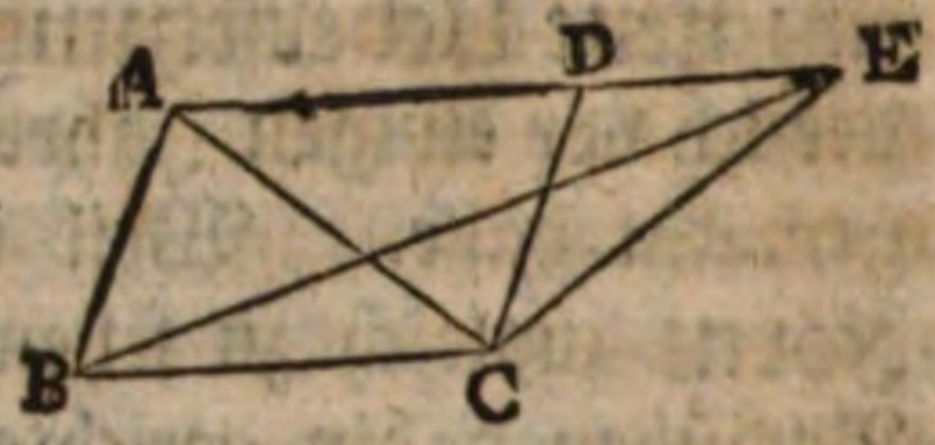
Der 41. Satz.

Wenn ein Parallelogramm und ein Triangel auf einerley Grundlinie und in einerley Parallelen ſind: ſo iſt das Parallelogramm doppelt ſo groß, als der Triangel.

Es ſey das Parallelogramm ABCD und der Triangel EBC auf einerley Grundlinie BC und in einerley Parallelen BC, AE: ſo behaupte ich, daß das Parallelogramm ABCD doppelt ſo groß ſey, als der Triangel EBC.



Es werde AC gezogen.



Der Triangel ABC, ist dem Triangel EBC gleich; denn beyde sind auf einerley Grundlinie BC und in einerley Parallelen BC, AE. Nun ist das Parallelogramm ABCD doppelt so groß, als der Triangel ABC; indem dasselbe durch die Diagonale AC halbirt wird. Folglich ist das Parallelogramm ABCD doppelt so groß, als der Triangel EBC.

Wenn demnach ein Parallelogramm und ein Triangel auf einerley Grundlinie und in einerley Parallelen sind: so ist das Parallelogramm doppelt so groß, als der Triangel. Welches zu beweisen war.

Wird dieser Satz, so wie er hier erscheint, mit dem nämlichen, wie er sich in den übersetzten Elementen zeigt, verglichen: so kann man sicher von diesem auf alle andre schliessen, und daraus sehen, in wie weit ich vom Originale abgegangen bin, und was ich der Abkürzung des Vortrags aufgeopfert habe. Indeß wollt ich doch dieser beliebten Kürze nicht gern einen solchen Vorzug beylegen, aus dem der Weitläuftigkeit des Originals ein Vorwurf erwachsen könnte. Denn Euklides that es gewiß nicht ohne Ursache, wenn er jeden vorangeschickten Satz bey Construction der Figur, und abermal nach geendigter Demonstration wiederholte; auch that er es nicht ohne Ursache, wenn er beym Beweise der nachfolgenden Sätze nicht bloß die Nummern der vorhergehenden anzeigte, auf die ein solcher Beweiß sich gründet, sondern die unter den Nummern befindlichen Sätze selbst immer wieder wörtlich vortrug. Denn ausser den beträchtlichen Schwierigkeiten, welche

damals

damals die äussere Form der meisten Bücher dem Nachschlagen citirter Stellen in den Weg legte, war seine Absicht bey den erwähnten Wiederholungen unstreitig dahin gerichtet, die Lehren, die er dem Verstande seiner Schüler vorgelegt, zugleich ihrem Gedächtnisse einzuprägen, und sie ihnen recht geläufig zu machen; vorzüglich aber, welches nicht so sehr aus der Acht gelassen werden solte, sie zu gewöhnen, daß sie die Sätze nicht an die Buchstaben der Figur allein binden, sondern sie, rein von aller individuellen Vorstellung, in ihrer ganzen Allgemeinheit denken möchten. Ich habe mit dieser Absicht des grossen Mannes, wie es auch in den besten Schriften der Neuern geschiehet, dadurch die Kürze vereinigt, und die Wiederholung vermieden, daß ich durch Citationen auf die vorhergehenden Lehren verwiesen, und jedem Satze die Buchstaben der Figur unmittelbar beygefügt, doch so, daß der Satz auch ohne diese Buchstaben gelesen und verstanden werden kann. Ein andrer Umstand, worauf Euklides Rücksicht genommen, und den ich keineswegs vernachläßigen durfte, ist der, daß er, so wie überhaupt die Alten, die zu den Figuren gesetzten Buchstaben des Alphabets in ihrer gewöhnlichen Ordnung braucht, und dadurch einem etwas Geübten Anleitung giebt, die Auflösung der Aufgabe, oder den Beweiß des Lehrsatzes, öfters, ohne den Text gelesen zu haben, bloß aus der Zeichnung zu errathen. Dies war der Grund, warum ich die griechischen Buchstaben nicht mit gleichlautenden deutschen verwechselte, wie ich sonst zur leichtern Vergleichung mit dem griechischen Texte gern gethan hätte; indem hiedurch obgedachte Bequemlichkeit, fast gänzlich verlohren gegangen wäre.

Einleitung.

Eine grosse Schwierigkeit machten mir noch die Punkte in den sogenannten arithmetischen Büchern. Denn da mir alles daran lag, meinen Lesern eine völlig richtige Idee von der Lehrart des Euklides zu geben: so konnte es mir nicht gleichgültig seyn, als ich aus mancherley Gründen auf die Vermuthung gerieth, daß in diesen Büchern, also gerade in denen, worinn der Gang, den Euklides genommen, uns nicht wenig interessirt, die Ausgaben, auch selbst die Oxforder, Aenderungen vorgenommen haben möchten, die eine irrige Vorstellung von der Methode der Alten in der Arithmetik erregen könnten. Alle meine Bemühungen, die ich anwendete, in dieser Sache mehreres Licht zu erhalten, und meine Conjecturen historisch bestätigt zu sehen, waren vergebens. Dennoch konnte ich mich unmöglich überwinden, die Punkte, wodurch man die Zahlen hat abbilden wollen, beyzubehalten; da ihre Ueberzählung nur Mühe macht, und ich aus dem Zeugnisse der Oxforder Edition gewiß wuste, daß sie in den Handschriften nicht befindlich gewesen. Nach verschiednen Versuchen, dem Originale hierinnen so nahe zu kommen, als es mir beym Mangel nöthiger Hülfsmittel möglich war, schien mir die Methode, die Punkte mit den gemeinen Ziffern zu verwechseln, die schicklichste zu seyn. Denkt man sich dabey statt dieser Ziffern die griechischen Buchstaben, so wie sich ihrer die Alten zur Bezeichnung der Zahlen bedienten: so kann man sich eine Idee vom Originale machen, welche demselben wenigstens gemässer ist, als wenn man, durch die Ausgaben verführt, sich vorstellt, Euklides habe, wenn er z. B. die Zahl 32 anzeigen wollen, eben so viele Punkte hingemahlet. Ich fand um desto weniger Bedenken mir diese Freyheit zu nehmen, da nichts in der Hauptsache

sache dadurch geändert ward, und meine Leser bey Weglassung der Punkte nichts weiter verlohren, als die Mühe sie jedesmal nachzuzählen. Wenn ich nun noch hinzufüge, daß durch die unter die Ziffern gesetzten Striche eine unbestimmte Zahl von Einheiten, durch die Ziffern aber ein individuelles Beyspiel, welches unter die allgemeine Regel gehört, angezeigt werde: so wird meine Abänderung um desto eher sich Beyfall versprechen können.

Nach diesen Kleinigkeiten, die ich doch nicht gänzlich unberührt lassen durfte, weiß ich diese Einleitung nicht besser zu schliessen, als wenn ich zum Besten derer, die den Euklides noch nicht kennen, den Inhalt und die Verbindung der Bücher, aus denen die Elemente bestehen, noch vorläufig anzeige, um dadurch die Uebersicht des Ganzen und die Vorstellung der einzelnen Theile zu erleichtern. Doch kann ich keine förmliche Tabelle darüber versprechen, als worein mathematische Lehren sich nicht bequemen, welche, ungeachtet sie der Schulmethode gar nicht abgeneigt sind, solche dennoch, so bald sie mit der natürlichen collidirt, auch sogleich hintansetzen.

Die gesamte Geometrie, oder, wie sie ganz vortreflich, selbst dem Sinne und Vorschlage des Plato gemäß, in unsrer Sprache genennt wird, die **Meßkunst**, theilt sich in die Flächen- und Körper-Lehre. Letztere kann ohne die Lehre von der Commensurabilität und Incommensurabilität der Grössen nicht verstanden werden; diese aber setzt die Lehre von den Zahlen voraus. Demnach bestehen die Elemente des Euklides aus vier Theilen. Der erste begreift die Lehre von den Flächen, in den 6 ersten Büchern; der zweyte, die Lehre von

den

den Zahlen, im 7. 8. 9. Buche; der dritte, die Lehre von commensurabeln und incommensurabeln Grössen, im 10. Buche; der vierte endlich die Lehre von den Körpern, im 11. 12. 13. Buche.

Der erste Theil handelt von den Flächen, in Absicht sowohl der Gleichheit, als Aenlichkeit der Figuren. Jene ist in den 4 ersten Büchern; diese im 5. und 6. Buche enthalten.

Das erste Buch, von Triangeln und Parallelogrammen:
1. von Triangeln. Satz 1 — 26.
2. von Parallellinien und Parallelogrammen. Satz 27 — 36.
3. Vergleichung der Triangel mit den Parallelogrammen. Satz 37 — 48.

Das zweyte Buch, vom Rectangel, oder rechtwinklichen Parallelogramm. Hier werden die Oblonga und Quadrate, welche durch die verschiednen Schnitte einer geraden Linie entstehen, mit einander verglichen. Satz 1 — 14.

Das dritte Buch, vom Cirkel:
1. von geraden Linien in und an dem Cirkel. Satz 1 — 19.
2. von Winkeln in und an dem Cirkel. Satz 20 — 36.

Das vierte Buch, von Beschreibung der Figuren in und um einander:
1. Triangel und Cirkel. Satz 1 — 5.
2. Quadrate und Cirkel. Satz 6 — 9.
3. Polygone und Cirkel. Satz 10 — 16.

Das fünfte Buch, von den Proportionen stetiger Grössen überhaupt:
1. von gleichvielfachen Grössen. Satz 1 — 6.
2. von Proportionalgrössen. Satz 7 — 15.
3. Veränderungen der Proportion. Satz 16 — 25.

Das sechste Buch, von den Proportionen stetiger Grössen insbesondere:
1. Proportionen beym Triangel und Parallelogramm. Satz 1 — 17.
2. Aenlichkeit der Figuren. Satz 18 — 33.

Einleitung.

Der zweyte Theil handelt von den Zahlen. Hier beweiset Euklides alle Sätze, die im fünften Buche von stetigen Grössen bewiesen worden, aufs neue von den Zahlen.

Das **siebente** Buch, von der discreten Proportion der Zahlen:

1. von gleichvielfachen Zahlen. Satz 1 — 10.
2. von discreten Proportionalzahlen. Satz 11 — 41.

Das **achte** Buch, von der stetigen Proportion der Zahlen:

1. von stetigen Proportionalzahlen. Satz 1 — 13.
2. von änlichen Flächen- und Körperzahlen. Satz 14 — 27.

Das **neunte** Buch von den besondern Arten der Zahlen:

1. Quadrat- und Kubikzahlen. Satz 1 — 10.
2. Primzahlen. Satz 11 — 20.
3. gerade und ungerade Zahlen. Satz 21 — 34.
4. vollständige Zahlen. Satz 35. 36.

Der dritte Theil handelt von der Commensurabilität der Grössen,

im **zehnten** Buche:

1. commensurable und incommensurable Grössen. Satz 1 — 19.
2. rationale und mediale Grössen. Satz 20 — 36.
3. Irrationalgrössen aus dem Zusammensetzen. Satz 37 — 73.
4. Irrationalgrössen aus dem Wegnehmen. Satz 74 — 111.
5. Vergleichung aller vorhergehenden Irrationalgrössen. Satz 112 — 117.

Der vierte Theil handelt von den Körpern.

Das **eilfte** Buch:

1. von der Lage der Ebnen. Satz 1 — 19.
2. von körperlichen Winkeln. Satz 20 — 23.
3. vom Parallelepipedon. Satz 24 — 40.

Das **zwölfte** Buch:

1. von der Pyramide und dem Prisma. Satz 1 — 9.
2. vom Kegel und Cylinder. Satz 10 — 15.
3. von der Kugel. Satz 16 — 18.

Einleitung.

Das dreyzehnte Buch:
1. von Linien, die nach ſtetiger Proportion geſchnitten ſind. Satz 1 — 6.
2. von regulären Flächen. Satz 7 — 12.
3. von den fünf regulären Körpern. Satz 13 — 18.

Mit dieſem 13. Buche ſchlieſſen ſich die Elemente des Euklides dergeſtalt, daß in dem letzten Satze dieſes Buchs alles Vorhergehende ſich concentrirt, und ein regelmäßiges Ganzes formirt, welches durch Zuſätze nur verunſtaltet wird. Dergleichen Zuſätze enthalten das 14. und 15. Buch, welche dem Hypſikles, einem Mathematiker zu Alexandrien im zweyten Jahrhunderte der gemeinen Zeitrechnung, zugeſchrieben, und von keinem, der die Elemente geleſen, für eine Arbeit des Euklides gehalten werden. Dieſe beyden Bücher habe ich, als ein Stück des Alterthums, und damit der Ueberſetzung nichts zu fehlen ſchiene, als einen Anhang, der nur wenige Seiten anfüllet, beygefüget. Geſchrieben, Kloſter Berge, im September 1781.

Johann Friedrich Lorenz.

Erklärung

Erklärung

der zur Abkürzung gebrauchten Zeichen.

$A = B$ die Grösse A ist der Grösse B gleich.

$A = B = C$ alle drey Grössen, A, B, C, sind einander gleich.

$A > B$ die A ist gröſſer als die B.

$B < A$ die B ist kleiner als die A.

$A \geq B$ die A ist entweder gröſſer, oder eben so groß, oder kleiner, als die B.

Wie $A \geq B$, so ist auch $C \geq D$ wenn $A = B$, so ist auch $C = D$,
wenn $A > B$, so ist auch $C > D$,
wenn $A < B$, so ist auch $C < D$.

$A \sim B$ die A ist der B änlich.

$A \cong B$ die A ist der B gleich und änlich.

$A + B$ zu A ist B hinzugesetzt.

$A - B$ von A ist B weggenommen.

ABC der Winkel ABC, dessen Spitze B.

$\triangle$ ABC der Triangel ABC.

$\square$ AB das Quadrat der geraden Linie AB.

Rect.

Rect. ABBC das Rectangel, aus den beyden Linien AB, BC.

Rect. A, B das Rectangel aus den beyden Linien A, B.

A : B die Verhältniß der A zu B.

A : B = C : D die A verhält sich zu B, wie C zu D.

$(A : B)^2$ die zwiefach höhere Verhältniß der A zu B.

$(A : B)^3$ die dreyfach höhere Verhältniß der A zu B.

A . B das Product aus den Zahlen, A, B.

A^2 die Quadratzahl von A.

A^3 die Kubikzahl von A.

$A \cap B$ die Flächen A, B, sind commensurabel; oder die geraden Linien, A, B, sind in Länge commensurabel.

$A \cup B$ die Flächen A, B, sind incommensurabel; oder die geraden Linien A, B, sind in Länge incommensurabel.

$A \frown B$ die geraden Linien A, B, sind nur in Quadrat commensurabel.

$A \smile B$ die geraden Linien A, B, sind in Quadrat incommensurabel.

Euklids Elemente

Erstes Buch.

Definitionen.

1.

Ein Punkt ist, was keine Theile hat.

2. Eine Linie ist eine Länge ohne Breite.

3. Enden einer Linie sind Punkte.

4. Eine gerade Linie ist, welche den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt.

5. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.

6. Enden einer Fläche sind Linien.

7. Eine ebne Fläche, (Ebne) ist, welche den auf ihr befindlichen geraden Linien gleichförmig liegt.

8. Ein ebner **Winkel** ist die Neigung zweier Linien gegen einander, wenn solche in einer Ebne einander berühren, ohne in Einer geraden Linie zu liegen.
9. Sind die Linien, welche den Winkel einschliessen, gerade; so heißt derselbe ein **geradliniger Winkel.**
10. Steht eine gerade Linie auf einer andern so, daß die Nebenwinkel gleich sind; so heißt sie **senkrecht,** (**perpendikular**) auf der andern, und jeder der beyden gleichen Winkel heißt ein **rechter.**
11. Ein **stumpfer Winkel** heißt, der grösser als ein rechter;
12. Ein **spitzer** aber, der kleiner als ein rechter ist.
13. **Grenze** heißt, was das Ende eines Dinges ist;
14. **Figur,** was von einer, oder mehrern Grenzen, eingeschlossen wird.
15. Ein **Cirkel** ist eine ebne Figur, von einer einigen Linie, **Peripherie** genannt, so eingeschlossen, daß die geraden Linien, welche bis zu derselben, aus Einem innerhalb der Figur befindlichen Punkte, gezogen werden, alle einander gleich sind;
16. Dieser Punkt heißt des Cirkels **Mittelpunkt,** (**Centrum.**)
17. Des Cirkels **Durchmesser,** (**Diameter**) ist jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt gehet und an beyden Seiten von der Peripherie begrenzt wird; welche auch den Cirkel halbiret.
18. Ein **Halbcirkel** ist eine Figur, welche vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittnen Cirkelbogen, oder Theil der Peripherie, eingeschlossen wird.
19. Ein **Cirkelabschnitt** (**Segment**) ist, so von einer geraden Linie und dem Cirkelbogen eingeschlossen wird.
20. **Geradliniche Figuren** sind, die von geraden Linien eingeschlossen werden; und zwar
21. **dreyseitige** (**Triangel**) die, so von dreyen,
22. **vierseitige,** welche von vieren,
23. **vielseitige,** (**Polygone**) die von mehr als vier geraden Linien eingeschlossen werden.
24. Unter den Triangeln heißt derjenige **gleichseitig,** welcher drey gleiche Seiten hat,

25. gleich-

25. gleichschenklich aber, welcher nur zwey gleiche Seiten hat,
26. ungleichseitig, welcher drey ungleiche Seiten hat.
27. Ferner heißt unter den Triangeln derjenige rechtwinklich, welcher Einen rechten Winkel hat,
28. stumpfwinklich, welcher Einen stumpfen Winkel hat,
29. spitzwinklich, welcher drey spitze Winkel hat.
30. Unter den vierseitigen Figuren heißt diejenige ein Quadrat, welche gleichseitig und rechtwinklich ist,
31. Ein Oblongum, welche zwar rechtwinklich, aber nicht gleichseitig ist,
32. Ein Rhombus, welche zwar gleichseitig, aber nicht rechtwinklich ist,
33. Ein Rhomboides, deren Gegenseiten und Gegenwinkel gleich sind, die aber weder gleichseitig noch rechtwinklich ist.
34. Jede andre vierseitige Figur heisse Trapezium.
35. Parallel sind gerade Linien in Einer Ebne, die, so weit man sie auch an beyden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammentreffen.

Postulate.

1. Man fodre, von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen,
2. desgleichen, eine begrenzte gerade Linie stetig in gleicher Richtung zu verlängern,
3. desgleichen aus jedem Punkte in jedem Abstande einen Cirkel zu beschreiben.

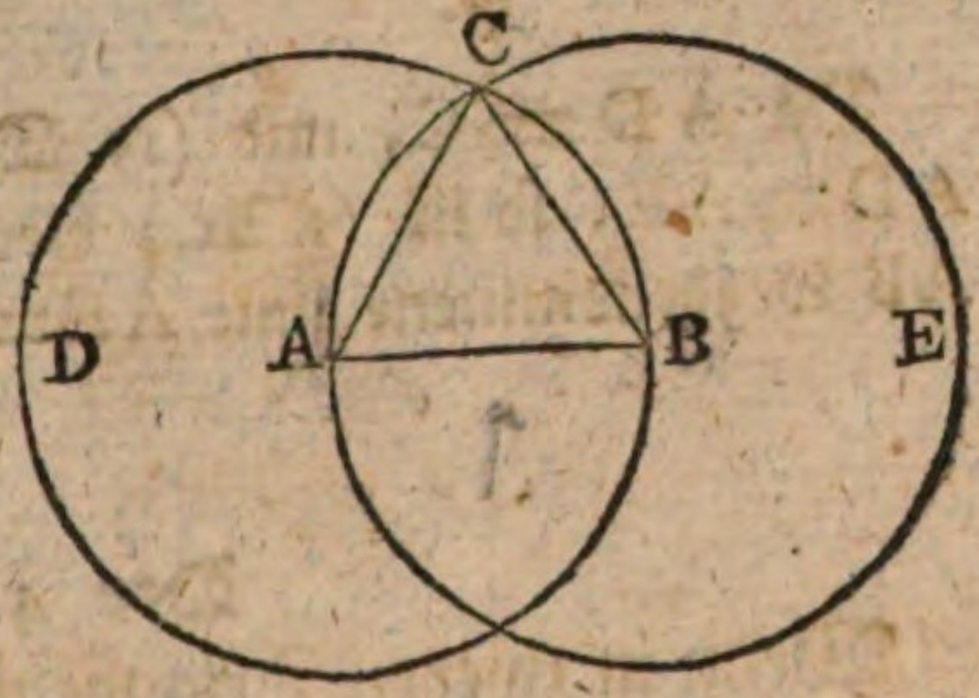
Axiome.

1. Zwey Dinge, so Einem Dritten gleich, sind selbst einander gleich.
2. Wenn zu Gleichem Gleiches hinzukommt, so sind auch die Aggregate gleich.

3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, so sind auch die Reste gleich.
4. Wenn zu Ungleichen Gleiches hinzukommt, so sind die Aggregate ungleich.
5. Wenn von Ungleichen Gleiches weggenommen wird, so sind die Reste ungleich.
6. Zwey Dinge, deren jedes das Doppelte von Einem Dritten, sind einander gleich.
7. Zwey Dinge, deren jedes die Hälfte von Einem Dritten, sind einander gleich.
8. Dinge, die einander decken, sind einander gleich.
9. Das Ganze ist grösser als sein Theil.
10. Alle rechte Winkel sind einander gleich.
11. Zwey gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, so daß die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwey rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen.
12. Zwey gerade Linien schliessen keinen Raum ein.

Der 1. Satz.

Auf einer gegebnen begrenzten geraden Linie, AB, einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben.

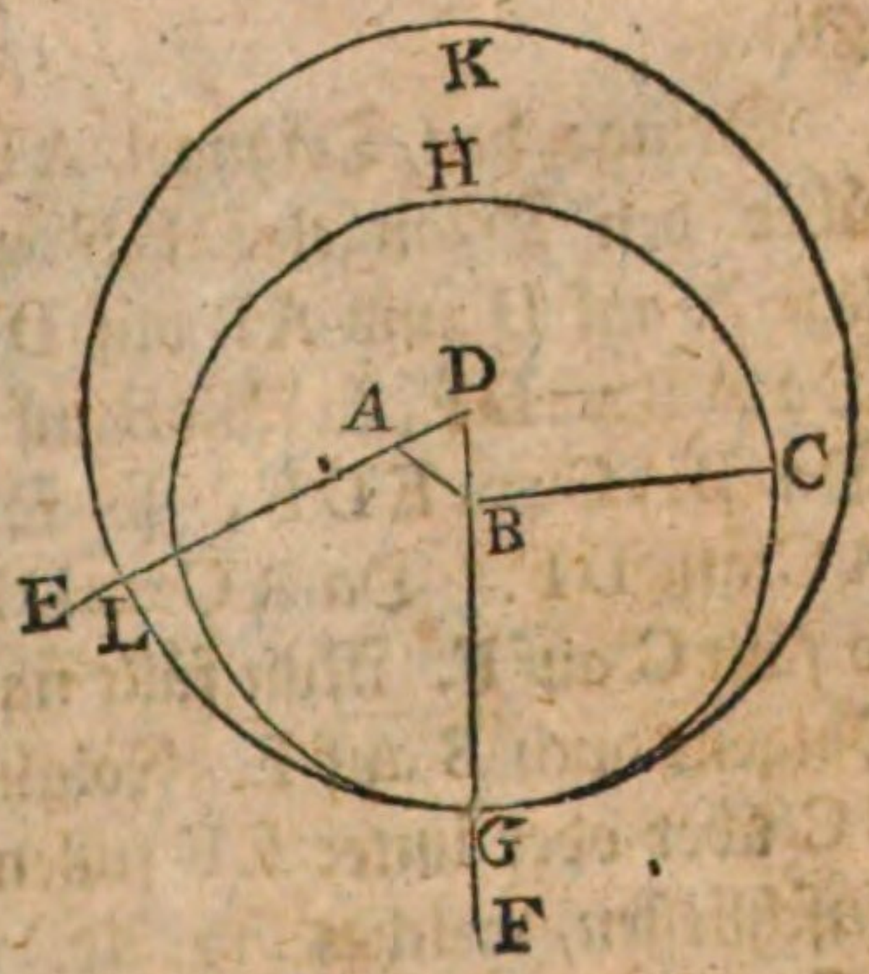


Aus dem Punkte A beschreibe (3. Post.) mit AB den Cirkel BCD, und aus dem Punkte B mit BA den Cirkel ACE. Vom Punkte C, in dem sich beyde Cirkel schneiden, ziehe (1. Post.) nach A, B, die geraden Linien CA, CB.

Da (15. Def.) AC=AB und BC=BA, so ist (1 Ax.) AC=BC. Demnach ist AC=AB=BC, folglich (24. Def.) der auf AB beschriebne △ CAB gleichseitig.

Der 2. Satz.

An einen gegebnen Punkt, A, eine der gegebnen, BC, gleiche gerade Linie, zu legen.



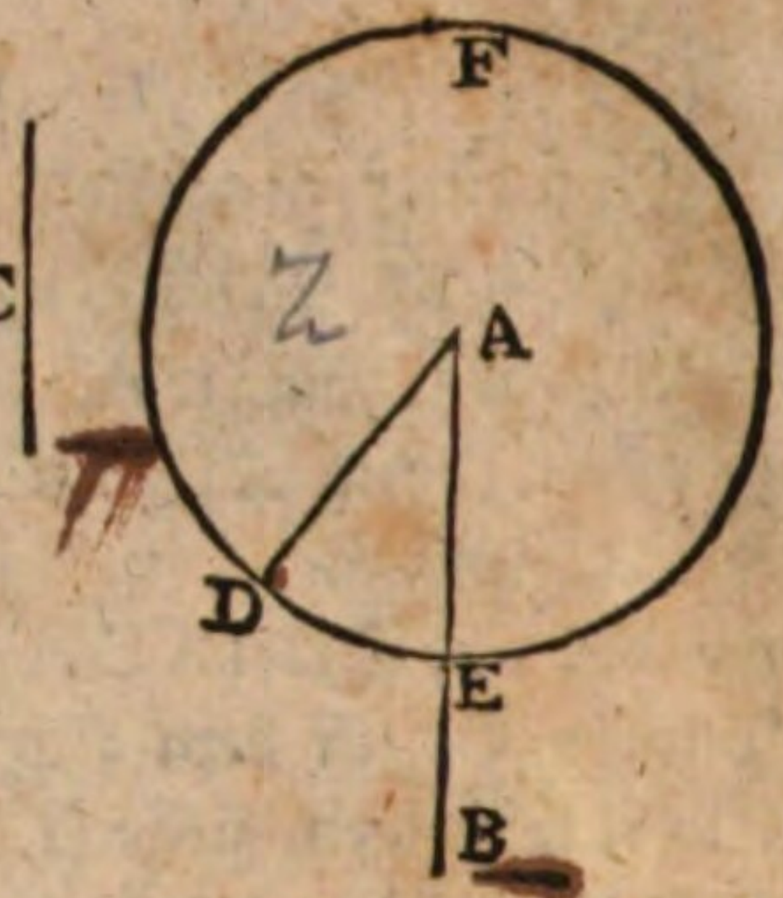
Ziehe von A nach B die gerade Linie, AB. Auf dieser beschreibe (1. S.) den gleichseitigen Triangel DAB. Verlängre (2. Post.) die Schenkel DA, DB, nach E, F. Aus B beschreibe mit BC den Cirkel CGH, und aus D mit DG den Cirkel GKL.

Da (15. Def.) DL=DG, und (24 Def.) DA=DB, so ist (3. Ax.) AL=BG. Nun ist (15. Def.) BC=BG. Folglich (1. Ax.) AL=BC.

Der 3. Satz.

Es sind zwey ungleiche gerade Linien, AB, C, gegeben; man soll von der grössern, AB, eine der kleinern, C, gleiche Linie wegnehmen.

An A lege (2. S.) AD = C, und beschreibe aus A mit AD den Cirkel DEF.

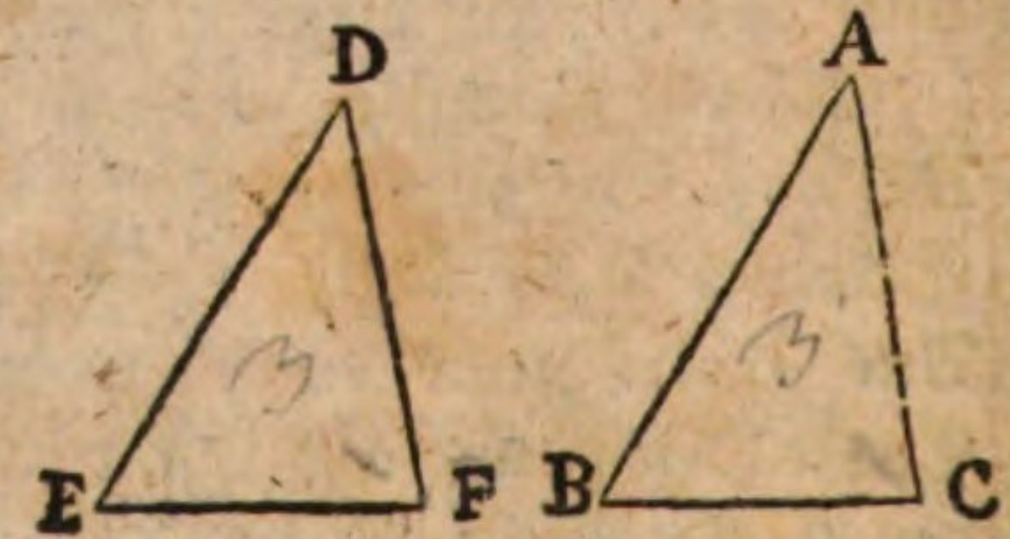


Da AD = C, und (15. Def.) AD = AE, so ist (1. Ax.) die von AB weggenommene Linie AE = C.

Der 4. Satz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten, AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, gleich sind, (die eine, AB, nämlich der einen DE, und die andre, AC, der andern, DF); und ein Winkel, BAC, einem Winkel, EDF, gleich ist, der nämlich, den die gleichen Seiten einschliessen; so ist auch die dritte Seite BC, der dritten, EF, gleich, auch sind die Triangel, ABC, DEF, selbst einander gleich, und von den übrigen Winkeln sind die, so gleichen Seiten gegenüber liegen, ABC, DEF; ACB, DFE, ebenfals einander gleich.

Bringe den Triangel ABC über den Triangel DEF und lege A auf D und AB auf DE. Da AB = DE, so fällt B auf E. Da BAC = EDF, so fällt AC auf DF. Da AC = DF, so fällt C auf F. Nun fällt nach Obigem auch B auf E. Folglich fällt BC auf EF. (Denn solte BC über oder unter EF fallen, so würden BC, EF, einen Raum einschliessen, welches (12. Ax.) unmöglich ist.) Folglich ist (8. Ax.) BC = EF; △ABC = △DEF; ABC = DEF; ACB = DFE.

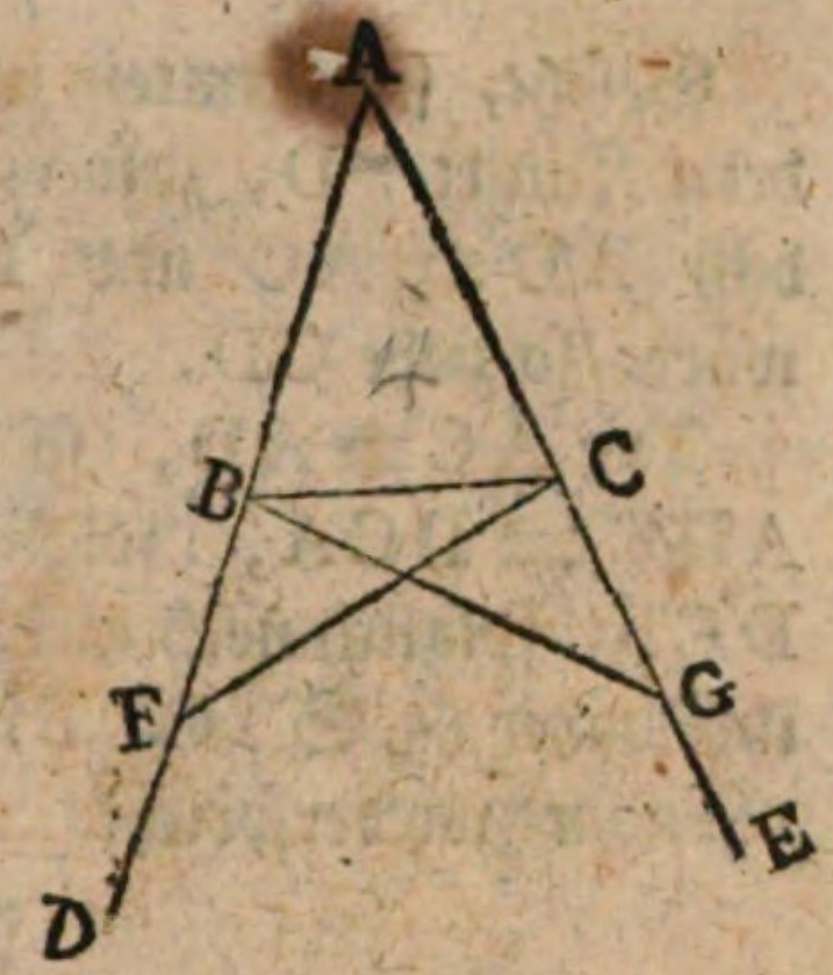


Der 5. Satz.

In jedem gleichschenklichen Triangel, ABC, sind die Winkel an der Grundlinie, ABC, ACB, einander gleich; auch sind, wenn man die Schenkel AB, AC, verlängert, die Winkel unter der Grundlinie, DBC, ECB, einander gleich.

Auf

Auf BD nimm willkührlich einen Punkt F. Von AE nimm (3. S.) AG = AF, und ziehe FC, GB.

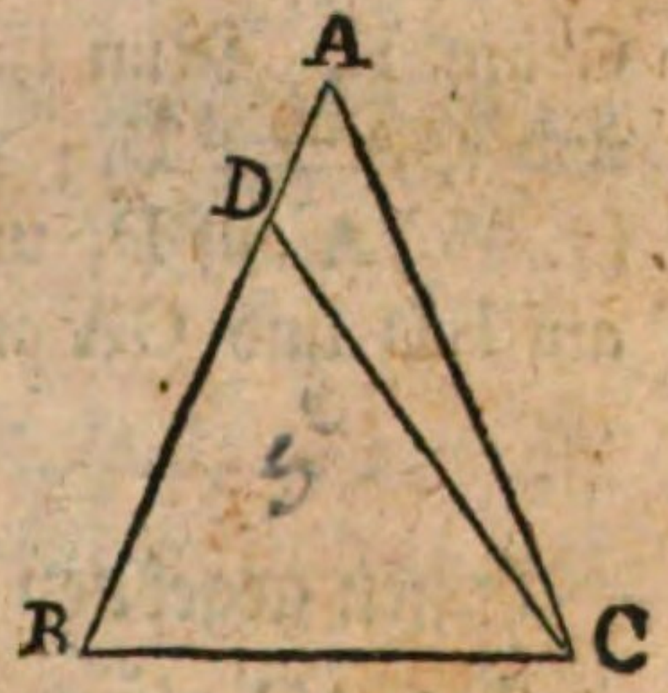


In den △ ACF, ABG, ist AF = AG und AC = AB, auch der Winkel bey A beyden gemein, folglich ist (4. S.) FC = GB, ACF = ABG, AFC = AGB. Nun ist AF = AG, AB = AC, und daher (3. Ax.) BF = CG. Demnach, (in den △ FBC, GCB,) ist BF = CG, FC = GB, AFC = AGB, folglich (4. S.) BCF = CBG und FBC = GCB, das ist, die Winkel unter der Grundlinie sind gleich.

Da ABG = ACF und CBG = BCF, so ist (3. Ax.) ABC = ACB, das ist, die Winkel an der Grundlinie sind gleich.

Der 6. Satz.

Wenn in einem Triangel, ABC, zwey Winkel, ABC, ACB, einander gleich sind: so sind auch die Gegenseiten solcher Winkel, AC, AB, einander gleich.



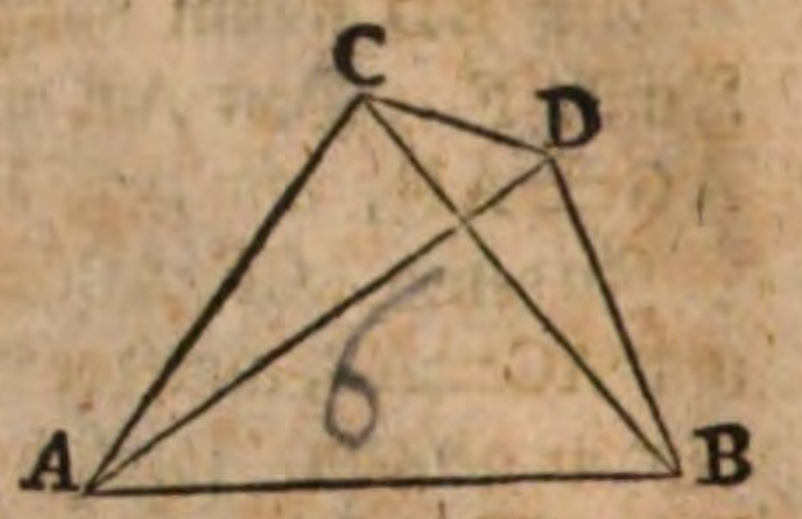
Wären AC, AB, ungleich, so wär eine davon grösser, etwa AB. Es sey daher (3. S.) BD = AC. Ziehe DC.

In den Triangeln ABC, DBC, wär demnach BD = CA, BC beyden gemein und DBC = ACB, folglich (4. S.) △ DBC = △ ABC, welches (9. Ax.) unmöglich.

Der 7. Satz.

Wenn auf einer geraden Linie, AB, in ihren Endpunkten A, B, zwey gerade Linien, AC, BC, aufgestellet sind, daß sie in einem Punkte, C, zusammen treffen; und zwey andre gerade Linien, welche den erstern gleich sind, (die eine nämlich der einen, AC, die andre der andern, BC,) in eben denselben Endpunkten, A, B, aufgestellet werden: so können dieselben in keinem andern Punkte an eben derselben Seite zusammentreffen.

Gesetzt, sie könnten in einem andern Punkte, D, zusammen treffen, daß AD = AC und BD = BC, wäre, so ziehe CD.



Da AC = AD, so ist (5. S.) ADC = DCA, folglich ADC > DCB, folglich noch mehr CDB > DCB. Nun ist CB = DB, und daher (5. S.) CDB = DCB, welches jenem, CDB > DCB, offenbar wiederspricht.

Der 8. Satz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten, AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, gleich sind, (die eine, AB, nämlich der einen DE, die andre, AC, der andern, DF,) und die dritte Seite, BC, der dritten, EF, gleich ist: so ist auch ein Winkel, BAC, einem Winkel, EDF, gleich, der nämlich, welchen die gleichen Seiten einschliessen.

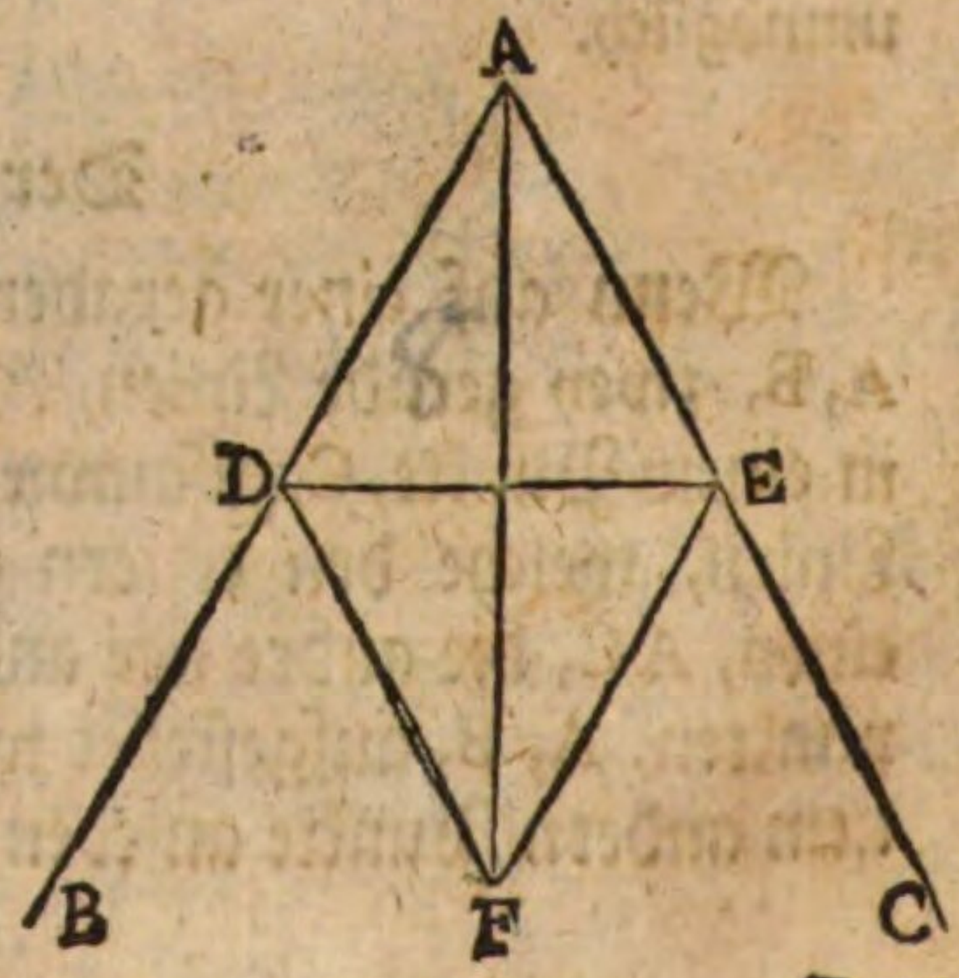
Bringe den Triangel ABC über den △ DEF und lege B auf E und BC auf EF.

Da BC = EF, so fällt C auf F. Nun ist BA = ED und CA = FD. Folglich fällt (7. S.) A auf D, und daher BA auf ED und CA auf FD, folglich ist (8. Ax.) BAC = EDF.

Der 9. Satz.

Einen gegebnen geradlinichen Winkel, BAC, zu halbiren.

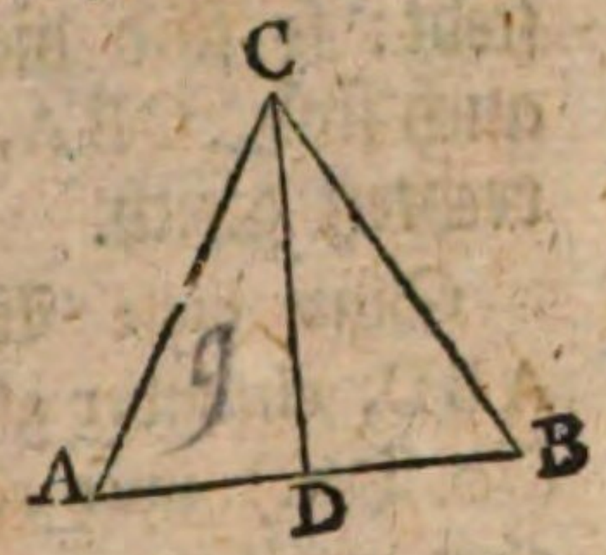
Auf AB nimm willkührlich den Punkt D. Von AC nimm (3. S.) AE = AD. Ziehe DE, und beschreibe (1. S.) auf derselben den gleichseitigen △ DEF. Ziehe AF, so halbirt diese den Winkel bey A, weil DA = AE, auch AF beyden Triangeln gemein und DF = FE; folglich (8. S.) DAF = EAF.



Der

Der 10. Satz.

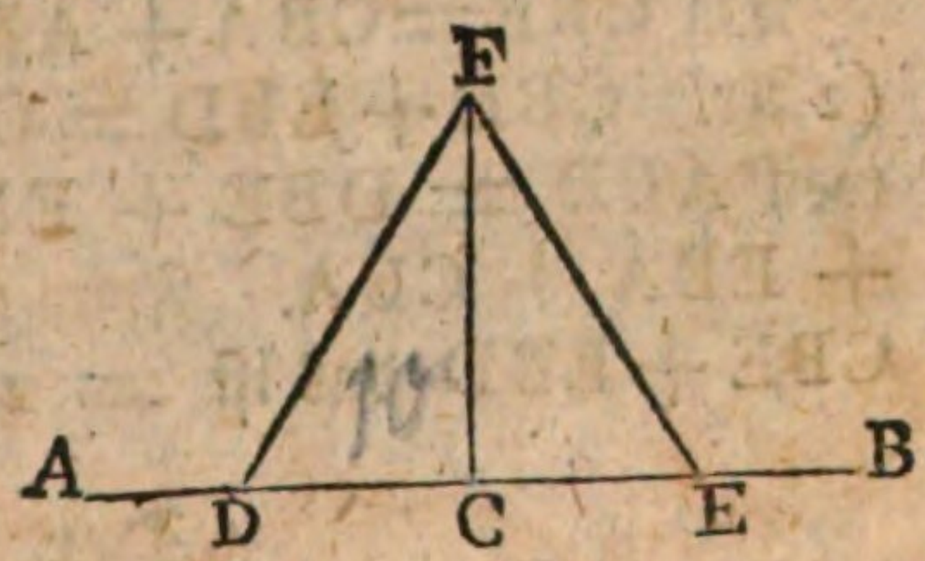
Eine gegebne begrenzte gerade Linie, AB, zu halbiren.



Auf AB beschreibe (1. S.) den gleichseitigen △ ABC. Halbire (9. S.) den Winkel ACB durch CD, so wird die AB in D halbiret, weil AC=CB und CD beyden Triangeln gemein, auch ACD=BCD, folglich (4. S.) AD=DB.

Der 11. Satz.

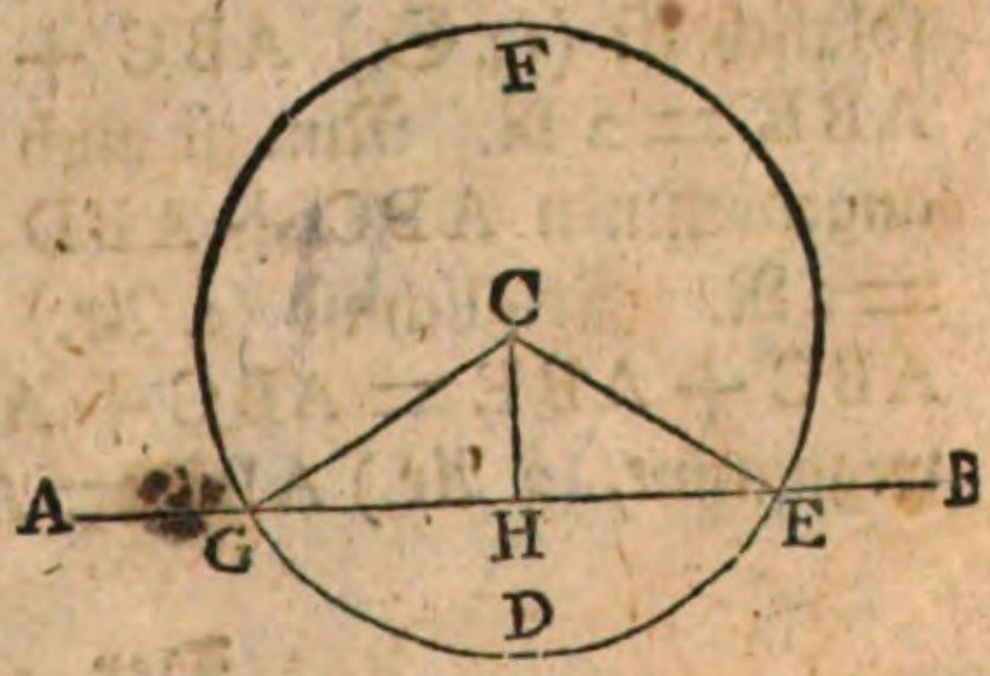
Auf einer gegebnen geraden Linie, AB, in einem auf ihr gegebnen Punkte, C, einen Perpendikel aufzurichten.



Auf AC nimm willkührlich einen Punkt, D. Von CB nimm (3. S.) CE=CD. Auf DE beschreibe (1. S.) den gleichseitigen △ FDE und ziehe FC, so ist diese senkrecht auf AB im Punkte C; weil CD =CE, und CF beyden Triangeln gemein, auch DF=EF, folglich (8. S.) DCF=FCE, folglich (10. Def.) FC senkrecht auf AB.

Der 12. Satz.

Auf eine gegebne unbegrenzte gerade Linie, AB, von einem ausserhalb derselben gegebnen Punkte, C, einen Perpendikel zu fällen.

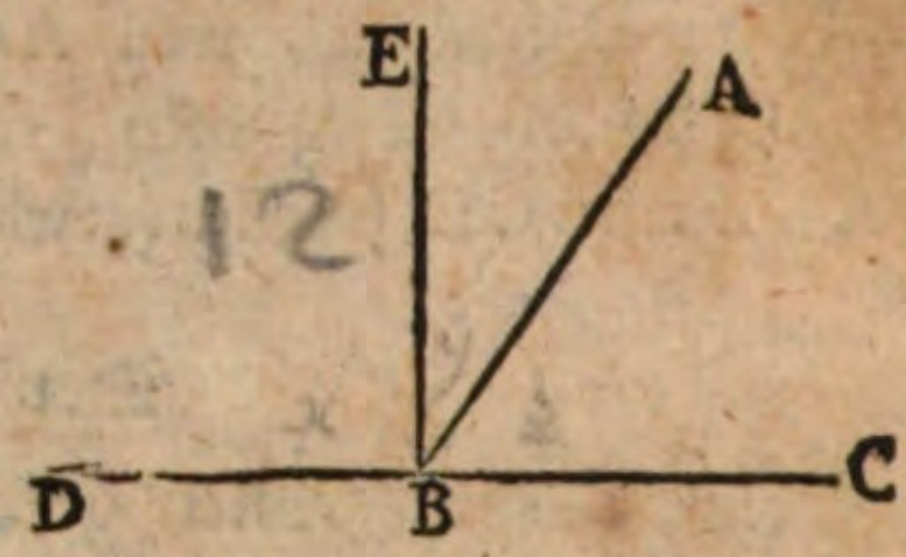


Nimm an der andern Seite von AB willkührlich einen Punkt, D, beschreibe aus C mit CD, den Cirkel EFG, halbire (10. S.) GE in H und ziehe CH, so ist diese senkrecht auf AB.

Ziehe CG, CE, so ist, weil GH=HE, CH gemeinschaftlich und (15. Def.) GC=CE, (8. S.) GHC=CHE, folglich (10. Def.) CH senkrecht auf AB.

Der 13. Satz.

Ist eine gerade Linie, AB, auf einer andern, CD, aufgestellt: so sind die Winkel, die sie macht, was für welche es auch sind, CBA, ABD, entweder zwey rechte, oder zweyen rechten gleich.

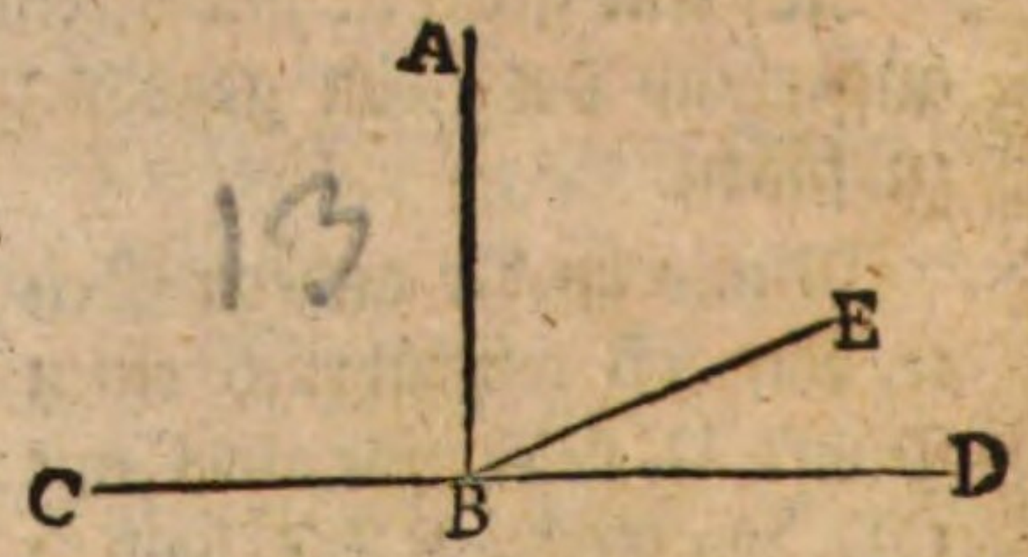


Sind diese Winkel, CBA, ABD, einander gleich, so sind sie (10. Def.) zwey rechte; sind sie aber ungleich, so mache (11. S.) BE auf CD in B senkrecht, folglich sind (10. Def.) CBE, EBD, zwey rechte Winkel.

Da CBE = CBA + ABE, so ist, wenn EBD hinzukommt, (2 Ax.) CBE + EBD = CBA + ABE + EBD. Eben so, weil ABD = DBE + EBA, ist ABD + CBA = DBE + EBA + CBA. Folglich ist (1. Ax.) ABD + CBA = CBE + EBD das ist = 2 R.

Der 14. Satz.

Wenn mit einer geraden Linie AB, in Einem Punkte derselben, B, zwey andre nicht an Einer Seite befindliche gerade Linien, BC, BD, Nebenwinkel ABC, ABD, machen, die zweyen rechten gleich sind: so liegen solche nach Einer geraden Linie, CBD, an einander.



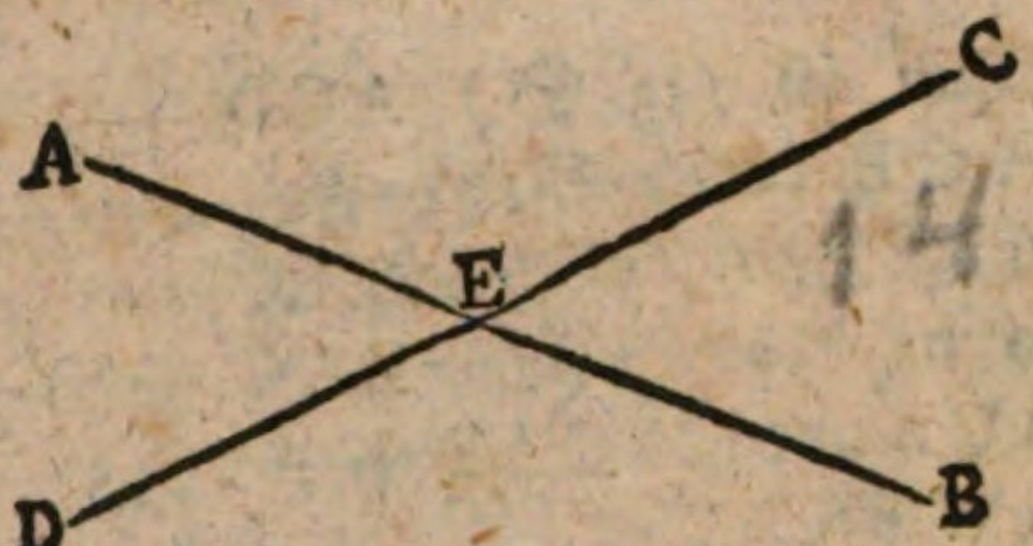
Wäre CBD keine gerade Linie, so sey es irgend eine andre welche man will, etwa, CBE, folglich ist (13. S.) ABC + ABE = 2 R. Nun ist auch angenommen ABC + ABD = 2 R. Folglich ist (1. Ax.) ABC + ABE = ABC + ABD, folglich, wenn man ABC wegnimmt, (3. Ax.) AB[illegible] = ABD, welches (9. Ax.) unmöglich.

Der 15. Satz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, die einander schneiden, machen gleiche Scheitelwinkel, CEA, DEB; CEB, AED.

Da

Da (13. S.) CEA + AED = 2 R. und AED + DEB = 2 R, so ist (1. Ax.) CEA + AED = AED + DEB, folglich wenn man AED wegnimt, (3. Ax.) CEA = DEB.



Eben so wird bewiesen, daß CEB = AED.

Zusatz.

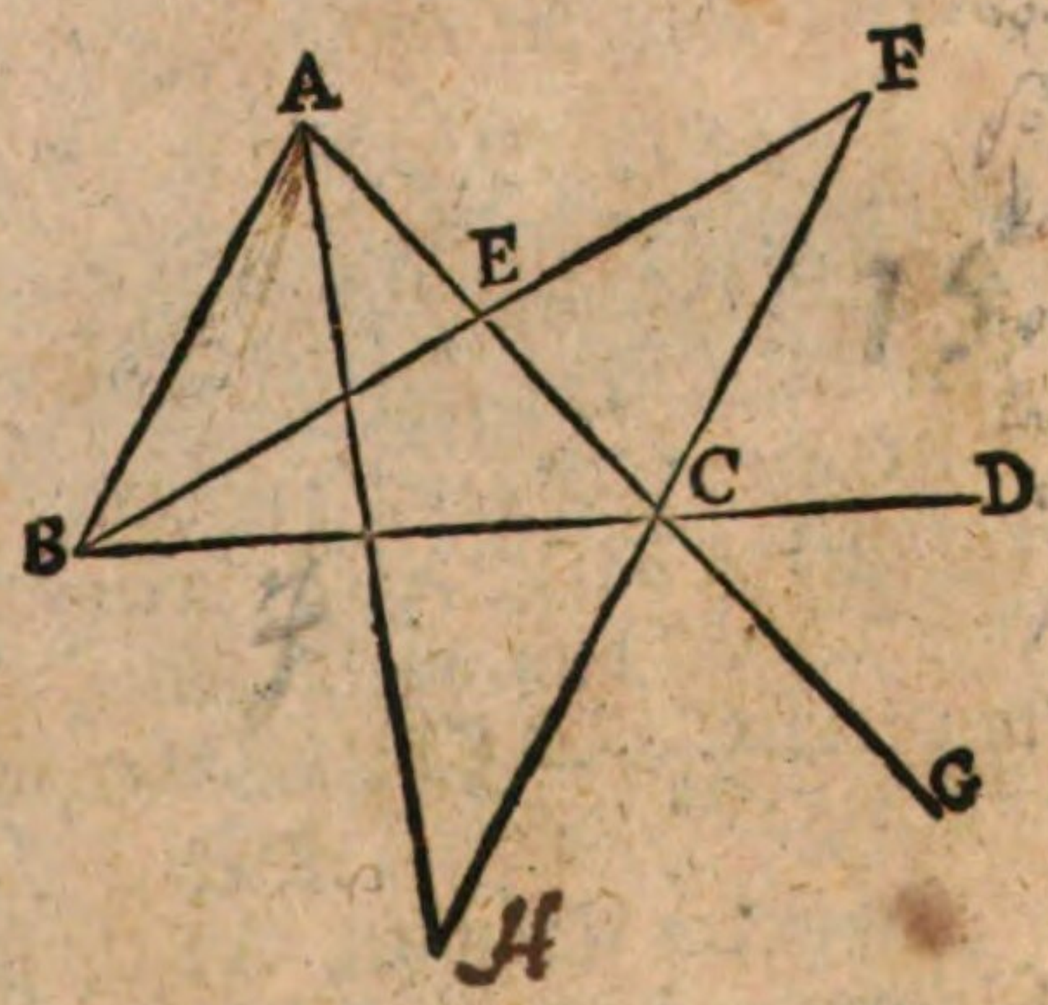
Hieraus erhellet, wenn gerade Linien, so viel ihrer sind, einander in Einem Punkte schneiden, daß alle Winkel an solchem Durchschnittspunkte vier rechten gleich sind.

Der 16. Satz.

Bey jedem Triangel, ABC, ist, wenn man eine seiner Seiten, BC, verlängert, der Aussenwinkel, ACD, grösser, als jeder seiner innern Gegenwinkel, CBA, BAC.

Halbire (10. S.) AC in E, ziehe BE, und verlängre sie, bis EF = EB. Ziehe FC.

Da BE = EF, AE = EC, und (15. S.) AEB = FEC, so ist (4. S.) BAE = ECF. Nun ist (9. Ax.) ACD > ECF. Folglich ist ACD > BAE.



Eben so wird auch BC halbiret und bewiesen, daß BCG, das ist, (15. S.) ACD > CBA.

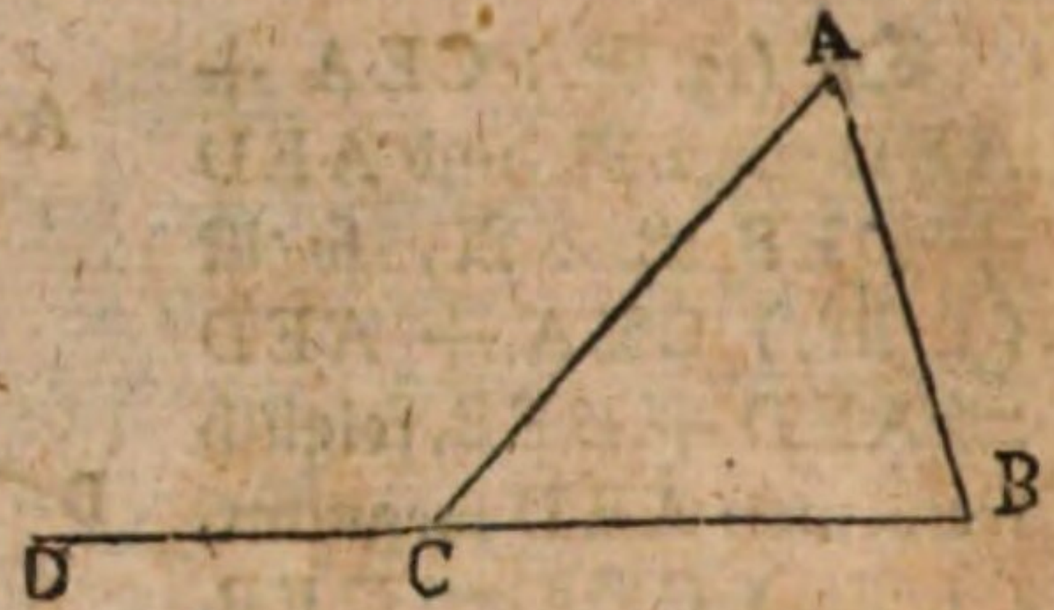
Der 17. Satz.

In jedem Triangel, ABC, sind jegliche zwey Winkel zusammen kleiner als zwey rechte.

Verlängre BC nach D, so ist (16. S.) ACD > ABC oder ABC < ACD, folglich (4. Ax.) ABC + ACB < ACD + ACB.

Nun

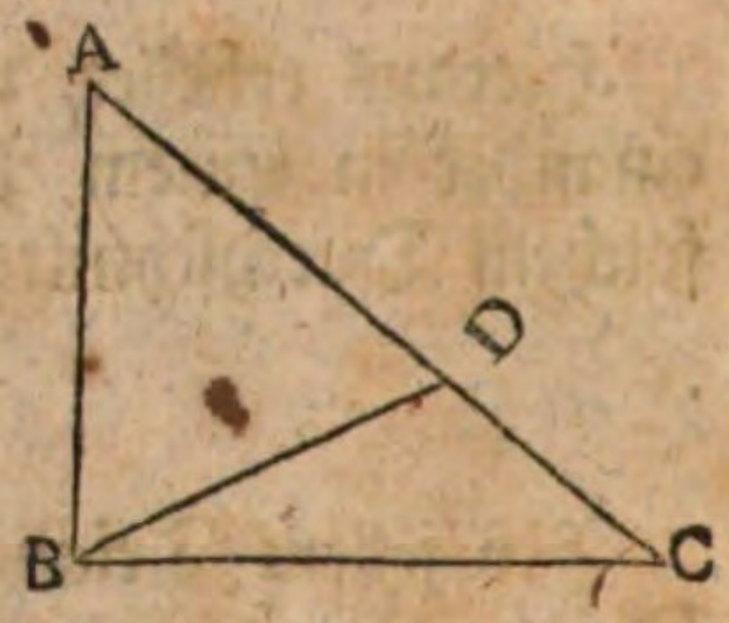
Nun ist (13. S.) $ACD + ACB = 2$ R. Folglich $ABC + ACB < 2$ R. Eben so wird dieses von $BAC + ACB$ und von $CAB + ABC$, bewiesen.



Der 18. Satz.

In jedem Triangel, ABC, liegt der grössern Seite, AC, auch der grössere Winkel, ABC, gegenüber.

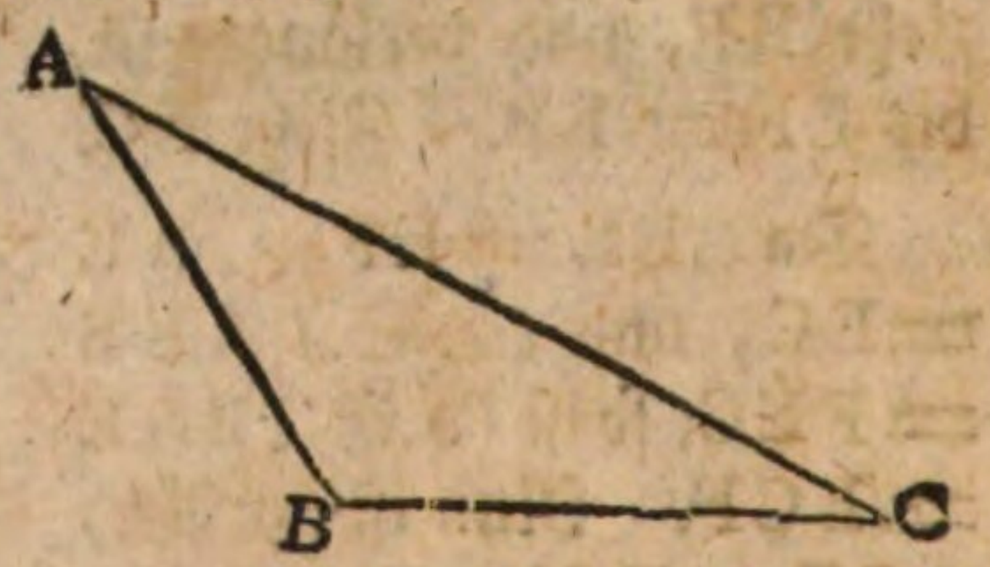
Da $AC > AB$, so mache (3. S.) $AD = AB$ und ziehe BD, so ist (5. S.) $ADB = ABD$. Nun ist (16. S.) $ADB > ACB$. Folglich ist auch ABD und also noch mehr $ABC > ACB$.



Der 19. Satz.

In jedem Triangel, ABC, liegt dem grössern Winkel, ABC, auch die grössere Seite, AC, gegenüber.

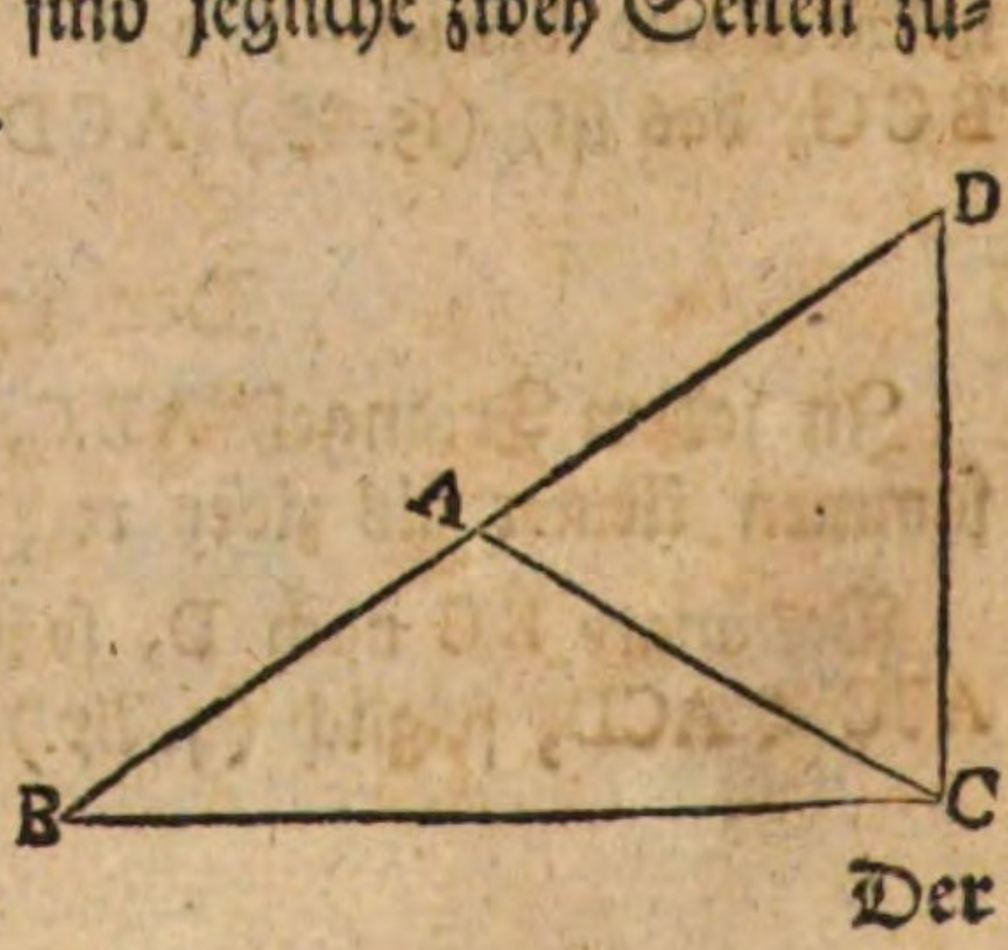
Wäre nicht $AC > AB$, so müste man annehmen entweder $AC = AB$ oder $AC < AB$. Im ersten Fall wär (5. S.) $ABC = ACB$, im zweiten, (18. S.) $ABC < ACB$, welches beydes dem angenommenen, $ABC > ACB$, offenbar wiederspricht.



Der 20. Satz.

In iedem Triangel, ABC, sind jegliche zwey Seiten zusammen grösser als die dritte.

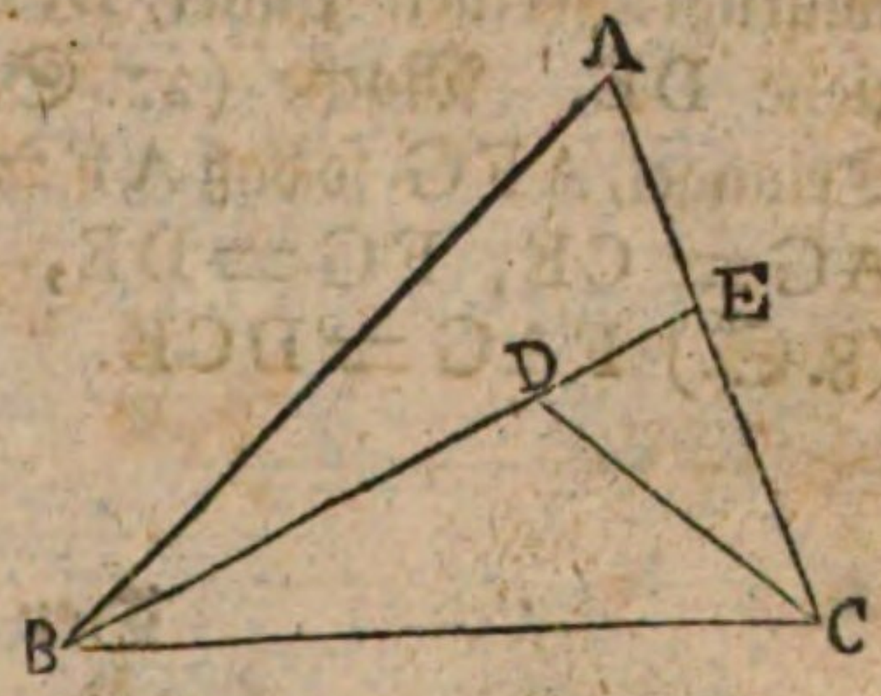
Verlängre BA nach D, mache $AD = AC$ und ziehe DC. Da $AD = AC$, so ist (5. S.) $ACD = ADC$, folglich $BCD > ADC$, folglich (19. S.) BD, das ist $BA + AC > BC$. Eben so wird bewiesen, daß $AB + BC > AC$ und daß $BC + CA > AB$.



Der

Der 21. Satz.

Wenn in einem Triangel, ABC, auf einer seiner Seiten, BC, in ihren Endpunkten, B, C, zwey gerade Linien BD, CD, aufgestellet werden, welche innerhalb zusammentreffen: so sind solche kleiner als die beyden übrigen Seiten des Triangels, AB, AC, schliessen aber einen grössern Winkel, BDC, ein.

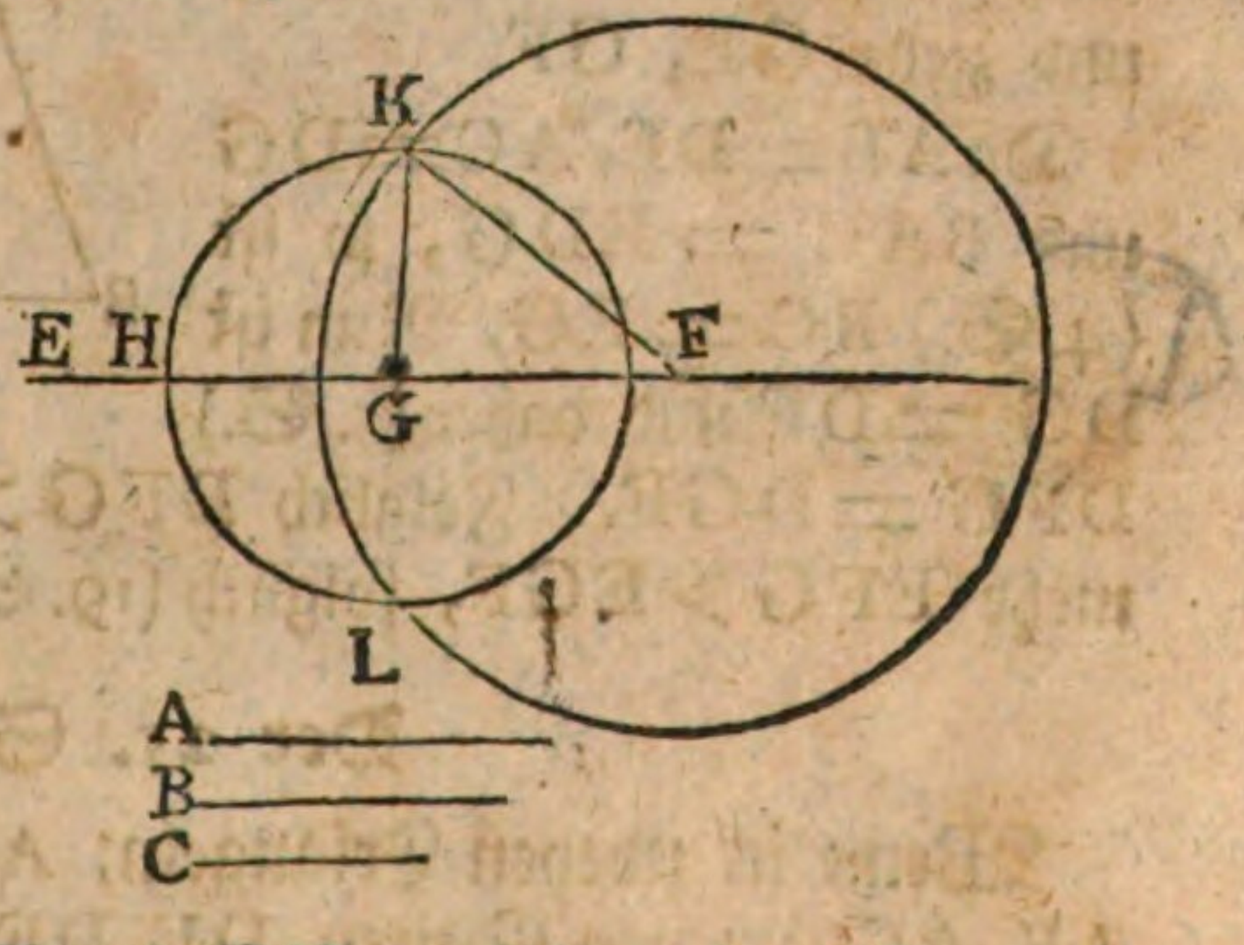


Verlängre BD bis E, so ist im △ ABE (20. S.) BA + AE > BE, folglich, wenn EC hinzukommt, BA + AC > BE + EC. Nun ist im △ CDE (20. S.) CE + ED > CD, und daher, wenn DB hinzukommt, CE + EB > CD + DB. Folglich ist noch vielmehr BA + AC > CD + DB.

Da (16. S.) BDC > BEC und BEC > BAC, so ist noch vielmehr BDC > BAC.

Der 22. Satz.

Aus dreyen geraden Linien, welche dreyen andern gegebnen, A, B, C, gleich, so daß jegliche zwey zusammen grösser als die dritte sind, einen Triangel zu machen.



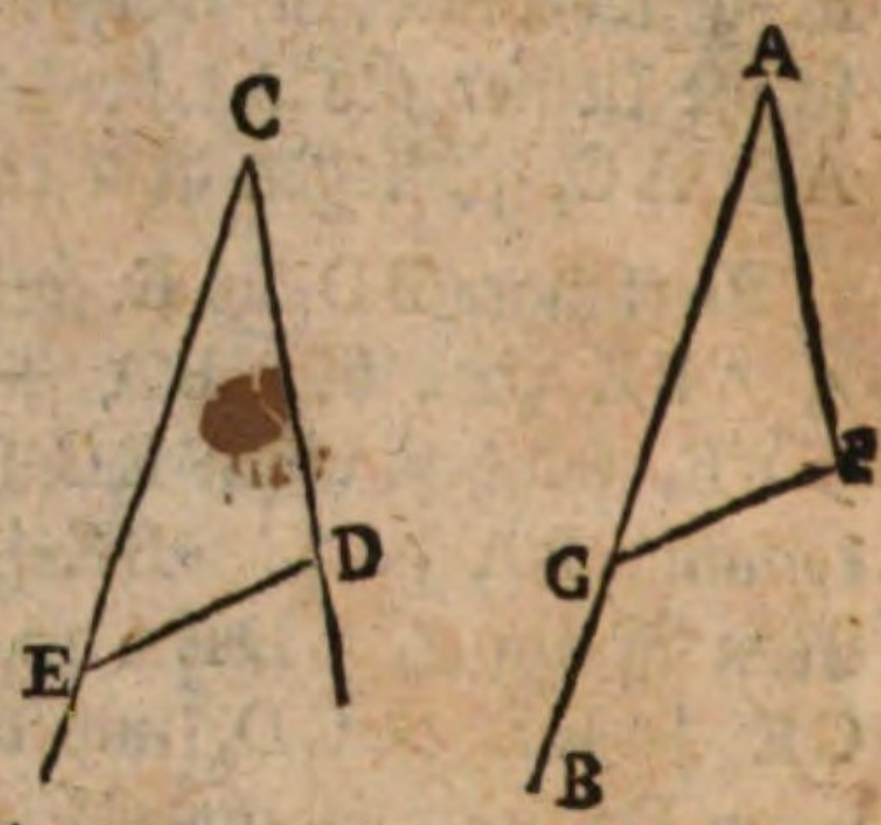
Ziehe eine gerade Linie, DE, welche in D begrenzt, nach E zu aber unbegrenzt sey. Mache DF = A, FG = B, GH = C. Aus F beschreibe mit FD den Cirkel DKL, und aus G mit GH den Cirkel KLH. Ziehe KF, KG, so ist △ KFG der verlangte.

Da (15. Def.) FD = FK und GH = GK, aber FD = A und GH = C, so ist (1. Ax.) FK = A und KG = C. Nun war auch FG = B. Demnach sind die Seiten des △ KFG den gegebnen Linien A, B, C, gleich.

Der

Der 23. Satz.

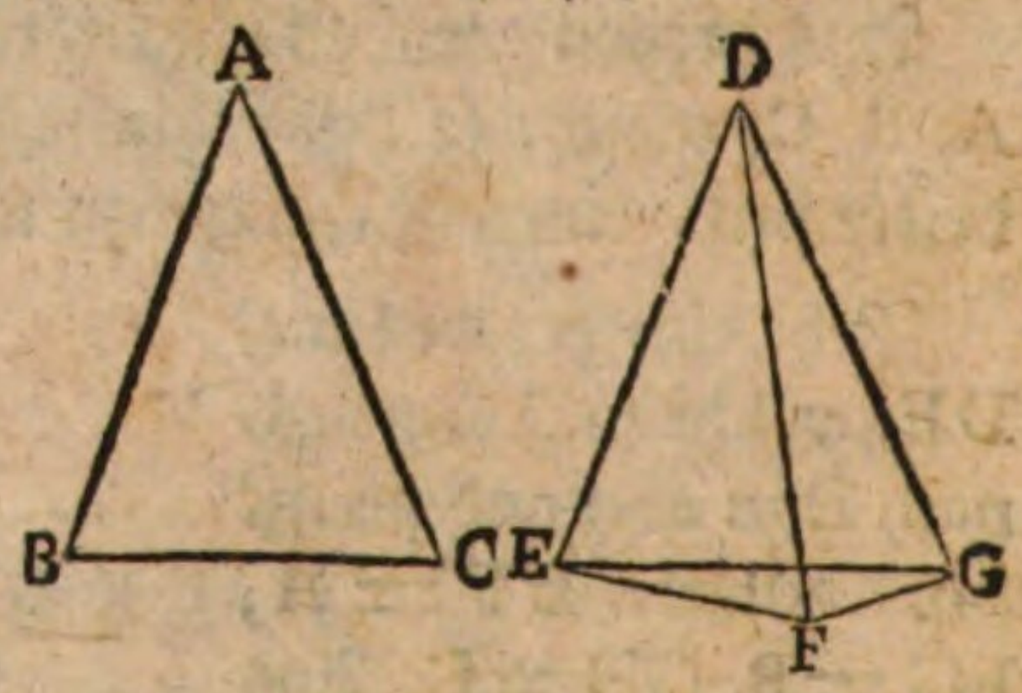
Auf eine gegebne gerade Linie, AB, an einen auf ihr gegebnen Punkt, A, einen dem gegebenen, DCE, gleichen geradlinichen Winkel zu setzen.



Auf CD sowohl als CE nimm willkührlich einen Punkt, D, E, und ziehe DE. Mache (22. S.) den Triangel, AFG, so daß AF = CD, AG = CE, FG = DE, so ist (8. S.) FAG = DCE.

Der 24. Satz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, gleich sind, (die eine AB, nämlich der einen DE, die andre AC, der andern DF); ein Winkel, BAC, aber grösser ist als ein Winkel, EDF, der nämlich welchen die gleichen Seiten einschliessen: so ist auch die dritte Seite, BC, grösser als die dritte, EF.



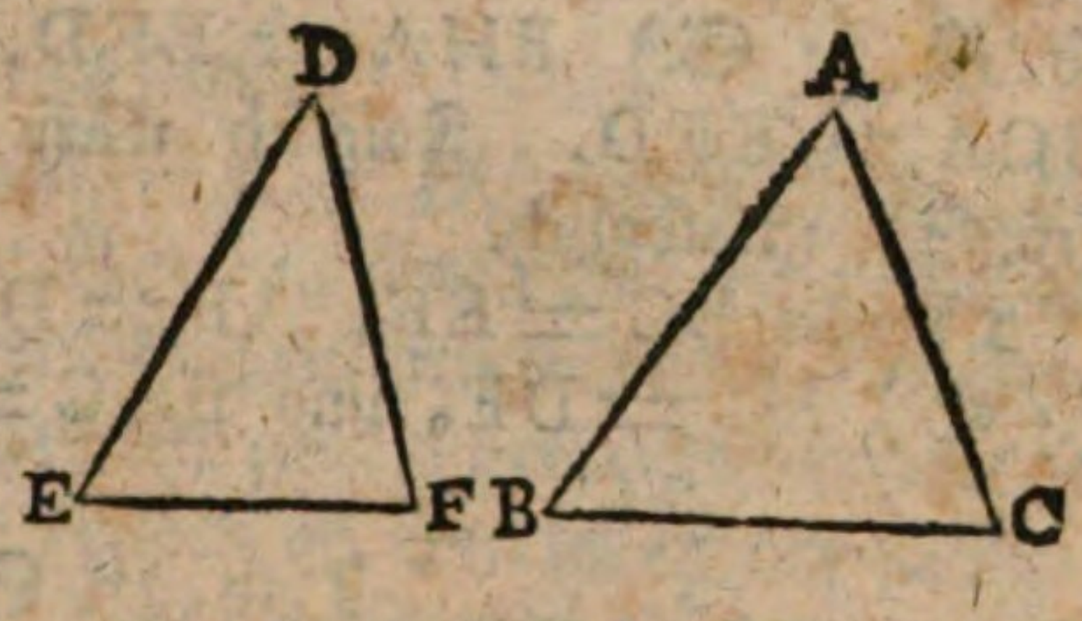
Da BAC > EDF, so mache (23. S.) EDG = BAC, auch DG = AC = DF, und ziehe GE, GF.

Da AB = DE, AC = DG und BAC = EDG, so ist (4. S.) BC = EG. Nun ist DG = DF und daher (5. S.) DFG = DGF. Folglich DFG > EGF, folglich noch vielmehr EFG > EGF, folglich (19. S.) EG, das ist BC > EF.

Der 25. Satz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten, AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, gleich sind, (die eine AB nämlich der einen DE, und die andre AC, der andern, DF); die dritte Seite, BC, aber grösser ist als die dritte, EF: so ist auch ein Winkel, BAC, grösser als ein Winkel, EDF, der nämlich, den die gleichen Seiten einschliessen.

Wäre

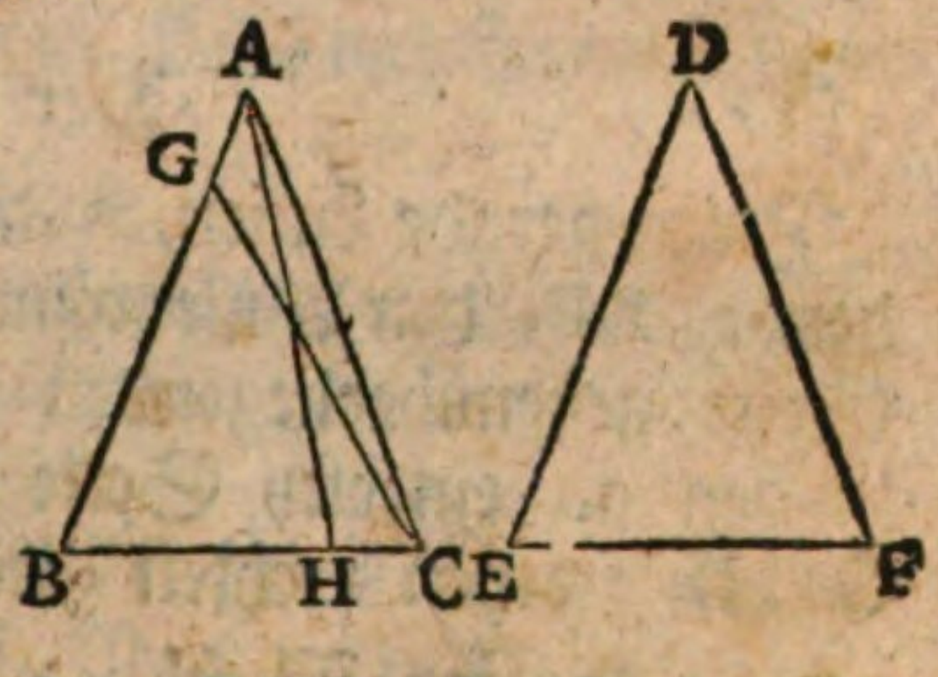


Wäre nicht BAC > EDF, so wäre entweder BAC = EDF, oder BAC < EDF, folglich im ersten Fall (4. S.) BC = EF; im zweyten (24. S.) BC < EF, welches beydes dem angenommnen, BC > EF, wiederspricht.

Der 26. Satz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, zwey Winkel, ABC, BCA, zweyen Winkeln, DEF, EFD, gleich sind, (der eine, ABC, nämlich dem einen, DEF, und der andre BCA, dem andern EFD,) und eine Seite einer Seite gleich ist; sie mag nun an den gleichen Winkeln, oder einem derselben gegenüberliegen: so sind auch die beyden übrigen Seiten den beyden übrigen, auch der dritte Winkel BAC, dem dritten EDF, gleich.

Erster Fall.



Wenn die an den gleichen Winkeln liegenden Seiten, BC, EF, einander gleich sind: so ist

1.) AB = DE. Denn wären AB, DE, nicht gleich, so müste eine davon, etwa AB, grösser seyn. Es sey daher BG = ED. Ziehe GC Da BG = ED, BC = EF, GBC = DEF, so ist (4. S.) BCG = EFD. Nun war angenommen BCA = EFD. Folglich wäre BCA = BCG, welches (9. Ax.) unmöglich.

2.) Da AB = DE, BC = EF, ABC = DEF, so ist (4. S.) AC = DF, und BAC = EDF.

Zweyter Fall.

Wenn die, einem der gleichen Winkel gegenüberliegenden, Seiten, AB, DE, einander gleich sind: so ist

1.) BC = EF. Denn wären BC, EF, nicht gleich, so müsse eine davon, etwa BC, grösser seyn. Es sey daher BH = EF. Ziehe AH. Da BH = EF, AB = DE, ABC = DEF,

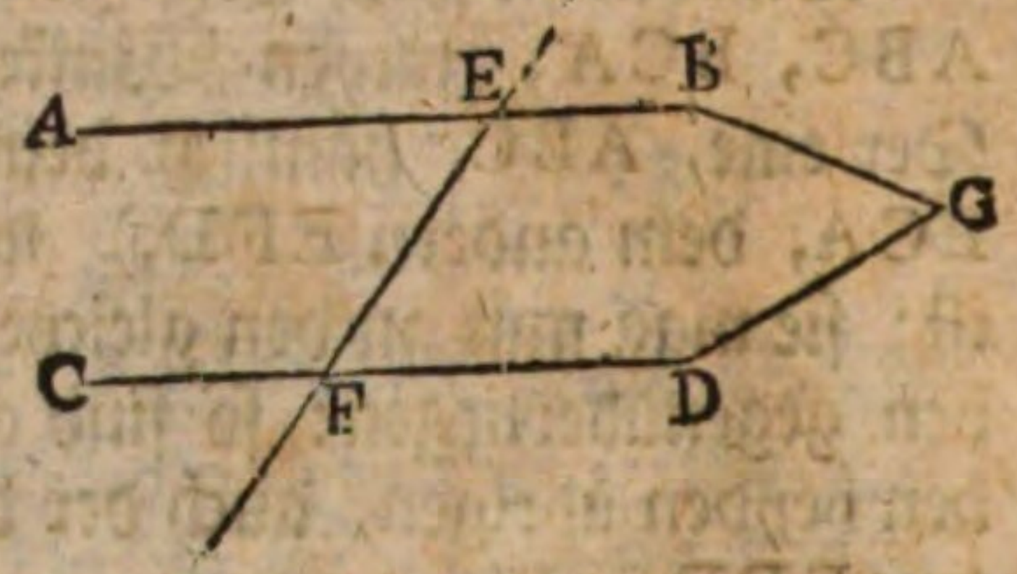
so

so ist (4. S.) BHA = EFD. Nun war angenommen BCA = EFD. Folglich wäre BHA = BCA, welches (16. S.) unmöglich.

2.) Da BC = EF, AB = DE, ABC = DEF, so ist (4. S.) AC = DF, und BAC = EDF.

Der 27. Satz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, mit denen eine dritte schneidende, EF, gleiche Wechselwinkel, AEF, EFD, macht, sind parallel.

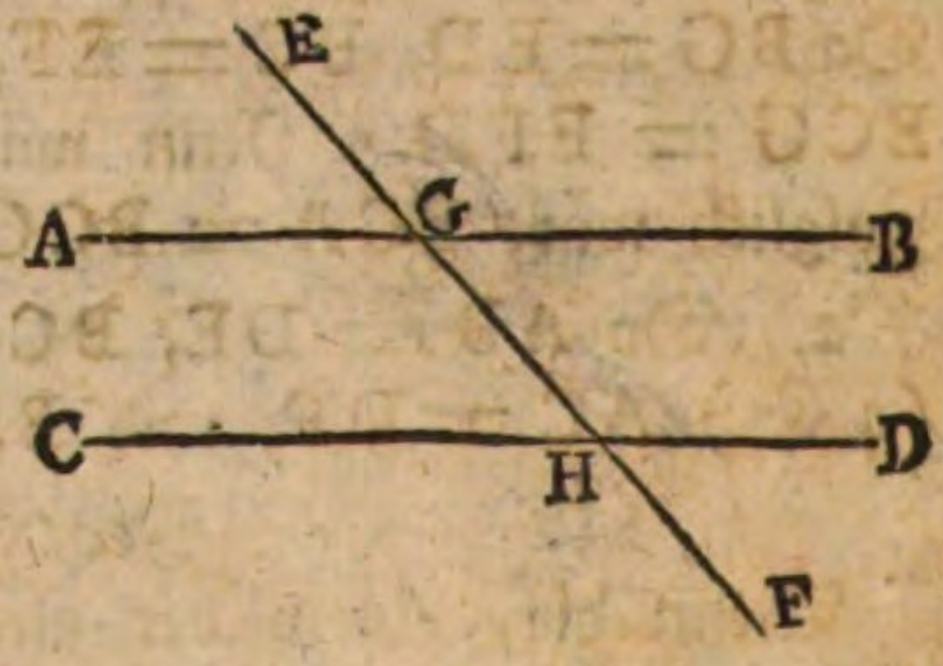


Wären AB, CD, nicht parallel, so würden sie genugsam verlängert an irgend einer Seite zusammentreffen. Gesetzt es geschähe dies in G. Folglich wär im △ EFG (16. S.) AEF > EFD, welches dem angenommnen AEF = EFD wiederspricht.

Der 28. Satz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, mit denen eine dritte schneidende, EF, den Aussenwinkel, EGB, dem ihm an derselben Seite gegenüberliegenden innern Winkel GHD, oder die beyden an einerley Seite liegenden innern Winkel, BGH, GHD, zweyen rechten gleich macht, sind parallel.

Erster Theil.



Da EGB = GHD und (15. S.) EGB = AGH, so ist (1. Ax.) AGH = GHD, folglich (27. S.) AB, CD, parallel.

Zweyter Theil.

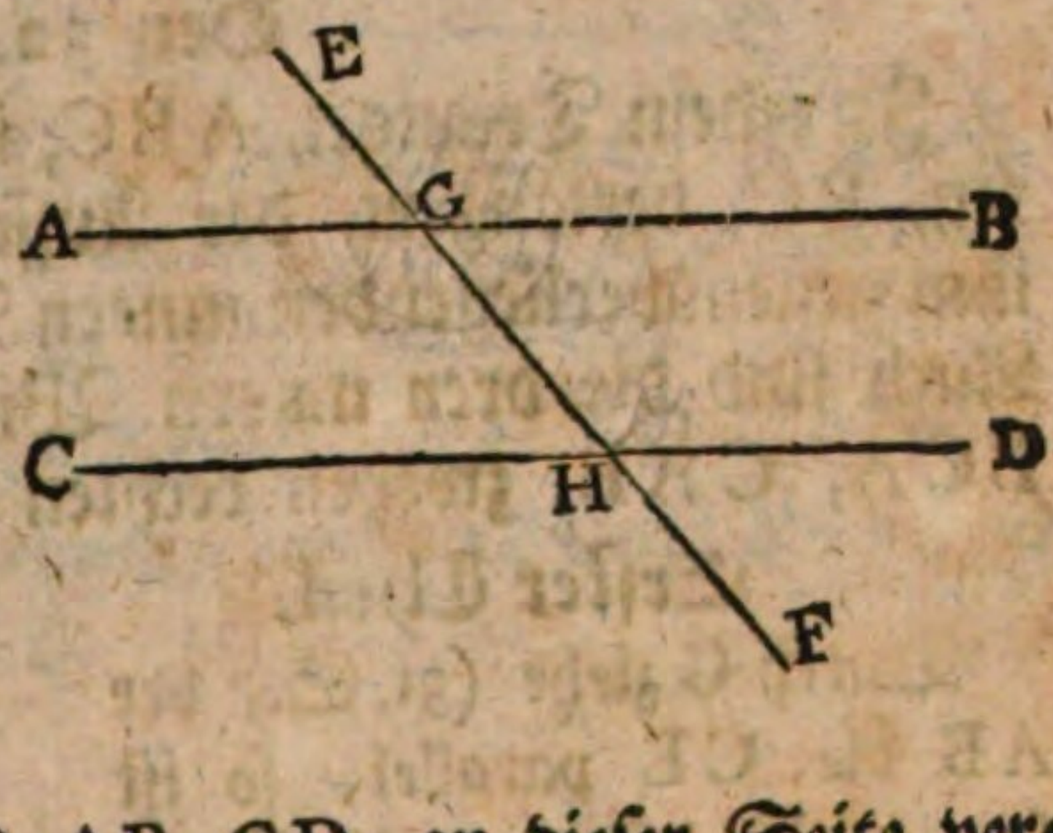
Da BGH + GHD = 2 R.
und (13. S.) AGH + BGH = 2 R., so ist (1. Ax.) BGH + GHD = AGH + BGH, folglich, wenn man BGH wegnimmt, (3. Ax.) AGH = GHD, folglich (27. S.) AB, CD, parallel.

Der

Der 29. Satz.

Wenn zwey gerade Linien, AB, CD, parallel sind: so macht eine dritte schneidende, EF, mit ihnen die Wechselwinkel, AGH, GHD, einander; desgleichen den Aussenwinkel, EGB, dem ihm an derselben Seite gegenüberliegenden innern Winkel, GHD; ferner die beyden an einerley Seite liegenden innern Winkel, BGH, GHD, zweyen rechten, gleich.

Erster Theil.



Wären AGH, GHD, nicht gleich, so müste einer davon, etwa AGH, grösser seyn, folglich, wenn BGH hinzukommt, ist (4. Ax.) AGH + BGH > GHD + BGH. Nun ist (13. S.) AGH + BGH = 2 R. Folglich GHD + BGH < 2 R, folglich müsten (11. Ax.) AB, CD, an dieser Seite verlängert zusammentreffen und wären (35. Def.) nicht parallel, gegen das Angenommene.

Zweyter Theil.

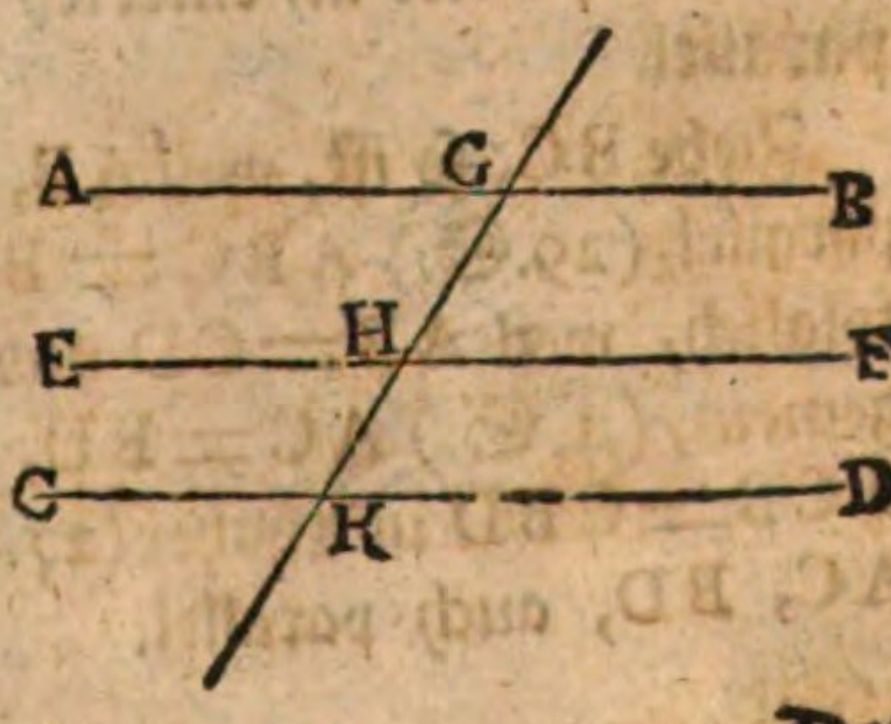
Da AGH = GHD und (15. S.) AGH = EGB, so ist (1. Ax.) EGB = GHD.

Dritter Theil.

Da EGB = GHD, so ist, wenn BGH hinzukommt, (2. Ax.) EGB + BGH = GHD + BGH. Nun ist (13. S.) EGB + BGH = 2 R. Folglich ist (1. Ax.) GHD + BGH = 2 R.

Der 30. Satz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, welche Einer dritten, EF, parallel, sind einander selbst parallel.

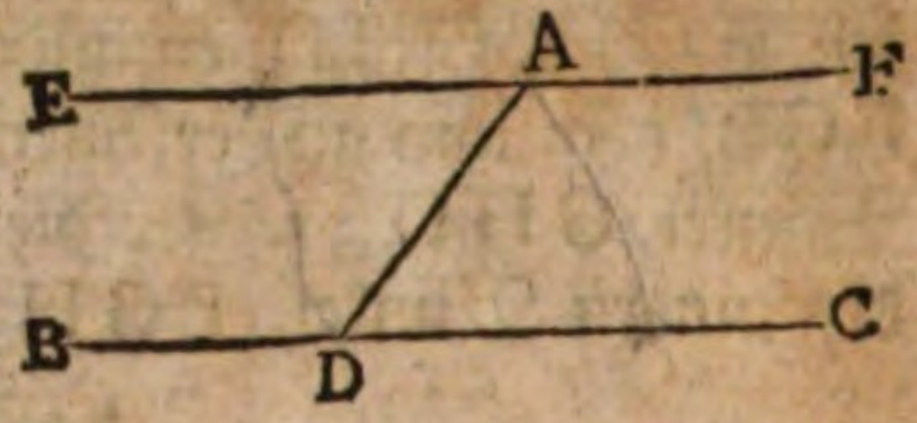


Es schneide sie die gerade Linie, GK. Da AB, EF, parallel, so ist (29. S.) AGH = GHF. Nun ist, weil EF, CD, parallel, (29. S.) GHF = GKD. Folglich ist (1. Ax.) AGH = GKD, folglich (27. S.) AB, CD, parallel.

Der 31. Satz.

Durch einen gegebnen Punkt, A, eine gerade Linie einer gegebnen, BC, parallel zu ziehen.

Auf BC nimm willkührlich einen Punkt D, ziehe DA, mache (23. S.) DAE = ADC, und verlängre EA nach F, so ist (27. S.) EF der BC parallel.

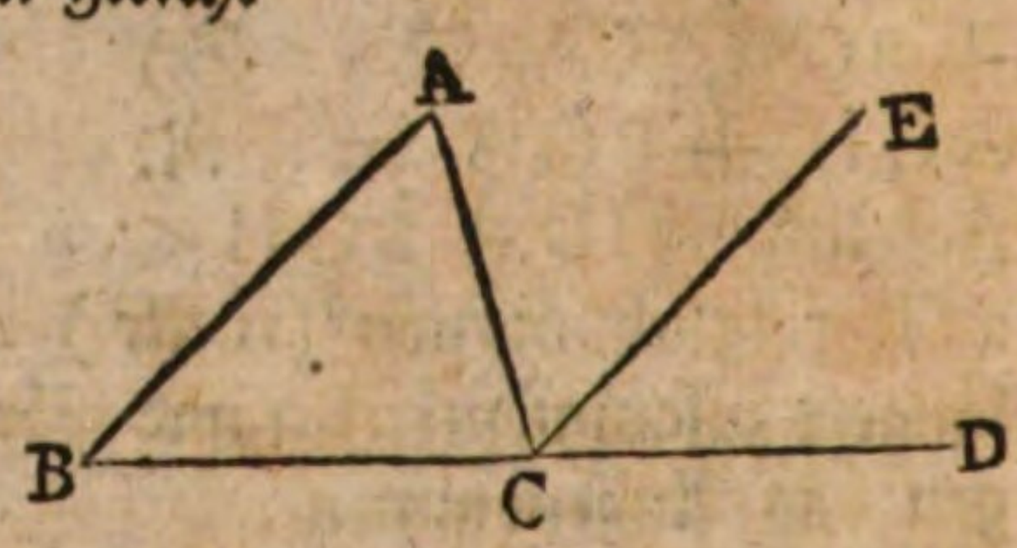


Der 32. Satz.

In jedem Triangel, ABC, ist, wenn man eine seiner Seiten, BC, verlängert, der Aussenwinkel, ACD, den beyden ihm gegenüberliegenden innern Winkeln, CAB, ABC, gleich. Auch sind die drey innern Winkel eines Triangels, ABC, BCA, CAB, zweyen rechten gleich.

Erster Theil.

Durch C ziehe (31. S.) der AB die CE parallel, so ist (29 S.) BAC = ACE, (wenn AC die schneidende Linie) und ABC = ECD, (wenn BD die schneidende Linie) folglich ist (2. Ax.) BAC + ABC = ACD.



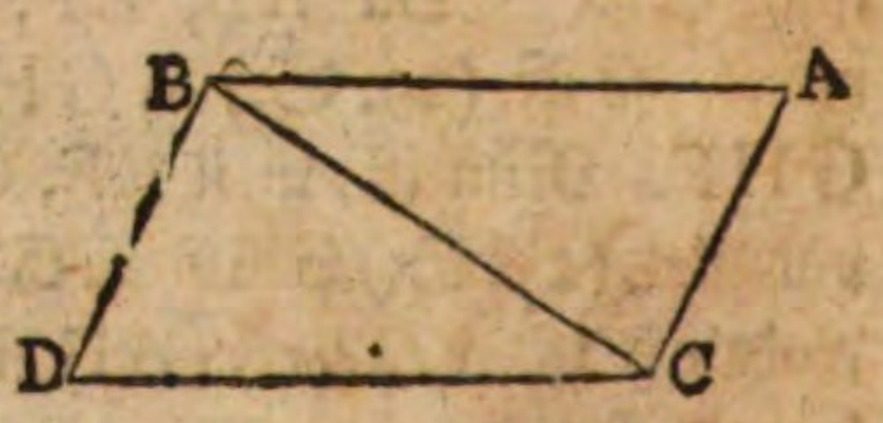
Zweyter Theil.

Da BAC + ABC = ACD, so ist, wenn ACB hinzukommt (2. Ax.) BAC + ABC + ACB = ACD + ACB. Nun ist (13. S.) ACD + ACB = 2 R. Folglich (1. Ax.) auch BAC + ABC + ACB = 2 R.

Der 33. Satz.

Wenn zwey gerade Linien, AB, CD, gleich und parallel sind: so sind die geraden Linien, AC, BD, durch welche man ihre Endpunkte an einerley Seite verbindet, auch gleich und parallel.

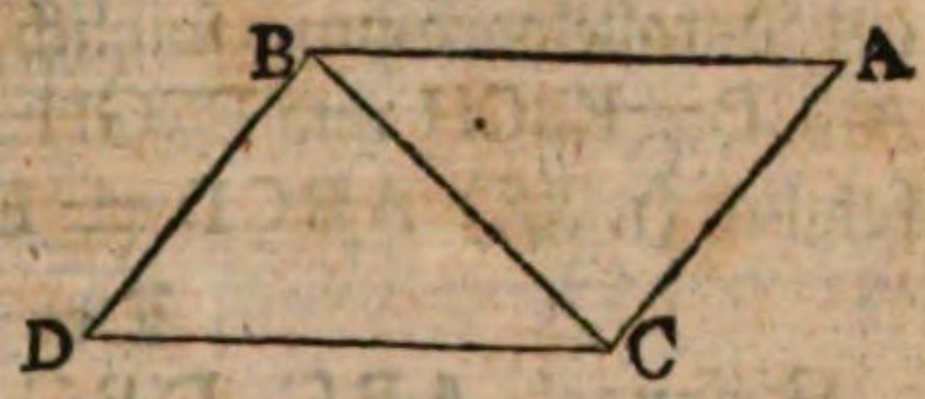
Ziehe BC, so ist, weil AB, CD, parallel, (29. S.) ABC = BCD, folglich, weil AB = CD und BC gemein, (4. S.) AC = BD, auch ACB = CBD und daher (27. S.) AC, BD, auch parallel.



Der

Der 34. Satz.

In jedem Parallelogramm, ACDB, sind die Gegenseiten und Gegenwinkel einander gleich. Auch wird dasselbe von der Diagonale, BC, halbirt.



Erster Theil.

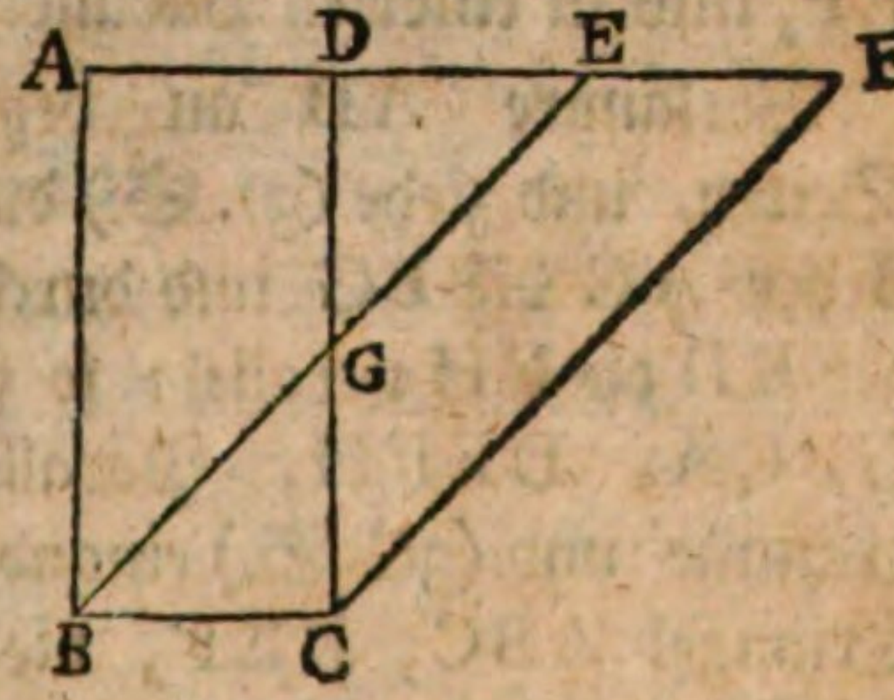
Da AB, CD, und so auch AC, BD, parallel, so ist (29. S.) ABC = BCD und ACB = CBD. Nun ist BC gemein. Folglich (26. S.) AB = CD, AC = BD, BAC = BDC. Auch ist, weil ABC = BCD und CBD = ACB, (2. Ax.) ABC + CBD = BCD + ACB, das ist, ABD = ACD.

Zweyter Theil.

Da AB = CD, und BC gemein, auch ABC = BCD, so ist (4. S.) △ABC = △CBD.

Der 35. Satz.

Parallelogramme, ABCD, EBCF, auf einerley Grundlinie, BC, und in einerley Parallelen, AF, BC, sind einander gleich.

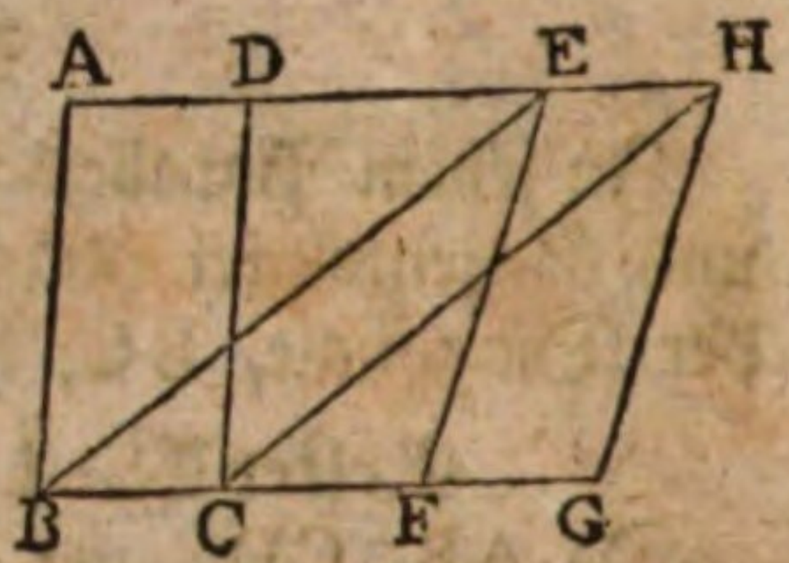


Da (34. S.) BC = AD und BC = EF, so ist (1. Ax.) AD = EF, folglich, wenn DE hinzukommt (2. Ax.) AE = DF. Nun ist auch (34. S.) AB = DC und (29. S.) FAB = FDC. Folglich ist (4. S.) △ABE = △CDF, folglich, wenn △EDG hinweggkommt, (3. Ax.) das Trapezium ABGD = EGCF, folglich, wenn △GBC hinzukommt, (2. Ax.) das Parallelogramm ABCD = EBCF.

Der 36. Satz.

Parallelogramme, ABCD, EFGH, auf gleichen Grundlinien, BC, FG, und in einerley Parallelen, AH, BG, sind einander gleich.

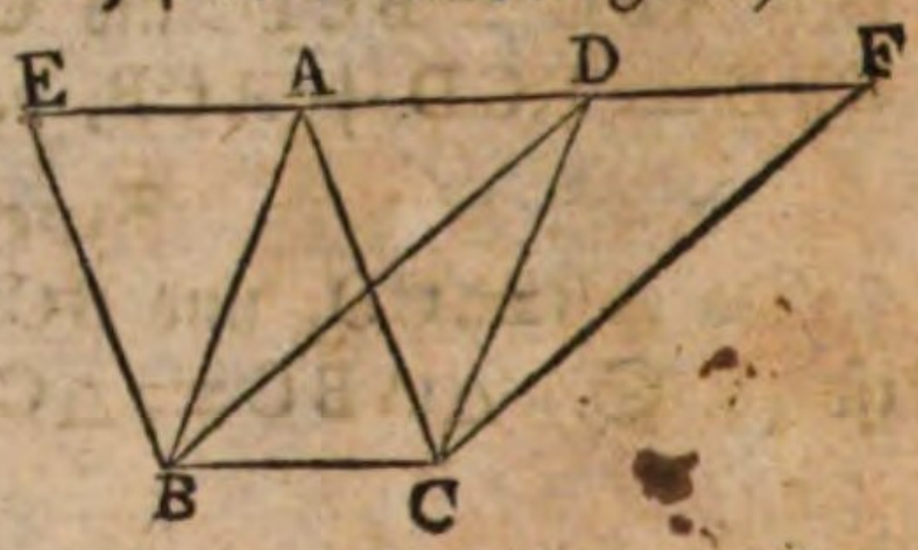
Ziehe BE, CH. Da BC = FG und (34. S.) FG = EH, so ist (1. Ax.) BC = EH. Nun sind BC, EH, auch parallel, folglich sind (33. S.) EB, CH, gleich und parallel. Folglich ist EBCH ein Parallelogramm, folglich (35. S.) ABCD = EBCH und EFGH = EBCH, folglich (1. Ax.) ABCD = EFGH.



Der 37. Satz.

Triangel, ABC, DBC, auf einerley Grundlinie, BC, und in einerley Parallelen, AD, BC, sind einander gleich.

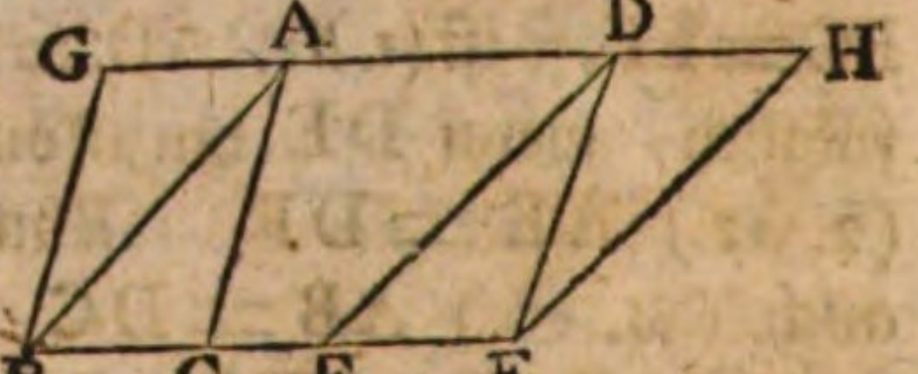
Verlängre AD an beyden Seiten und ziehe (31. S.) durch B der AC die BE und durch C der BD die CF parallel: so sind EBCA, DBCF, Parallelogramme und (35. S.) einander gleich. Nun sind (34. S.) die Triangel ABC, DBC, die Hälften dieser Parallelogramme, folglich (7. Ax.) auch einander gleich.



Der 38. Satz.

Triangel, ABC, DEF, auf gleichen Grundlinien, BC, EF, und in einerley Parallelen, AD, BF, sind einander gleich.

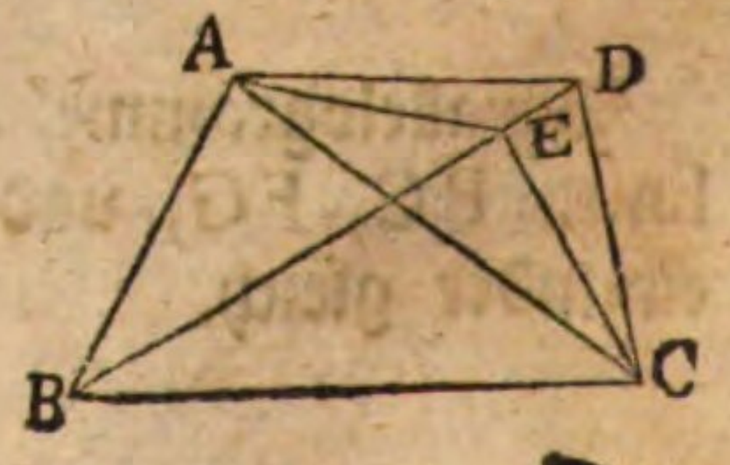
Verlängre AD an beyden Seiten, und ziehe (31. S.) durch B der AC die BG und durch F der ED die FH parallel: so sind GBCA, DEFH, Parallelogramme und (36. S.) einander gleich. Nun sind (34. S.) die Triangel ABC, DEF, die Hälften dieser Parallelogramme, folglich (7. Ax.) auch einander gleich.



Der 39. Satz.

Gleiche Triangel, ABC, DBC, auf einerley Grundlinie, BC, und an einerley Seite, sind in einerley Parallelen, AD, BC.

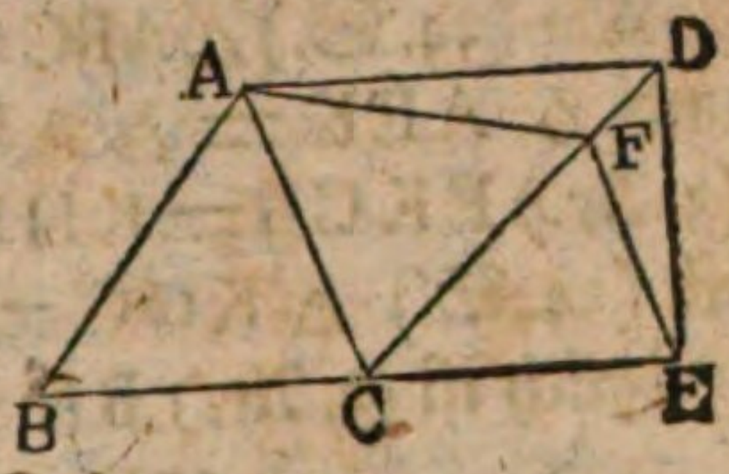
Wäre der BC die AD nicht parallel, so sey es jede andre, etwa AE. Ziehe EC, so ist (37. S.) △ABC = △EBC. Nun war angenommen △ABC = △DBC. Folglich wäre (1. Ax.) △DBC = △EBC, welches (9. Ax.) unmöglich.



Der

Der 40. Satz.

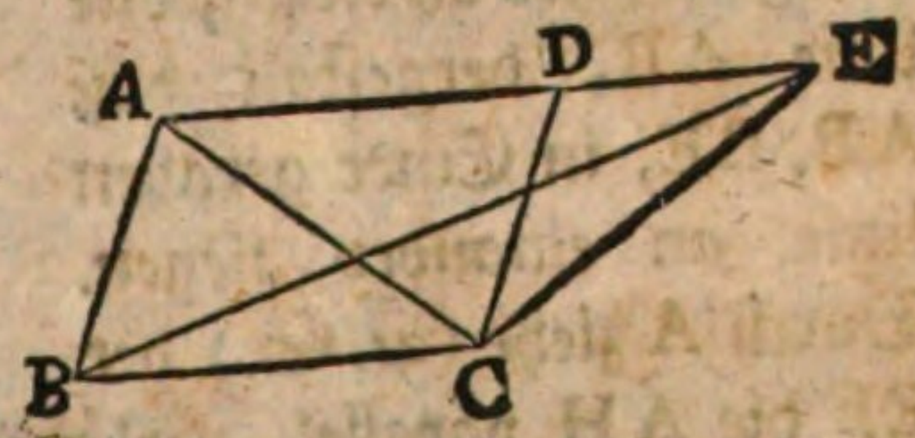
Gleiche Triangel, ABC, DCE, auf gleichen Grundlinien, BC, CE, und an einerley Seite, sind in einerley Parallelen, AD, BE.



Wäre der BE die AD nicht parallel, so sey es jede andre, etwa AF. Ziehe FE, so ist (38. S.) △ ABC = △ FCE. Nun ist angenommen △ ABC = △ DCE. Folglich wäre (1. Ax.) △ DCE = △ FCE, welches (9. Ax.) unmöglich.

Der 41. Satz.

Wenn ein Parallelogramm, ABCD, und ein Triangel, EBC, auf einerley Grundlinie, BC, und in einerley Parallelen, BC, AE, sind: so ist das Parallelogramm doppelt so groß als der Triangel.



Ziehe AC, so ist (37. S.) △ ABC = △ EBC. Nun ist (34. S.) ABCD = 2 △ ABC. Folglich ist auch ABCD = 2 △ EBC.

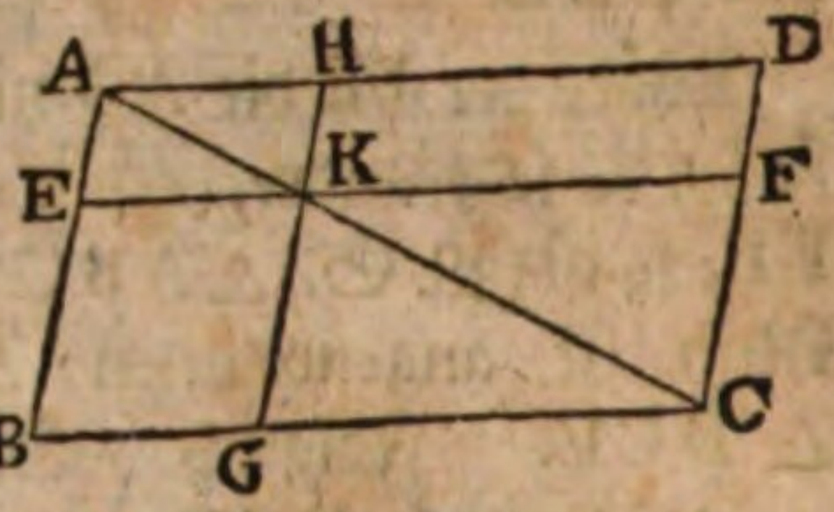
Der 42. Satz.

Es ist ein Triangel, ABC, gegeben; man soll demselben ein Parallelogramm unter einem gegebnen geradlinichen Winkel, D, gleich machen.

Halbire (10. S.) BC in E, und ziehe AE. An CE setze (23. S.) CEF = D. Ziehe (31. S.) durch A der BC die AG, und durch C der EF die CG parallel, so ist FECG ein Parallelogramm unter dem Winkel CEF = D, und (41. S.) FECG = 2 △ AEC. Nun ist auch (38. S.) △ ABE = △ AEC und daher △ ABC = 2 △ AEC. Folglich ist (6. Ax.) FECG = △ ABC

Der 43. Satz.

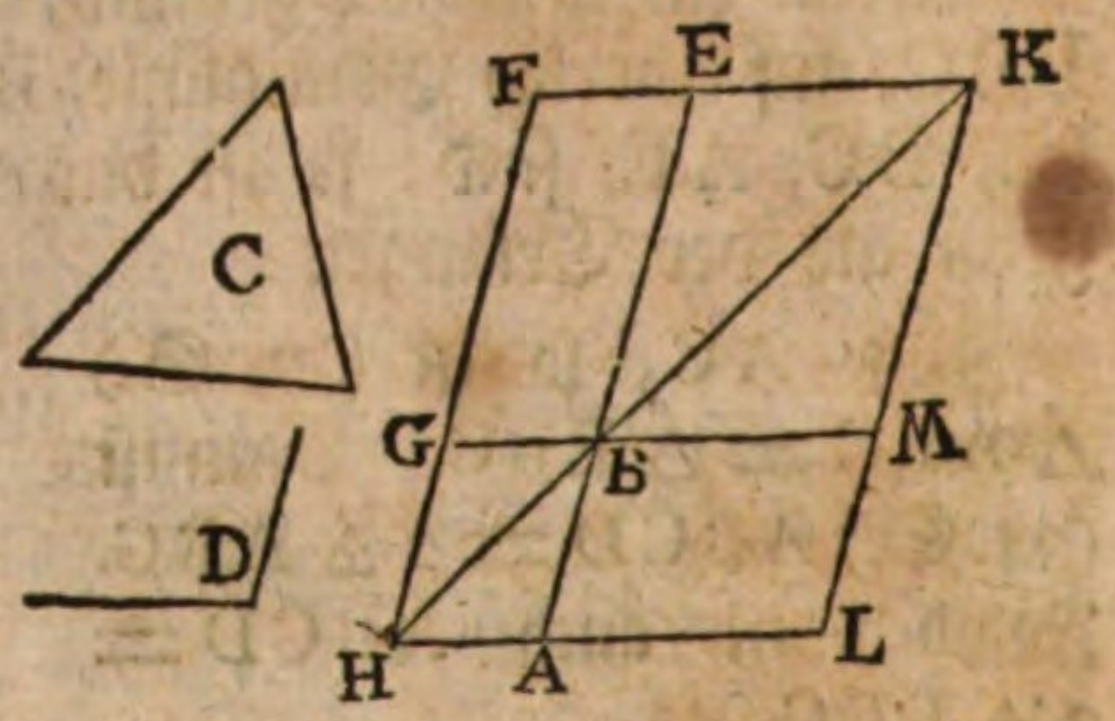
In jedem Parallelogramm, ABCD, haben die um die Diagonale, AC, herumliegenden Parallelogramme, EH, FG, gleiche Ergänzungen, BK, KD.



Da (34. S.) △ ABC = △ CAD, und △ AEK = △ AHK, so ist (3. Ax.) EKCB = KHDC. Nun ist (34. S.) △ KGC = △ KCF. Folglich ist (3. Ax.) BK = KD.

Der 44. Satz.

Auf einer gegebnen geraden Linie, AB, ein Parallelogramm, einem gegebnen Triangel, C, gleich, unter einem gegebnen geradlinichen Winkel, D, zu beschreiben.



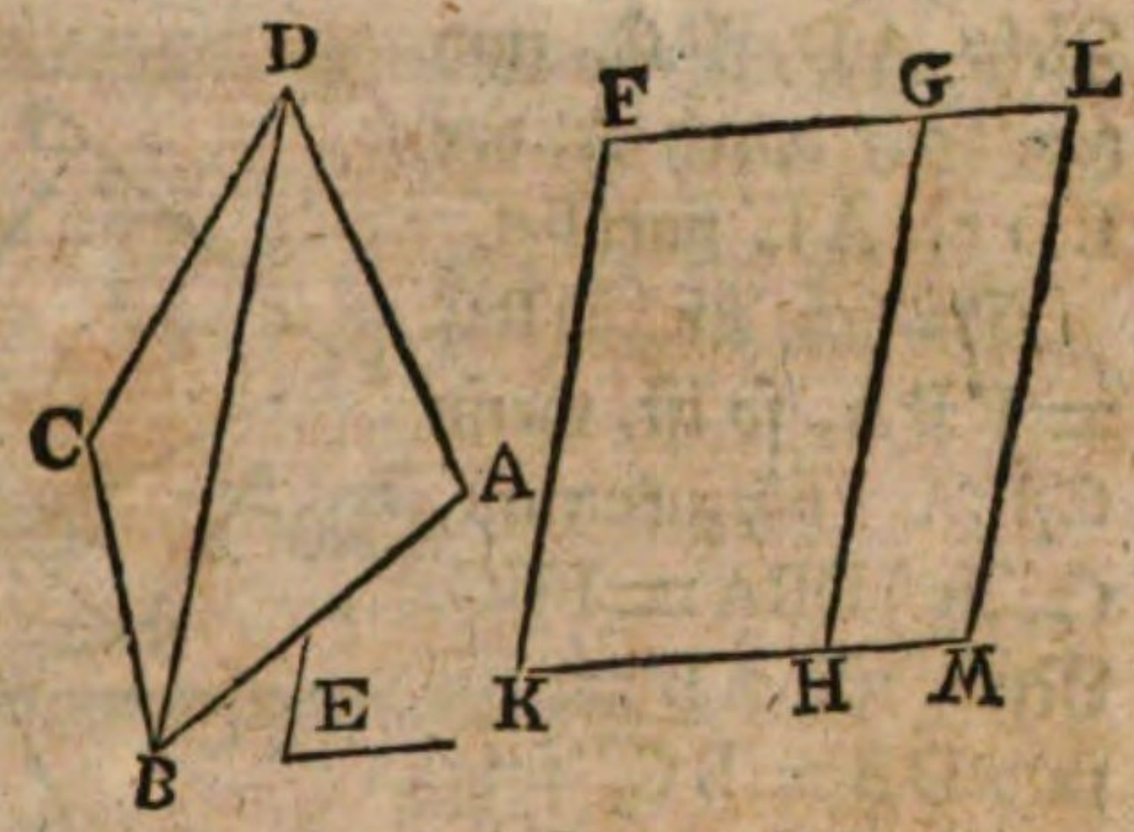
Mache (42. S.) ein Parallelogramm BEFG = △ C, so daß EBG = D, und bringe solches an die gegebne Linie AB, dergestalt daß AB, BE, in Einer geraden Linie an einander liegen. Durch A ziehe (31. S.) der EF die AH parallel, verlängre FG bis H und ziehe HB: so ist (29. S.) AHF + EFH = 2 R., folglich BHF + EFH < 2 R., folglich werden (11. Ax.) HB, FE, an dieser Seite verlängert zusammentreffen. Dies geschehe in K. Ziehe (31. S.) durch K der FH die KL parallel, so ist HLKF ein Parallelogramm, dessen Diagonale HK, folglich, wenn man HA, GB, bis L, M, verlängert, (43. S.) LB = BF. Nun war BF = △ C. Folglich ist (1. Ax.) LB = △ C und (15. S.) ABM = GBE = D.

Der 45. Satz.

Es ist eine geradliniche Figur, ABCD, gegeben; man soll derselben ein Parallelogramm, unter einem gegebnen geradlinichen Winkel, E, gleich machen.

Ziehe DB. Mache (42. S.) das Parallelogramm FH = △ ABD, so daß FKH = E. Auf GH beschreibe (44. S.) das Parallelogramm GM = △ DBC, so daß GHM = E, folglich ist (1. Ax.) GHM = FKH, folglich, wenn GHK hinzukommt, (2. Ax.)

(2. Ax.) GHM + GHK = FKH + GHK = (29. S.) 2 R., folglich sind (14. S.) KH, HM, in Einer geraden Linie.



Da FG, KM, parallel, so ist (29. S.) FGH = GHM, folglich FGH + LGH = GHM + LGH = (29. S.) 2 R., folglich sind (14. S.) FG, GL, in Einer geraden Linie.

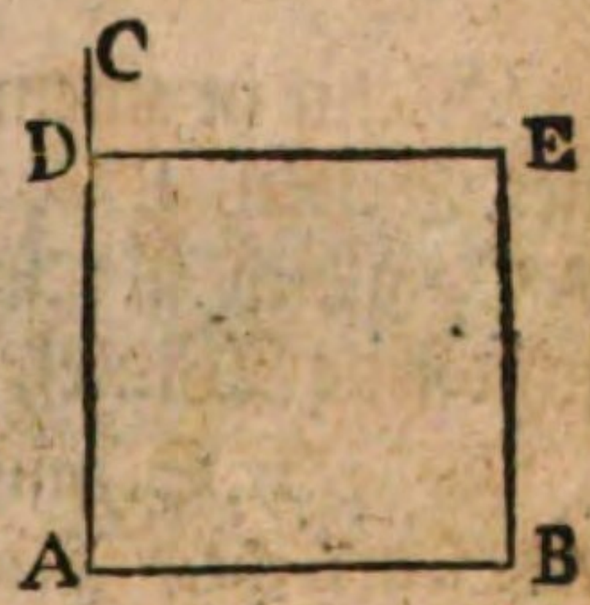
Da (34. S.) FK der GH und GH der LM, gleich und parallel, so ist (30. S.) FK der LM gleich und parallel, folglich sind (33. S.) FL, KM, auch gleich und parallel, folglich KFLM ein Parallelogramm, dessen Winkel FKM = E.

Da FH = △ ABD und GM = △ DBC, so ist (2. Ax.) KFLM = ABCD.

Der 46. Satz.

Auf einer gegebnen geraden Linie, AB, ihr Quadrat zu beschreiben.

Auf AB ziehe (11. S.) aus A die AC senkrecht. Mache AD = AB. Ziehe (31. S.) durch D der AB die DE, und durch B der AD die BE parallel, so ist ADEB ein Parallelogramm, folglich (34. S.) dessen Gegenseiten einander gleich. Nun ist AB = AD. Folglich das Parallelogramm ADEB gleichseitig.



Da AB, DE, parallel, so ist (29. S.) A + D = 2 R. Nun ist A, folglich auch D ein rechter Winkel. Nun sind (34. S.) die Gegenwinkel gleich. Folglich ist das Parallelogramm ADEB auch rechtwinklich, folglich (30. Def.) ein Quadrat.

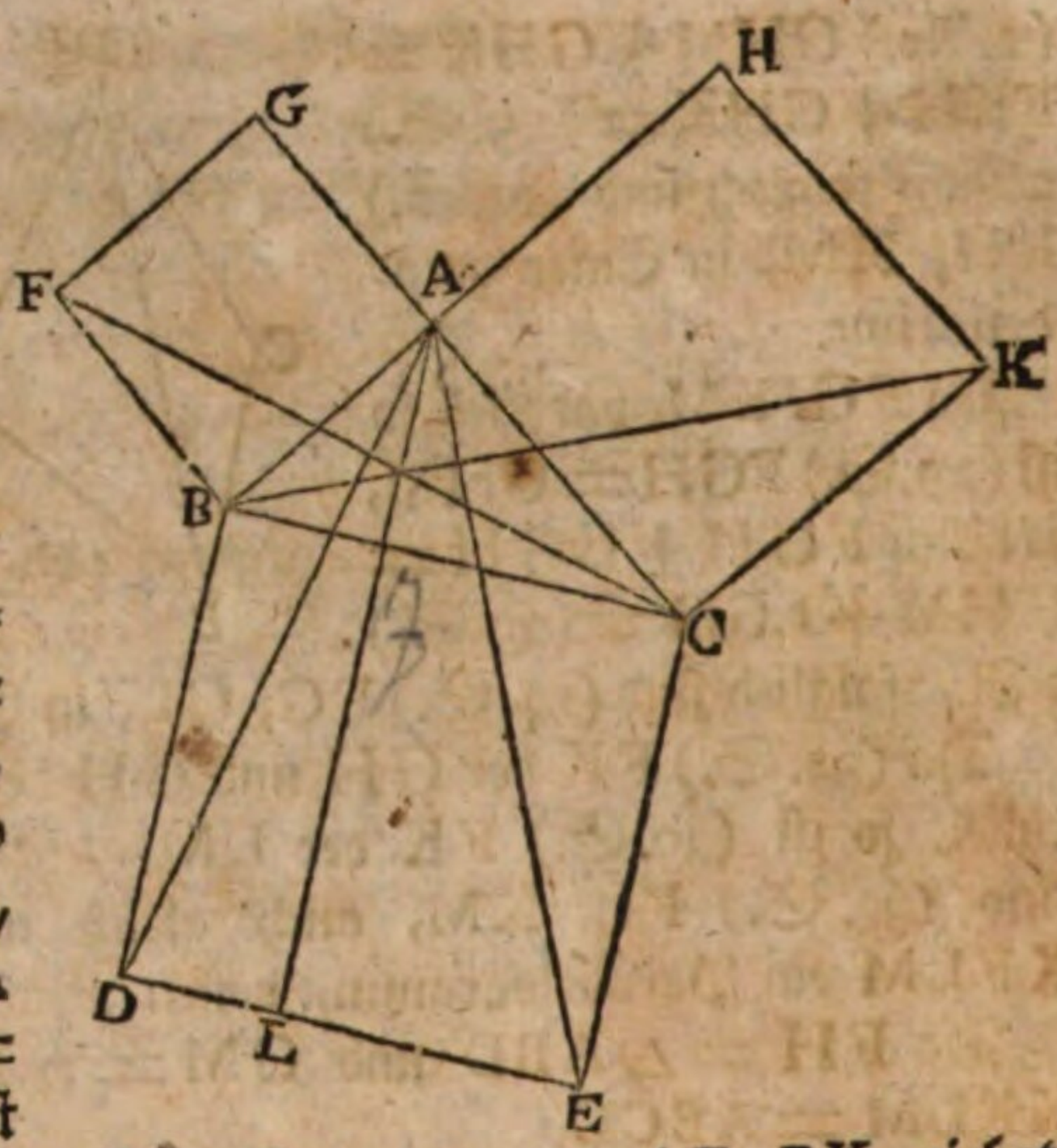
Der 47. Satz.

In jedem rechtwinklichen Triangel, ABC, ist das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, BC, den Quadraten der ihn einschliessenden Seiten, BA, AC, gleich.

Beschreibe (46. S.) auf BC ihr Quadrat BDEC, und auf BA, AC, ihre Quadrate, GB, HC, so sind BAC, BAG, rechte Winkel, folglich (14. S.) CA, AG, in Einer geraden Linie.

Ziehe AD, FC, und (31. S.) durch A, der BD die AL parallel.

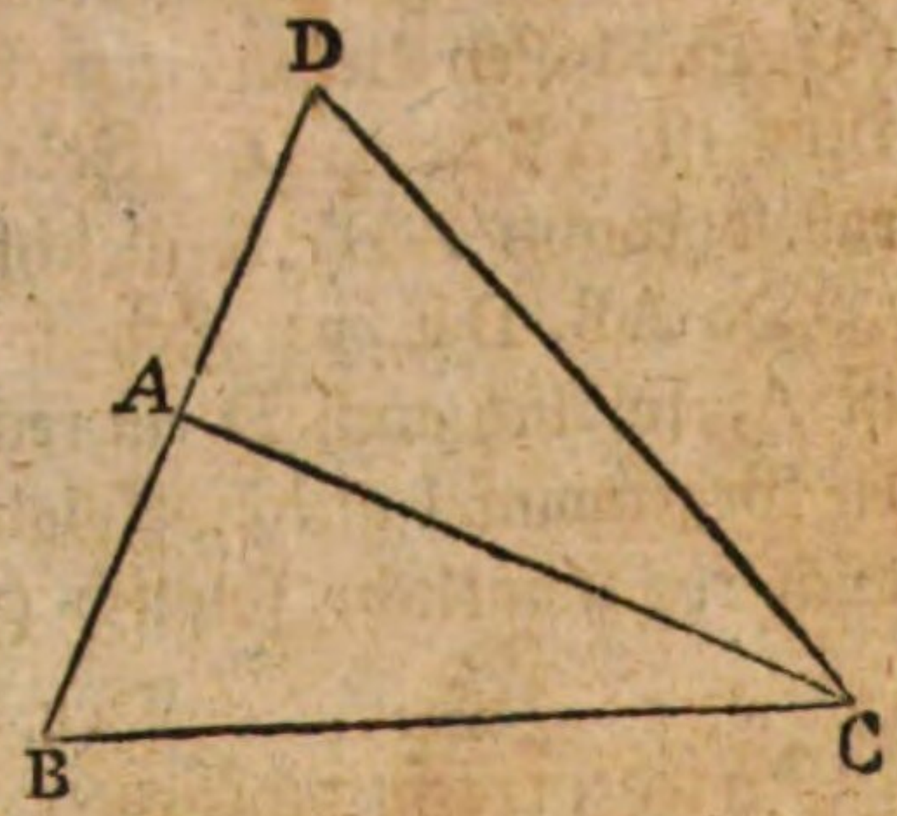
Da (10. Ax.) DBC = FBA, so ist, wenn CBA hinzukommt, (2. Ax.) DBA = FBC. Nun ist AB = BF und DB = BC, folglich (4. S.) △ ABD = △ FBC. Nun ist, weil AL der BD, und GC der FB parallel, (41. S.) BL = 2 △ ABD und GB = 2 △ FBC, folglich ist (6. Ax.) BL = GB. Nun ist, wenn man AE, BK, ziehet, aus eben dem Grunde, CL = CH. Folglich ist (2. Ax.) BDEC = GB + CH.



Der 48. Satz.

Wenn in einem Triangel, ABC, das Quadrat einer seiner Seiten, BC, den Quadraten der übrigen Seiten, BA, AC, gleich ist: so ist der von diesen übrigen Seiten eingeschlossene Winkel, BAC, ein rechter.

Ziehe (11. S.) auf AC aus A die AD senkrecht. Mache AD = AB und ziehe DC, so ist auch □ AD = □ AB, folglich, wenn □ AC hinzukommt, (2. Ax.) □ AD + □ AC = □ AB + □ AC. Nun ist, weil DAC ein rechter Winkel, (47. S.) □ AD + □ AC = □ DC, und nach dem Angenommenen □ AB + □ AC = □ BC. Folglich ist □ DC = □ BC, und daher DC = BC.



Da AD = AB, und AC gemein, auch DC = BC, so ist (8. S.) DAC = BAC. Nun ist DAC, folglich auch BAC ein rechter Winkel.

Euklids Elemente

Zweytes Buch.

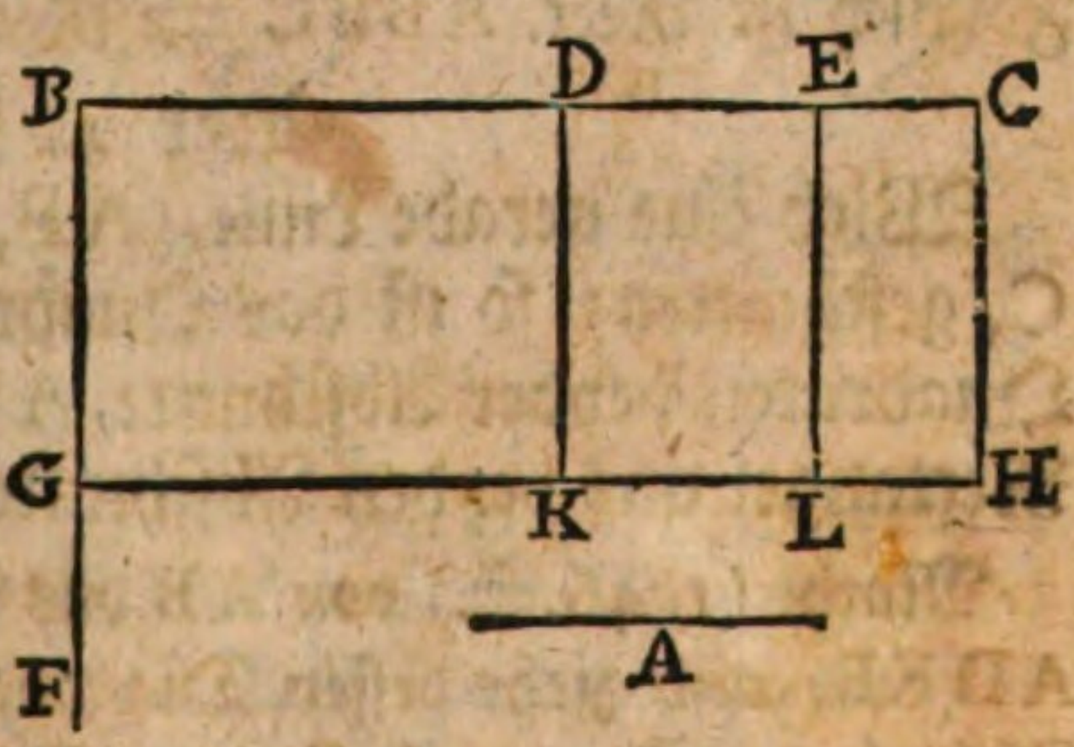
Definitionen.

1. Von jedem rechtwinklichen Parallelogramm (Rectangel) sagt man, es sey aus den beyden geraden Linien, welche den rechten Winkel einschliessen.

2. In einem Parallelogramm heisse ein jedes der beyden um die Diagonale herumliegenden Parallelogrammen samt den beyden Ergänzungen, ein **Gnomon.**

Der 1. Satz.

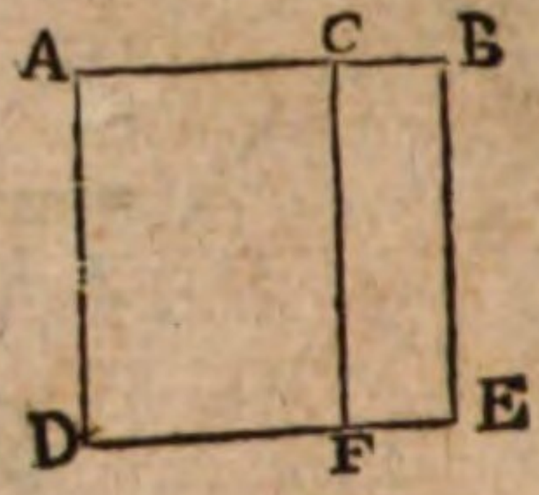
Wird von zweyen geraden Linien, A, BC, die eine, BC, in beliebig viele Abschnitte, BD, DE, EC, getheilt: so ist das Rectangel aus den beyden Linien den Rectangeln aus der ungetheilten Linie und jedem der gemachten Abschnitte gleich.



Errichte (1, 11. S.) auf BC in B die BF senkrecht, mache BG = A, ziehe (1, 31. S.) durch G der BC die GH, und durch D, E, C, der BG die DK, EL, CH, parallel, so ist BH = BK + DL + EH. Nun ist BH = Rect. GBBC; BK = Rect. GBBD; DL = Rect. KDDE; EH = Rect. LEEC; und (1, 34. S.) LE = KD = GB = A. Folglich ist Rect. A, BC = Rect. A, BD + Rect. A, DE + Rect. A, EC.

Der 2. Satz.

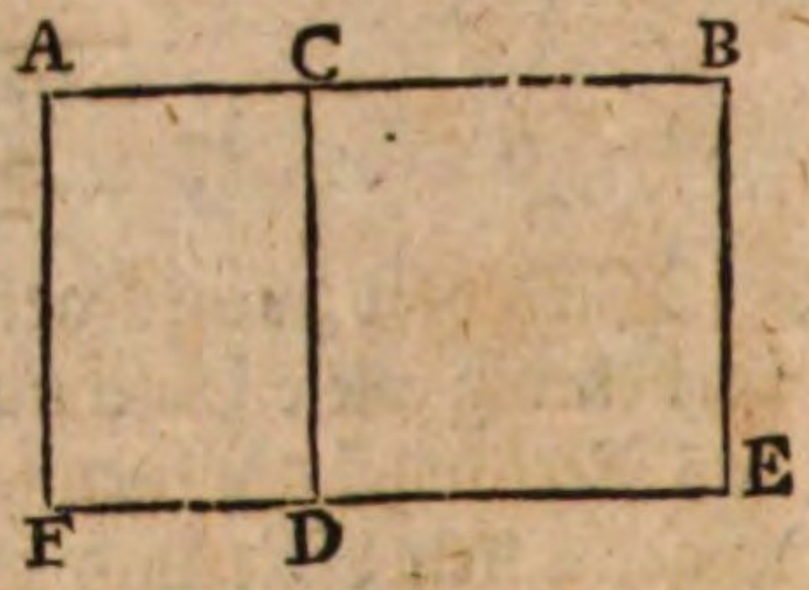
Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten: so sind die Rectangel aus der ganzen Linie, AB, und jedem der beyden Abschnitte, AC, CB, dem Quadrate der ganzen Linie, AB, gleich.



Mache (1, 46. S.) von AB das Quadrat ADEB und ziehe (1, 31. S.) durch C der AD, BE, die CF parallel, so ist ADEB = AF + CE. Nun ist ADEB = □AB; AF = Rect. DAAC; CE = Rect. FCCB, und FC = DA = AB. Folglich ist □AB = Rect. BAAC + Rect. ABBC.

Der 3. Satz.

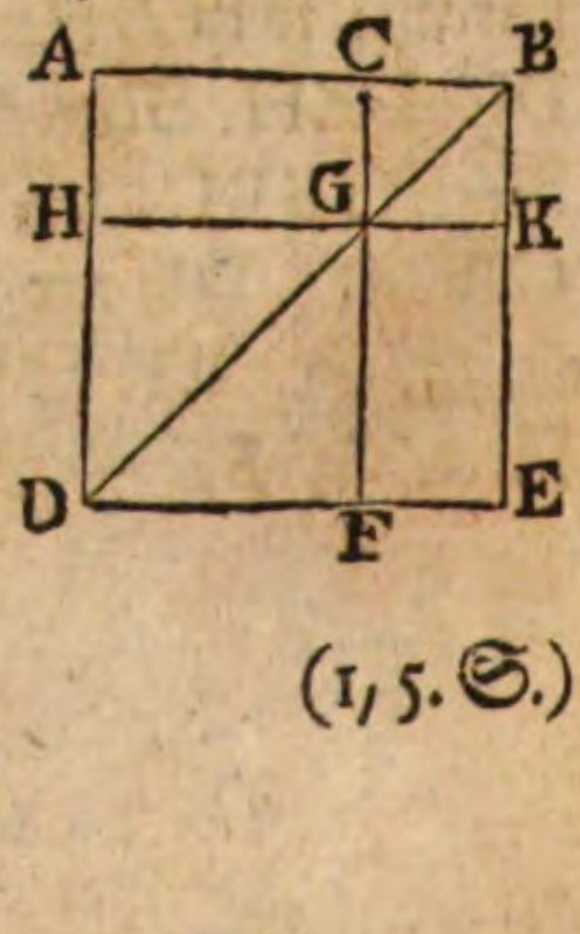
Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten: so ist das Rectangel aus der ganzen Linie, AB, und einem der beyden Abschnitte, BC, dem Rectangel aus beyden Abschnitten, AC, CB, nebst dem Quadrat des vorgedachten Abschnitts, BC, gleich.



Mache (1, 46. S.) von BC das Quadrat CE, verlängre ED nach F und ziehe (1, 31. S.) durch A der CD, BE, die AF parallel, so ist AE = AD + CE. Nun ist AE = Rect. FAAB, AD = Rect. FAAC, CE = □BC, und FA = DC = CB. Folglich ist Rect. ABBC = Rect. ACCB + □BC.

Der 4. Satz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten: so ist das Quadrat der ganzen Linie, AB, den Quadraten beyder Abschnitte, AC, CB, nebst dem zwiefachen Rectangel aus beyden Abschnitten, AC, CB, gleich.



Mache (1, 46. S.) von AB das Quadrat ADEB, und ziehe dessen Diagonale, BD. Ziehe (1, 31. S.) durch C der AD, BE, die CGF und durch G der AB, DE, die HK parallel.

Da CF, AD, parallel, so ist (1, 29. S.) BGC = BDA. Nun ist, weil AD = AB,

(1, 5. S.)

(1, 5. S.) BDA = ABD. Folglich ist (1, 1. Ax.) BGC = ABD, folglich (1, 6. S.) BC = CG. Nun sind (1, 34. S.) BC, CG, ihren Gegenseiten gleich. Folglich ist CK gleichseitig.

Da CF, BE, parallel, so ist (1, 29. S.) KBC + GCB = 2 R. Nun ist KBC, folglich auch GCB ein rechter Winkel, und (1, 34. S.) beyde ihren Gegenwinkeln gleich. Folglich ist CK rechtwinklich. Nun war es auch gleichseitig. Folglich ist (1, 30. Def.) CK ein Quadrat, dessen Seite BC.

Auf eben die Art wird bewiesen, daß auch HF ein Quadrat, dessen Seite HG = AC.

Da (1, 43. S.) AG = GE, aber AG = Rect. ACCG = Rect. ACCB, so ist auch GE = Rect. ACCB, folglich AG + GE = 2 Rect. ACCB. Nun war CK = □CB und HF = □AC, auch ADEB = □AB. Folglich ist □AB = □AC + □CB + 2 Rect. ACCB.

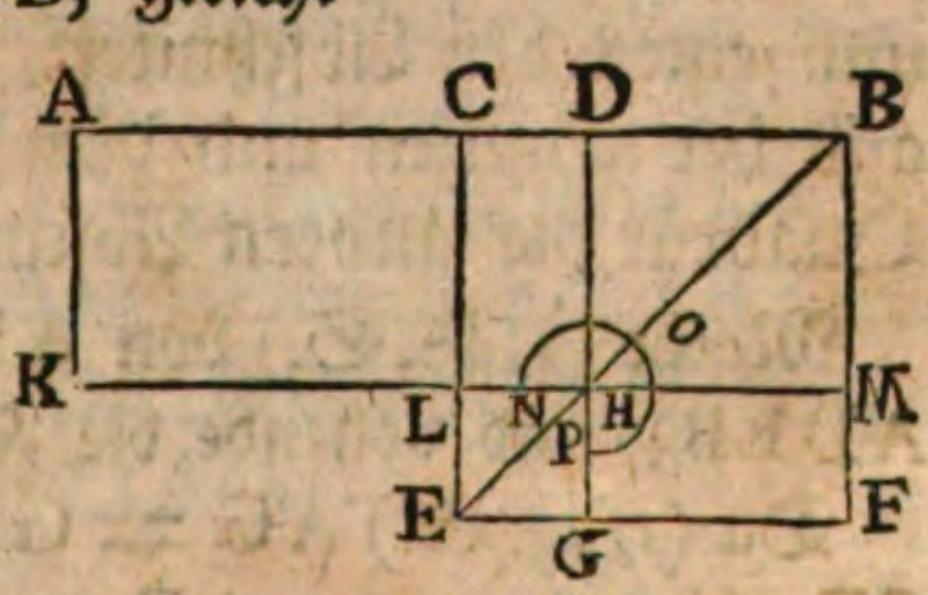
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß in jedem Quadrate die um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme auch Quadrate sind.

Der 5. Satz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem Punkte C, gleich, in einem andern Punkte D, ungleich getheilt: so ist das Rectangel aus den ungleichen Abschnitten, AD, DB, nebst dem Quadrat des Abschnitts zwischen den Theilpunkten, CD, dem Quadrat der halben Linie, CB, gleich.

Mache (1, 46. S.) von CB das Quadrat CEFB, dessen Diagonale EB. Ziehe (1, 31. S.) durch D der CE, BF, die DHG; durch H der CB, EF, die KM; und durch A der CE, BF, die AK parallel.

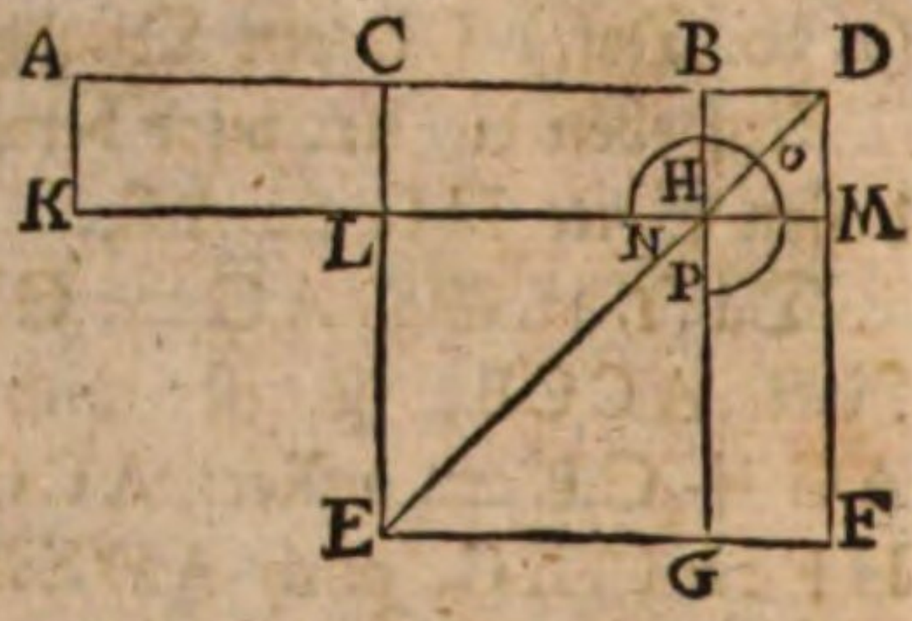


Da (1, 43. S.) CH = HF, so ist, wenn DM hinzukommt, (1, 2. Ax.) CM = DF. Nun ist, weil AC = CB, (1, 36. S.) AL = CM. Folglich (1, 1. Ax.) AL = DF, folglich, wenn CH hinzukommt, AH = Gnom. NOP, folglich, wenn LG hinzukommt, AH + LG = CEFB. Nun ist AH = Rect. ADDH = Rect. ADDB; LG (2, 4. Zus.) = □LH = □CD; CEFB = □CB. Folglich ist Rect. ADDB + □CD = □CB.

Der

Der 6. Satz.

Wird eine gerade Linie, AB, halbirt und ihr eine andre, BD, in gleicher Richtung, angesetzt: so ist das Rectangel aus der Angesetzten BD, und der aus der Ganzen und der Angesetzten bestehenden Linie, AD, nebst dem Quadrat der halben Linie, CB, dem Quadrate der aus der Halben und der Angesetzten bestehenden Linie, CD, gleich.

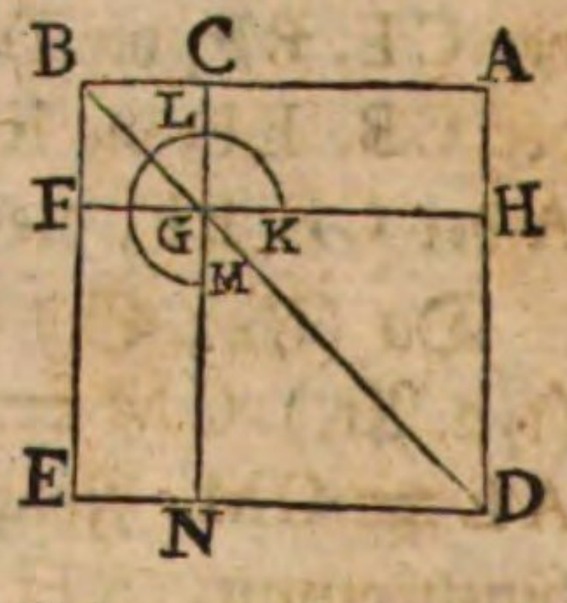


Mache (1, 46. S.) von CD das Quadrat CEFD, dessen Diagonale DE. Ziehe (1, 31. S.) durch B der CE, DF, die BHG, durch H der AD, EF, die KM, und durch A der CE, DF, die AK parallel.

Da AC = CB und daher (1, 36. S.) AL = CH, aber (1, 43. S.) CH = HF, so ist (1, 1. Ax.) AL = HF, folglich, wenn CM hinzukommt, (1, 2. Ax.) AM = Gnom. NOP, folglich, wenn LG hinzukommt, AM + LG = CEFD. Nun ist AM = Rect. ADDM = Rect. ADDB; LG (2, 4. Zus.) = □ LH = □ CB; CEFD = □ CD. Folglich ist Rect. ADDB + □ CB = □ CD.

Der 7. Satz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten: so sind die Quadrate der ganzen Linie AB, und eines der Abschnitte, BC, dem zwiefachen Rectangel aus der Ganzen und dem gedachten Abschnitte, nebst dem Quadrat des andern Abschnitts, AC, gleich.



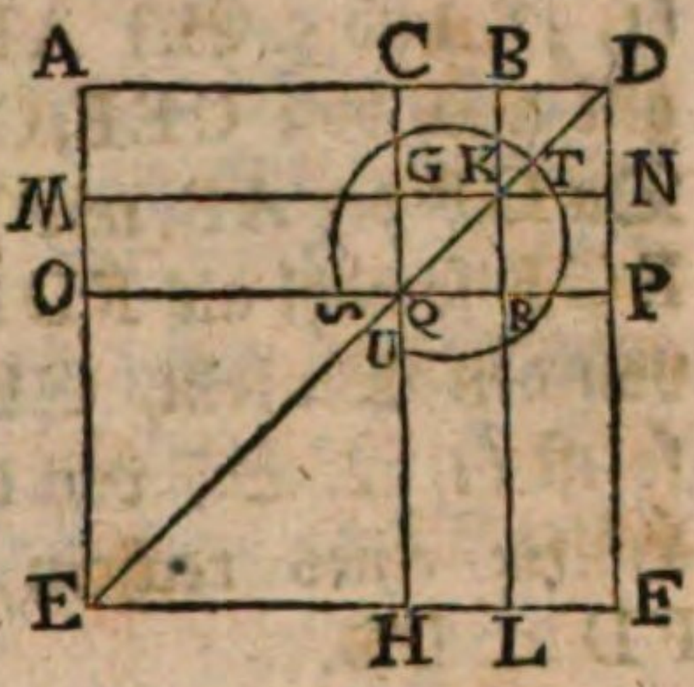
Mache (1, 46. S.) von AB das Quadrat ADEB, und vollende die Figur.

Da (1, 43. S.) AG = GE, so ist, wenn CF hinzukommt, AF = CE, folglich AF + CE = 2 AF. Nun ist AF + CE = Gnom. KLM + CF. Folglich ist Gnom. KLM + CF = 2 AF, folglich, wenn HN, hinzukommt, ADEB + CF = 2 AF + HN. Nun ist ADEB = □ AB; CF (2, 4. Zus.) = □ BC; AF = Rect. ABBF = Rect. ABBC und HN (2, 4. Zus.) = □ HG = □ AC. Folglich ist □ AB + □ BC = 2 Rect. ABBC + □ AC.

Der

Der 8. Satz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten: so ist das vierfache Rectangel aus der ganzen Linie AB und einem der Abschnitte, BC, nebst dem Quadrat des andern Abschnitts, AC, dem Quadrate der aus der Ganzen und dem erstgedachten Abschnitt bestehenden Linie gleich.



Verlängre AB, bis BD = BC, so besteht AD aus der Ganzen AB und dem erstgedachten Abschnitt BC = BD. Mache (1, 46. S.) von AD das Quadrat AEFD, und vollende die Figur.

Da CB = BD, aber (1, 34. S.) BC = GK = QR, und BD = KN = RP, so ist (1, 1. Ax.) GK = KN, und QR = RP, folglich (1, 36. S.) CK = BN und GR = KP. Nun ist (1, 43. S.) CK = KP. Folglich sind alle vier Parallelogramme einander gleich, folglich CP = 4 CK.

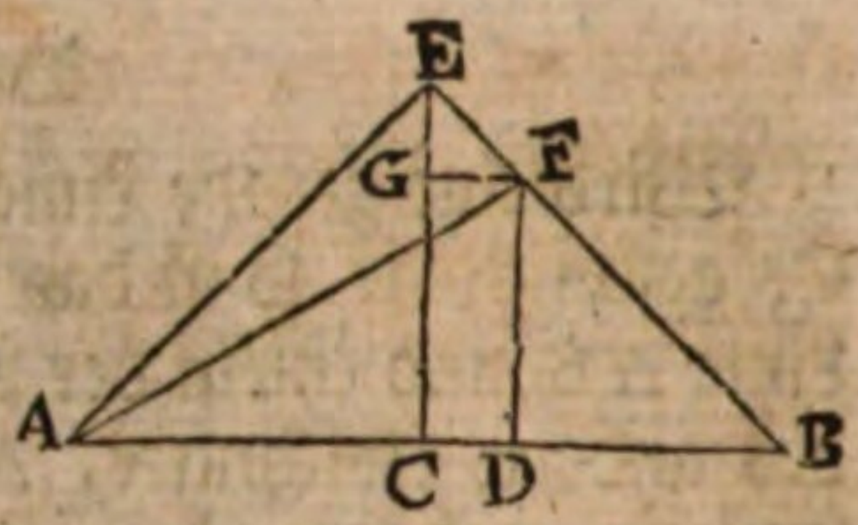
Da CB = BD, aber (2, 4. Zus.) BD = BK = (1, 34. S.) CG, und CB = GK = GQ, so ist CG = GQ. Auch war QR = RP. Folglich ist (1, 36. S.) AG = MQ und QL = RF. Nun ist im Parallelogramm ML (1, 43. S.) MQ = QL. Folglich ist auch AG = RF. Demnach sind alle vier Parallelogramme AG, MQ, QL, RF, einander gleich, und daher zusammen = 4 AG. Nun war CP = 4 CK. Folglich ist Gnom. STV = 4 AK, folglich, wenn OH hinzukommt, ist AEFD, das ist □AD = 4 AK + OH. Nun ist AK = Rect. ABBK = Rect. ABBC und OH (2, 4. Zus.) = □OQ = □AC. Folglich ist □AD = 4 Rect. ABBC + □AC.

Der 9. Satz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem Punkte C, gleich, in einem andern, D, ungleich geschnitten: so sind die Quadrate der ungleichen Abschnitte, AD, DB, den zwiefachen Quadraten der halben Linie AC, und des Abschnitts zwischen den Theilpunkten, CD, gleich.

Errichte

Errichte (1, 11. S.) auf AB in C die CE senkrecht, mache CE = CA = CB und ziehe AE, BE. Ziehe (1, 31. S.) durch D der EC die DF und durch F der AB die FG parallel. Ziehe AF.



Da ACE ein rechter Winkel und AC = CE, so ist (1, 32. und 5. S.) AEC die Hälfte eines rechten. Eben dieses gilt auch von CEB, CBE. Folglich ist AEB ein rechter Winkel. Da GF der AB, und FD der EC parallel, und daher (1, 29. S.) EGF sowohl als FDB dem rechten Winkel ECB gleich; auch von den Winkeln, GEF, DBF, jeder die Hälfte eines rechten; so ist (1, 32. S.) von den Winkeln EFG, DFB, auch jeder die Hälfte eines rechten, folglich (1, 6. S.) EG = GF und FD = DB.

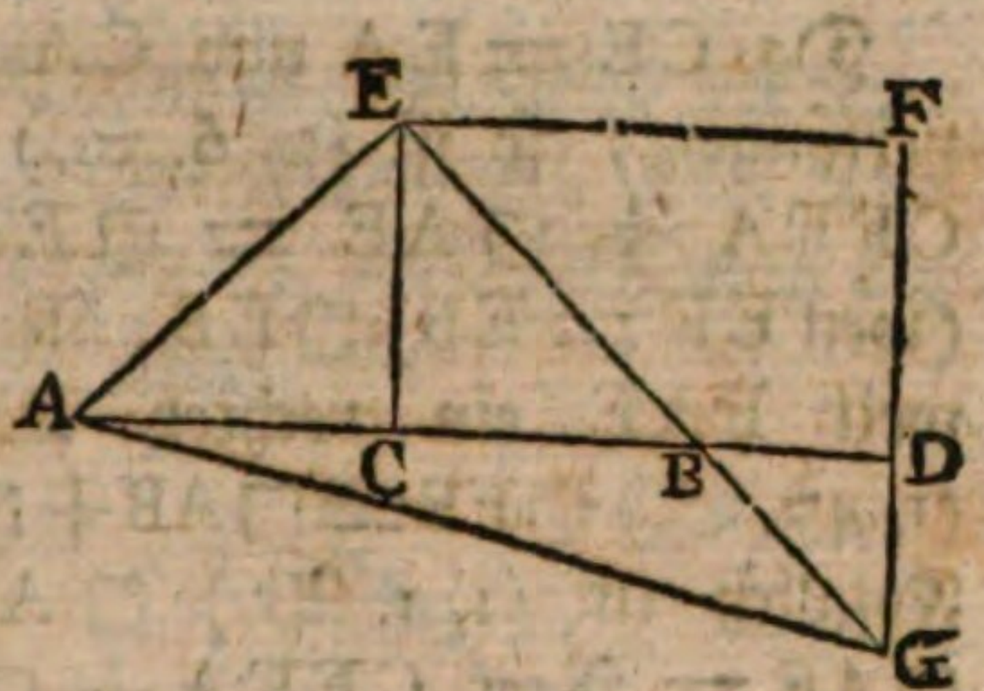
Da ACE ein rechter Winkel und AC = CE, so ist (1, 47. S.) □AE = 2□AC. Da EGF ein rechter Winkel, und EG = GF, so ist (1, 47. S.) □EF = 2□GF, und, weil (1, 34. S.) GF = CD, daher □EF = 2□CD. Da AEF ein rechter Winkel, so ist (1, 47. S.) □AF = □AE + □EF. Nun war □AE = 2□AC und □EF = 2□CD. Folglich ist □AF = 2□AC + 2□CD. Nun ist, weil FDA ein rechter Winkel, (1, 47. S.) □AF = □AD + □DF = (weil DF = DB) □AD + □DB. Folglich ist □AD + □DB = 2□AC + 2□CD.

Der 10. Satz.

Wird eine gerade Linie, AB, halbirt, und ihr eine andre, BD, in gleicher Richtung angesetzt: so ist das Quadrat der aus der Ganzen und der Angesetzten bestehenden Linie, AD, nebst dem Quadrat der Angesetzten BD, den zwiefachen Quadraten der Halben, AC, und der aus der Halben und der Angesetzten bestehenden Linie, CD, gleich.

Errichte (1, 11. S.) auf AB in C die CE senkrecht, mache CE = CA = CB und ziehe AE, EB. Ziehe (1, 31. S.) durch E der AD die EF und durch D der CE die DF parallel, so ist (1, 29. S.)

(1, 29. S.) CEF + EFD = 2 R., folglich BEF + EFD < 2 R., folglich werden (1, 11. Ax.) EB, FD, an dieser Seite verlängert zusammentreffen. Dies geschehe in G. Ziehe AG.



Da ACE ein rechter Winkel und AC = CE, so ist (1, 32. und 5. S.) AEC die Hälfte eines rechten. Dies gilt auch von CEB, CBE. Folglich ist AEB ein rechter Winkel. Nun ist (1, 15. S.) DBG = CBE und weil FG, CE, parallel, (1, 29. S.) DGB = CEB. Folglich ist jeder der Winkel DBG, DGB, die Hälfte eines rechten, folglich (1, 6. S.) DB = DG. Nun ist der Winkel bey C ein rechter, und F = C. Folglich (1, 32. und 6. S.) EF = FG.

Da ACE ein rechter Winkel, und AC = CE, so ist (1, 47. S.) □AE = 2□AC. Da EFG ein rechter Winkel und EF = FG, so ist (1, 47. S.) □EG = 2□EF. Nun ist (1, 34. S.) EF = CD. Folglich □EG = 2□CD.

Da AEG ein rechter Winkel, so ist (1, 47. S.) □AG = □AE + □EG. Nun war □AE = 2□AC, und □EG = 2□CD. Folglich ist □AG = 2□AC + 2□CD. Nun ist, weil ADG ein rechter Winkel, (1, 47. S.) □AG = □AD + □DG = (weil DG = BD) □AD + □BD. Folglich ist □AD + □BD = 2□AC + 2□CD.

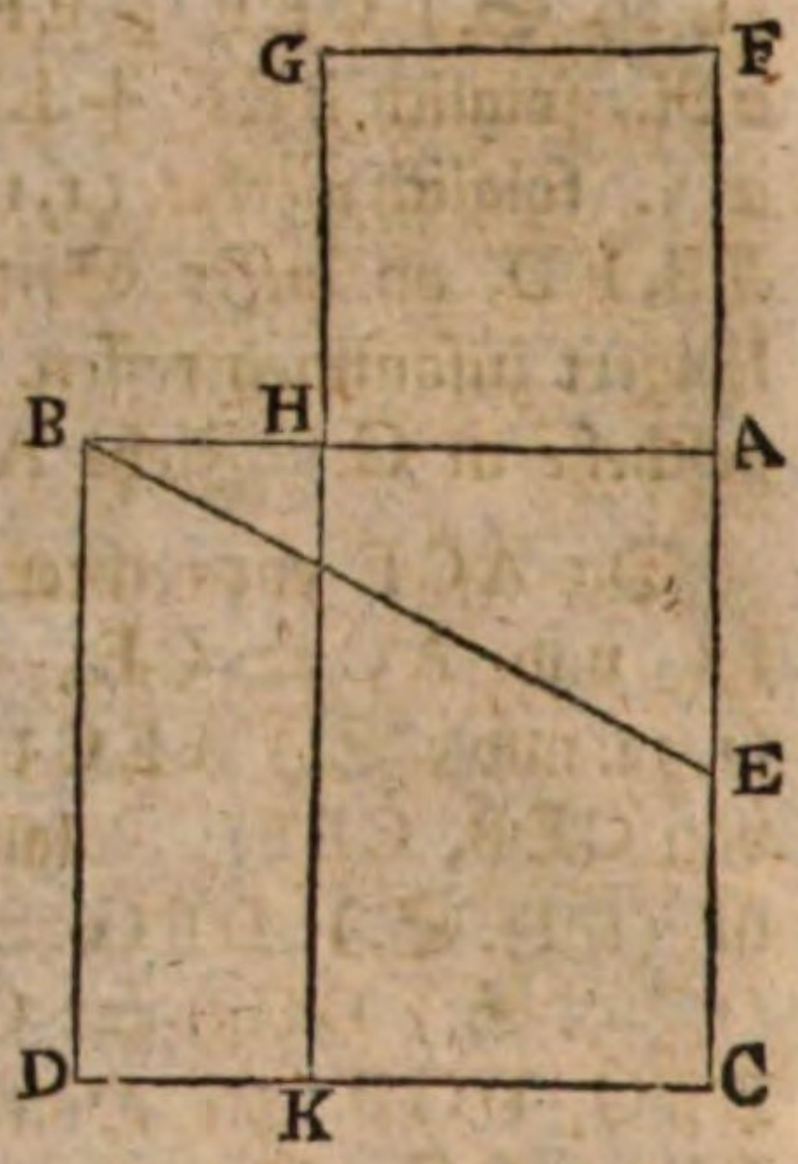
Der 11. Satz.

Eine gegebne gerade Linie, AB, so zu schneiden, daß das Rectangel aus der Ganzen und Einem der Abschnitte, dem Quadrat des andern Abschnitts gleich sey.

Mache (1, 46. S.) von AB das Quadrat ABDC, halbire (1, 10. S.) AC in E und ziehe BE. Verlängre CA nach F bis EF = EB. Mache von AF das Quadrat FH und verlängre GH bis K, so ist AB in H so geschnitten, daß Rect. ABBH = □AH.

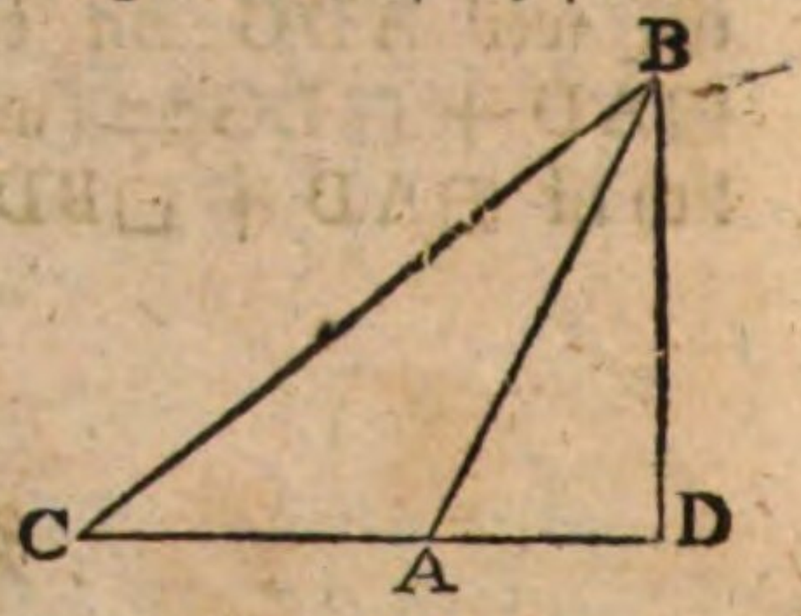
Da

Da CE = EA und CA bis F verlängert, so ist (2, 6. S.) Rect. CFFA + □AE = □EF = (weil EF = EB) □EB. Nun ist, weil BAE ein rechter Winkel, (1, 47. S.) □EB = □AB + □AE. Folglich ist (1, 1. Ax.) □AB + □AE = Rect. CFFA + □AE, folglich, wenn man □AE wegnimmt, (1, 3. Ax.) Rect. CFFA = □AB, das ist, FK = AD, folglich, wenn man HC wegnimmt, FH = HD. Nun ist FH = □AH, und HD = Rect. DBBH = (weil DB = AB) Rect. ABBH, folglich ist Rect. ABBH = □AH.



Der 12. Satz.

In jedem stumpfwinklichen Triangel, ABC, übertrift das Quadrat der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite, BC, die Quadrate der ihn einschliessenden Seiten, CA, AB, um das zwiefache Rectangel aus einer der einschliessenden Seiten, CA, und der ihr in gleicher Richtung zugesetzten Linie, AD, vom stumpfen Winkel A bis zu dem Perpendikel BD, den man auf dieselbe von ihrem Gegenwinkel, B, fället.

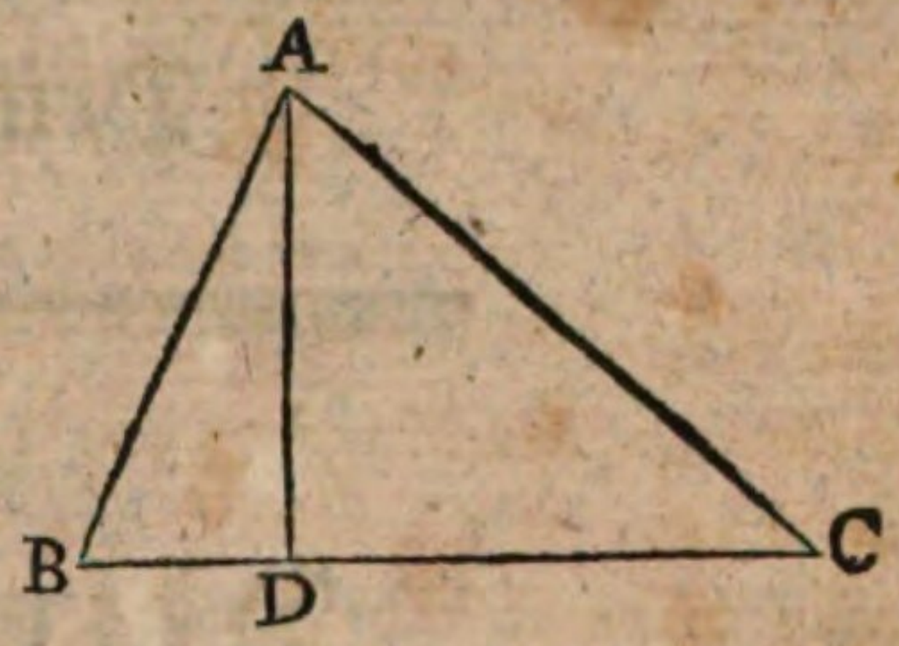


Da CD willkührlich in A geschnitten, so ist (2, 4. S.) □CD = □CA + □AD + 2 Rect. CAAD, folglich, wenn □DB hinzukommt, (1, 2. Ax.) □CD + □DB = □CA + □AD + □DB + 2 Rect. CAAD. Nun ist, weil bey D ein rechter Winkel, (1, 47. S.) □CD + □DB = □CB und □AD + □DB = □AB. Folglich ist □CB = □CA + □AB + 2 Rect. CAAD. Demnach übertrift das Quadrat der CB die Quadrate der CA und AB um 2 Rect. CAAD.

Der 13. Satz.

In jedem spitzwinklichen Triangel, ABC, wird das Quadrat der einem spitzen Winkel gegenüberliegenden Seite, AC, von den Quadraten der ihn einschliessenden Seiten, AB, BC, über-

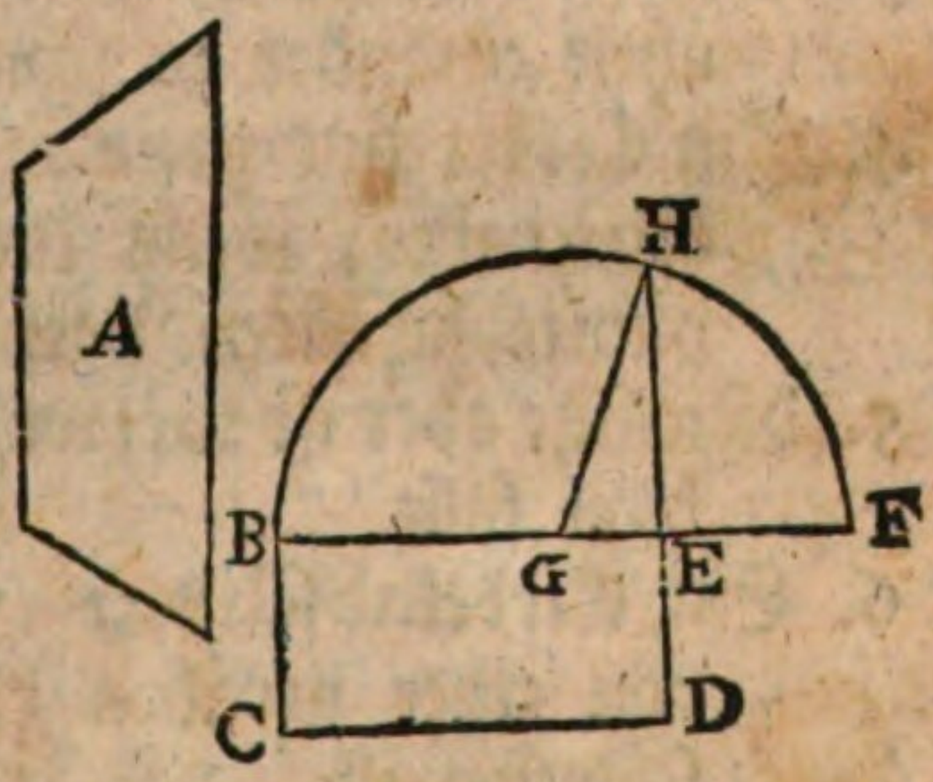
übertroffen, um das zwiefache Rectangel aus einer der einschliessenden Seiten, CB, und ihrem Abschnitt, BD, vom spitzen Winkel, B, bis zu dem Perpendikel, AD, den man auf dieselbe von ihrem Gegenwinkel, A, fället.



Da CB willkührlich in D geschnitten, so ist (2, 7. S.) □CB + □BD = 2 Rect. CBBD + □DC, folglich, wenn □AD hinzukommt, □CB + □BD + □AD = 2 Rect. CBBD + □DC + □AD. Nun ist, weil bey D rechte Winkel, (1, 47. S.) □BD + □AD = □AB und □DC + □AD = □AC. Folglich ist □CB + □AB = 2 Rect. CBBD + □AC. Demnach wird das Quadrat der AC von den Quadraten der CB und AB übertroffen, um 2 Rect. CBBD.

Der 14. Satz.

Einer gegebnen geradlinichen Figur, A, ein Quadrat gleich zu machen.



Mache (1, 45. S.) ein Rectangel BD = A. Sind nun BE, ED, einander gleich, so ist BD das verlangte Quadrat. Sind aber BE, ED, ungleich, so verlängre die grössere BE nach F, bis EF = ED. Halbire FB in G und beschreibe aus G mit GB oder GF den Halbcirkel BHF. Verlängre DE bis H, und ziehe GH.

Da BF in G gleich und in E ungleich geschnitten, so ist (2, 5. S.) Rect. BEEF + □EG = □GF = (1, 15. Def.) □GH. Nun ist, weil bey E ein rechter Winkel, (1, 47. S.) □GH = □HE + □EG. Folglich ist Rect. BEEF + □EG = □HE + □EG, folglich, wenn man □EG wegnimmt, Rect. BEEF, das ist, A, = □HE.

Euklids Elemente

Drittes Buch.

Definitionen.

1. Cirkel sind einander gleich, wenn ihre Durchmesser, oder die vom Mittelpunkt ausgehenden Linien (Halbmesser) einander gleich sind.
2. Eine gerade Linie berührt den Cirkel, wenn sie den Cirkel trift, ohne verlängert ihn zu schneiden. (Sie heisse die Tangente des Cirkels.)
3. Cirkel berühren einander, wenn sie einander treffen, ohne einander zu schneiden.
4. Im Cirkel sind gerade Linien gleich weit vom Mittelpunkte, wenn die auf dieselben aus dem Mittelpunkte gefällten Perpendikel einander gleich sind,
5. diejenige aber ist weiter, auf welche ein grösserer Perpendikel fällt.
6. Ein Cirkelabschnitt (Segment) ist die Figur, welche von einer geraden Linie und dem Cirkelbogen eingeschlossen ist.
7. Der Winkel des Cirkelabschnitts ist der, so von gedachter geraden Linie und dem Cirkelbogen eingeschlossen ist.
8. Der Winkel im Cirkelabschnitt aber heißt der, welchen zwey gerade Linien einschliessen, die von einem willkührlichen Punkte des Cirkelbogens zu den Endpunkten derjenigen geraden Linie gehen, welche die Basis des Abschnitts ist.
9. Dieser Winkel steht auf Dem Cirkelbogen, der von seinen Schenkeln abgeschnitten ist.

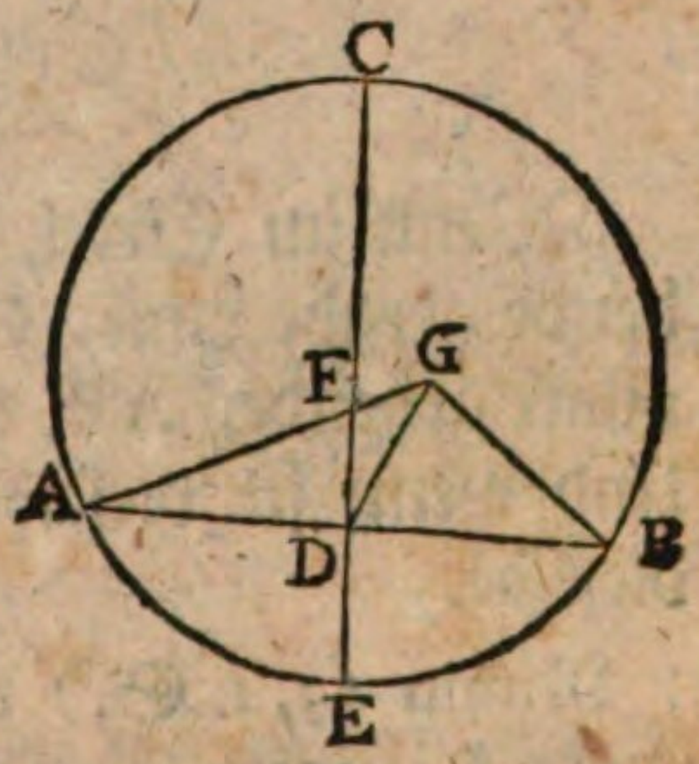
10. Ein

10. Ein **Cirkelausschnitt** (Sector) ist die Figur, welche von den Schenkeln des Centriwinkels und dem von ihnen abgeschnittnen Cirkelbogen eingeschlossen ist.

11. **Cirkelabschnitte** sind einander ähnlich, wenn sie gleiche Winkel fassen; oder, wenn die Winkel in den Abschnitten einander gleich sind.

Der 1. Satz.

Den Mittelpunkt eines gegebnen Cirkels, ABC, zu finden.



Im Cirkel ziehe willkührlich eine gerade Linie, AB, halbire sie in D und errichte auf ihr in D die DC senkrecht. Verlängre CD bis E und halbire CE in F, so ist F der gesuchte Mittelpunkt.

Wäre F nicht der Mittelpunkt, so sey es irgend ein andrer, etwa G. Ziehe GA, GD, DB, so ist, da AD = DB, und GD gemein, auch (1, 15. Def.) AG = GB, (1, 8. S.) ADG = GDB, folglich (1, 10. Def.) beyde rechte Winkel. Nun ist auch CDB ein rechter Winkel. Folglich (1, 10. Ax.) CDB = GDB, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Zusatz.

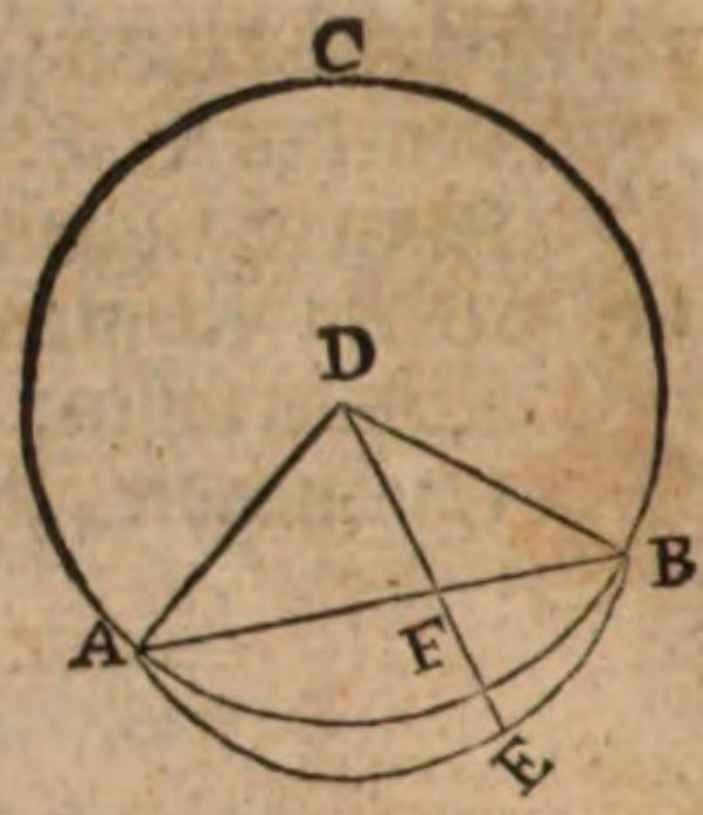
Hieraus erhellet, wenn im Cirkel eine gerade Linie von einer andern gleich und senkrecht geschnitten wird, daß in der schneidenden Linie der Mittelpunkt des Cirkels sey.

Der 2. Satz.

Eine gerade Linie, welche zwey beliebige Punkte, A, B, in der Peripherie eines Cirkels, ABC, verbindet, fällt innerhalb dieses Cirkels.

Fällt diese gerade Linie nicht innerhalb des Cirkels, so falle sie ausserhalb, wie AEB. Nimm (3, 1. S.) des Cirkels Mittel-

punkt D und ziehe DA, DB. Zwischen A, B, nimm in der Peripherie willkührlich einen Punkt F, ziehe DF, und verlängre sie bis E.



Da (1, 15. Def.) DA = DB, so ist (1, 5. S.) DAE = DBE. Nun ist (1, 16. S.) DEB > DAE. Folglich ist DEB > DBE, folglich (1, 19. S.) DB > DE. Nun ist (1, 15. Def.) DB = DF. Folglich DF > DE, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

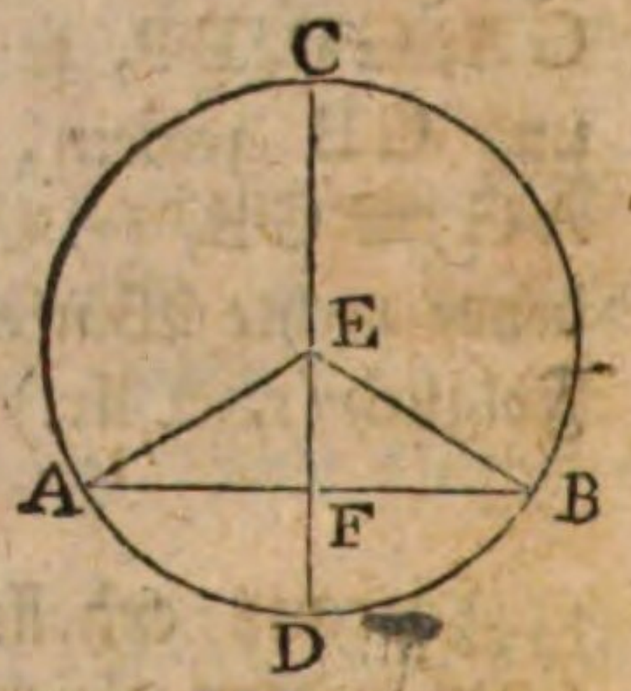
Der 3. Satz.

Wenn im Cirkel, ABC, eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie, CD, eine andre, nicht durch den Mittelpunkt gehende, AB, halbirt: so schneidet sie dieselbe senkrecht. Und wenn sie dieselbe senkrecht schneidet, so halbirt sie auch dieselbe.

Nimm (3, 1. S.) des Cirkels Mittelpunkt E, und ziehe EA, EB.

Erster Theil.

Wenn CD die AB in F halbirt, so ist AF = FB. Nun ist EF gemein und (1, 15. Def.) AE = EB. Folglich (1, 8. S.) AFE = EFB, folglich (1, 10. Def.) CD senkrecht auf AB.



Zweyter Theil.

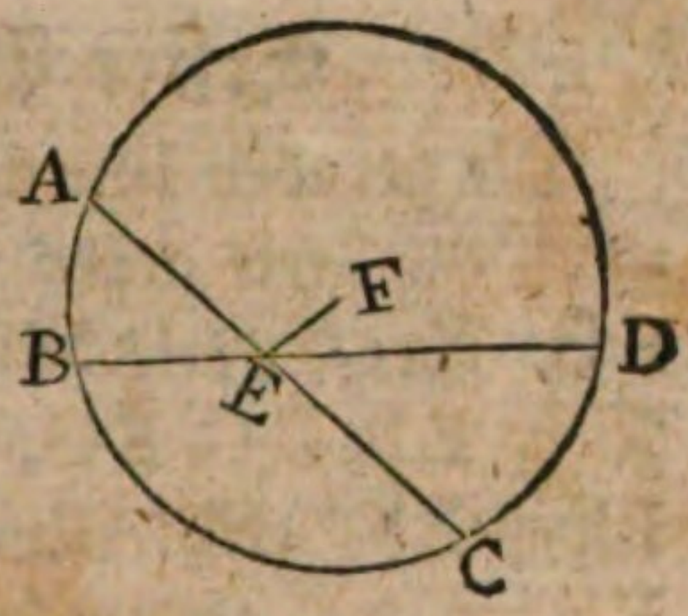
Wenn CD auf AB senkrecht, so ist (1, 10. Def.) AFE = EFB. Nun ist, weil (1, 15. Def.) AE = EB, (1, 5. S.) EAF = EBF, auch ist EF gemein. Folglich ist (1, 26. S.) AF = FB.

Der 4. Satz.

Wenn im Cirkel, ABCD, zwey gerade Linien, AC, BD, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, einander schneiden: so halbiren sie einander nicht.

Gesetzt,

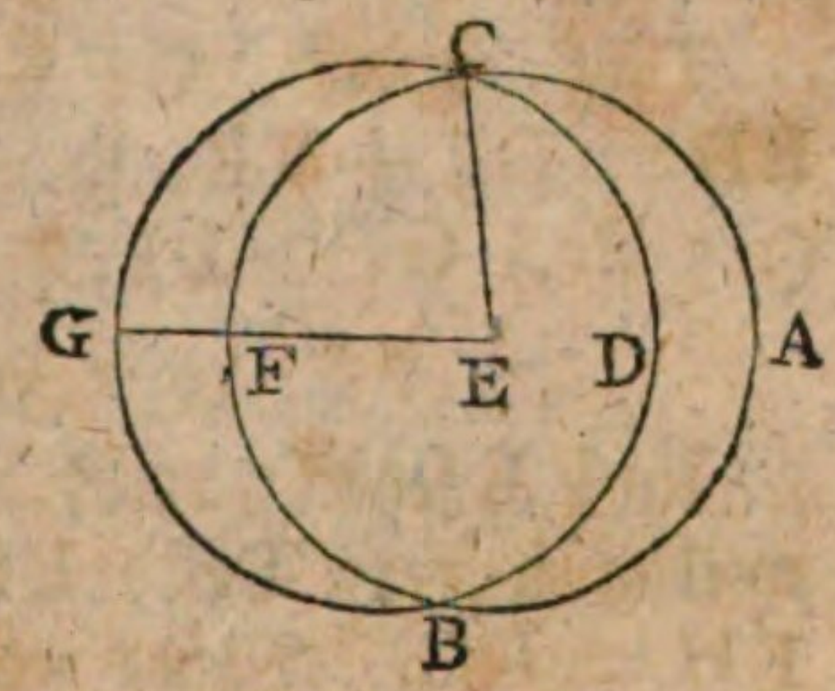
Gesetzt, sie halbirten einander, so daß AE = EC und BE = ED, so ist, wenn man des Cirkels Mittelpunkt F nimmt und FE ziehet, (3, 3. S.) FEA sowohl als FEB ein rechter Winkel, folglich FEA = FEB, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.



Der 5. Satz.

Zwey Cirkel, ABC, CDG, die einander schneiden, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

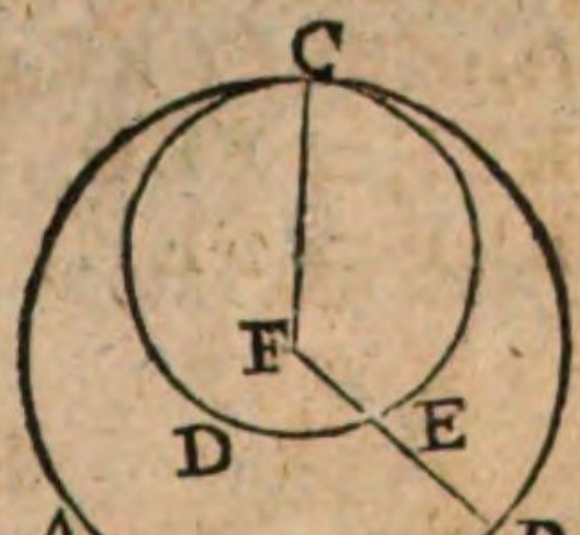
Gesetzt, sie hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt E, so ziehe EC, und willkührlich EFG, folglich ist (1, 15. Def.) beym Cirkel ABC, EC = EF, und beym Cirkel CDG, EC = EG, folglich (1, 1. Ax.) EG = EF, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.



Der 6. Satz.

Zwey Cirkel, ABC, CDE, deren einer den andern inwendig berührt, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

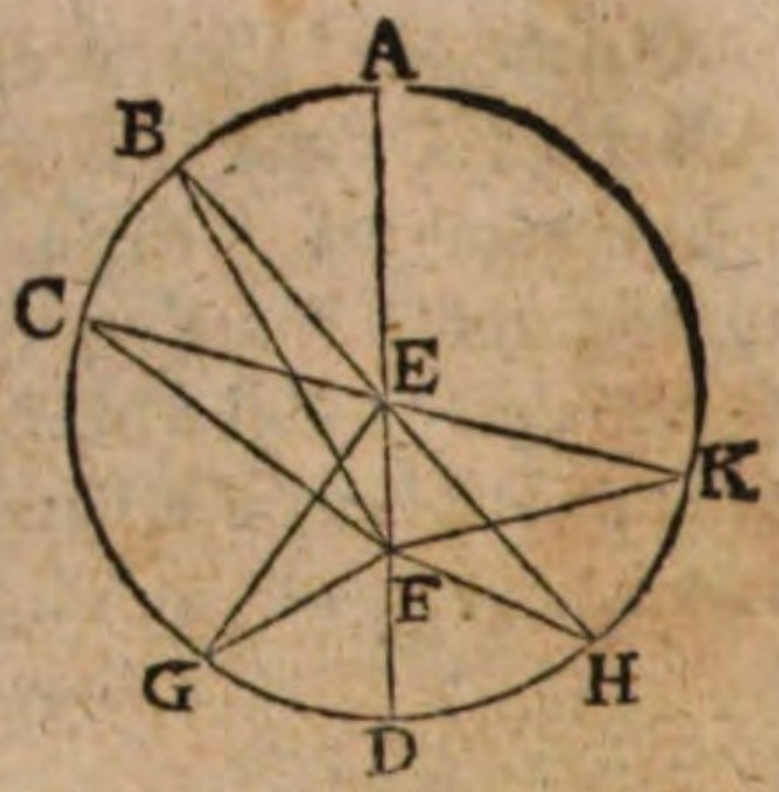
Gesetzt, sie hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, F, so ziehe FC und willkührlich FEB, folglich ist (1, 15. Def.) beym Cirkel ABC, FC = FB, und beym Cirkel CDE, FC = FE, folglich (1, 1. Ax.) FB = FE, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.



Der 7. Satz.

Wenn im Cirkel, ABCD, von einem Punkte des Durchmessers, AD, der nicht der Mittelpunkt ist, F, gerade Linien zur Peripherie gehen: so ist die mit dem Mittelpunkte, FA, die gröste, und ihr Rest, FD, die kleinste, und von den andern immer die, so der mit dem Mittelpunkte näher, grösser als die entferntere. Auch sind von diesen Linien nur je zwey an beyden Seiten der kleinsten, einander gleich.

Erster Theil.



Die geraden Linien, welche von F zur Peripherie gehen, seyen FB, FC, FG. Des Cirkels Mittelpunkt sey E. Ziehe EB, EC, EG, so ist (1, 20. S.) BE + EF > FB. Nun ist (1, 15. Def.) BE = AE, und daher BE + EF = AE + EF. Folglich AF > FB.

Da (1, 15. Def.) BE = CE, und EF gemein, aber BEF > CEF, so ist (1, 24. S.) FB > FC und eben so FC > FG.

Da (1, 20. S.) GF + FE > EG und (1, 15. Def.) EG = ED = DF + FE, so ist GF + FE > DF + FE, folglich (1, 5. Ax.) GF > DF.

Zweyter Theil.

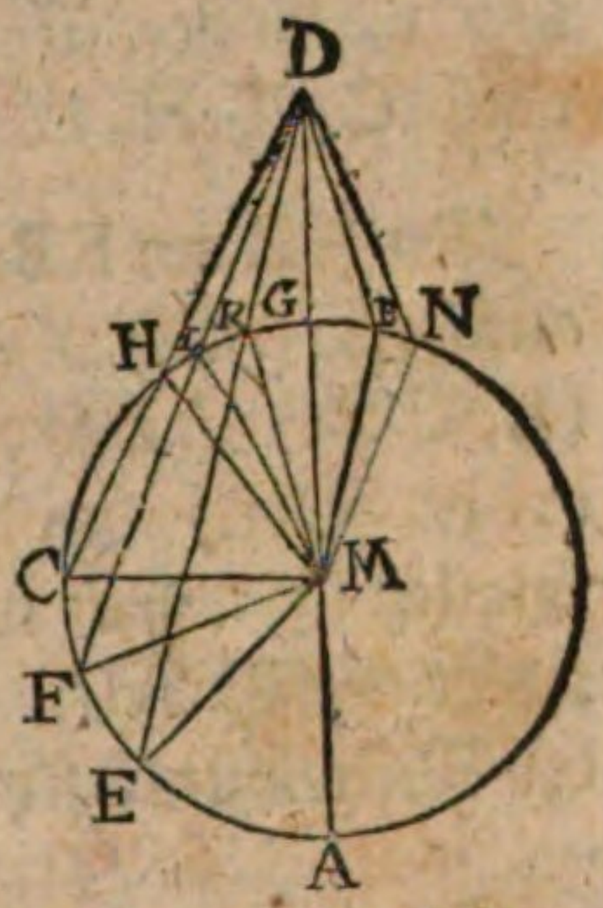
An FE setze (1, 23. S.) FEH = FEG und ziehe FH, so ist, weil auch (1, 15. Def.) EH = EG, und EF gemein, (1, 4. S.) FH = FG. Wäre nun ausser FH noch irgend eine andre, etwa FK, der FG gleich, so wäre auch FK = FH, welches unmöglich, da nach obigen die der AF nähere, FK, grösser ist als die entferntere, FH.

Oder: wäre FK = FG, so ziehe EK. Nun ist auch (1, 15. Def.) KE = EG und EF gemein; folglich (1, 8. S.) KEF = FEG. Nun war FEG = FEH. Folglich wäre KEF = FEH, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Der 8. Satz.

Wenn von einem ausserhalb eines Cirkels, ABC, beliebig angenommenen Punkte, D, gerade Linien zum Cirkel und zwar eine, DA, durch den Mittelpunkt, M, die andern willkührlich, gehen: so ist unter denjenigen, welche die concave Peripherie treffen, DA, DE, DF, DC, die, so durch den Mittelpunkt gehet, DA, die gröste, und immer die, so ihr näher, grösser als die entferntere; unter denjenigen aber, welche die convexe Peripherie treffen, DG, DK, DL, DH, die, so zwischen dem angenommenen Punkte und dem Durchmesser, DG, die kleinste, und immer jede, so ihr näher, grösser als die entfern-

entferntere. Auch sind von diesen Linien nur je zwey an beyden Seiten der kleinsten einander gleich.



Erster Theil.

Ziehe ME, MF, MC, so ist (1, 20. S.) $DM + ME > DE$. Nun ist (1, 15. Def.) $ME = MA$. Folglich ist $DM + MA$, das ist, $DA > DE$.

Da (1, 15. Def.) $ME = MF$, und MD, gemein, aber $DME > DMF$, so ist (1, 24. S.) $DE > DF$. Und eben so $DF > DC$.

Zweyter Theil.

Ziehe MK, ML, MH, so ist (1, 20. S.) $MK + KD > MD$, das ist, $> MG + GD$. Nun ist (1, 15. Def.) $MK = MG$. Folglich ist $MG + KD > MG + GD$, folglich (1, 3. Ax.) $KD > GD$, das ist, $DG < DK$.

Da in den Triangeln MLD, MKD, (1, 21. S.) $MK + KD < ML + LD$, aber (1, 15. Def.) $MK = ML$, so ist (1, 3. Ax.) $DK < DL$. Und eben so $DL < DH$.

Dritter Theil.

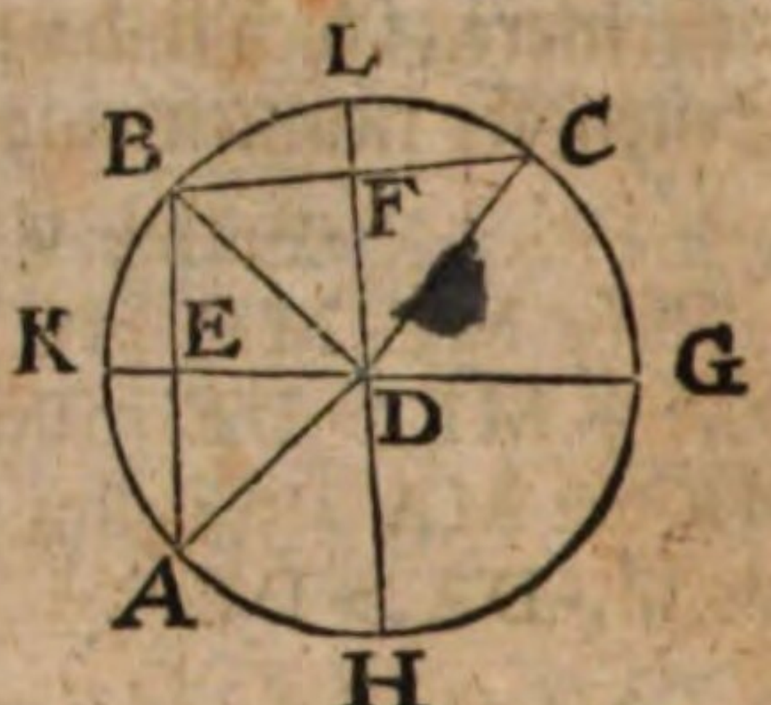
An DM setze (1, 23. S.) $DMB = DMK$, und ziehe DB, so ist, weil (1, 15. Def.) $MB = MK$, auch MD gemein, (1, 4. S.) $DB = DK$. Wäre nun ausser DB noch irgend eine andre, etwa DN, der DK gleich, so wäre auch (1, 1. Ax.) $DN = DB$, welches unmöglich, da nach obigen die der DG nähere, DB, kleiner als die entferntere, DN.

Oder: wäre $DN = DK$, so ziehe MN. Nun ist auch $MN = MK$ und MD gemein, folglich (1, 8. S.) $DMK = DMN$. Nun war $DMK = DMB$. Folglich wäre $DMN = DMB$, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Der 9. Satz.

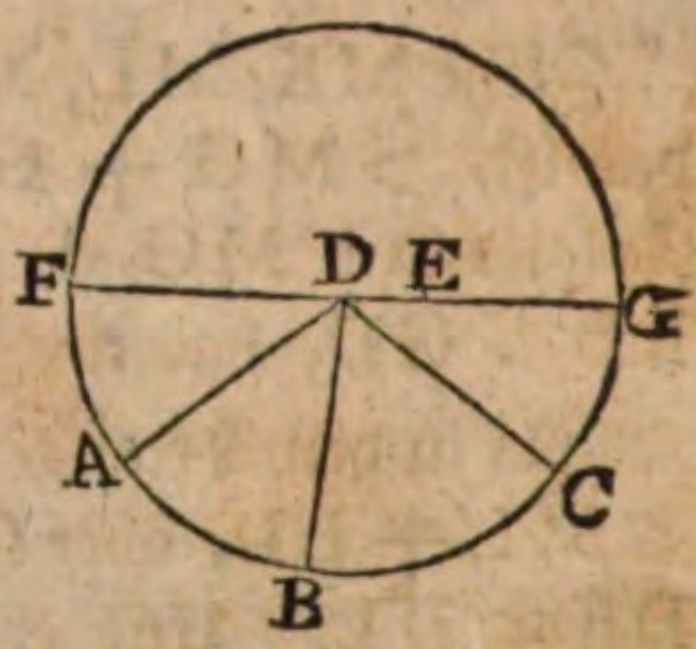
Wenn von einem innerhalb eines Cirkels, ABC, angenommnen Punkte, D, mehr als zwey gleiche gerade Linien, DA, DB, DC, zur Peripherie gehen; so ist solcher Punkt der Mittelpunkt des Cirkels.

Ziehe AB, BC, und halbire sie (1, 10. S.) in E, F. Ziehe ED, DF, und verlängre sie an beyden Seiten nach G, K, H, L.



Da AE = EB, und ED gemein, auch (1, 15. Def.) AD = DB, so ist (1, 8. S.) AED = BED, folglich (1, 10. Def.) bey E rechte Winkel, folglich (3, 1. S.) in KG der Mittelpunkt des Cirkels. Nun wird eben so bewiesen, daß auch in HL der Mittelpunkt sey. Folglich muß D solcher Mittelpunkt seyn.

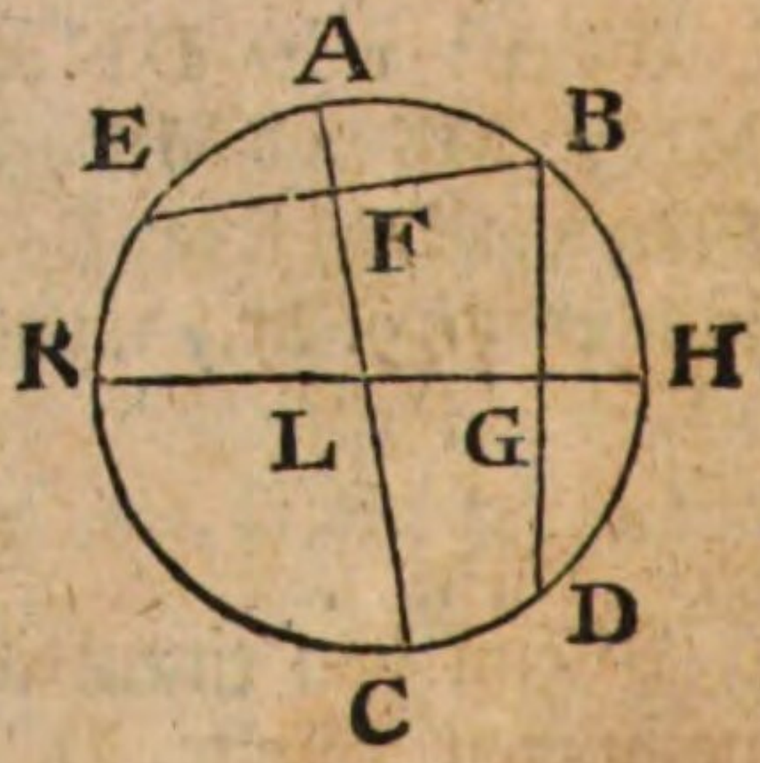
Ein andrer Beweis. Wäre D nicht der Mittelpunkt, so sey es irgend ein andrer, etwa E. Ziehe DE, und verlängre sie an beyden Seiten nach F, G, so ist FG des Cirkels Durchmesser, folglich (3, 8. S.) wäre DC > DB, DB > DA, welches gegen das Angenommene DC = DB = DA.



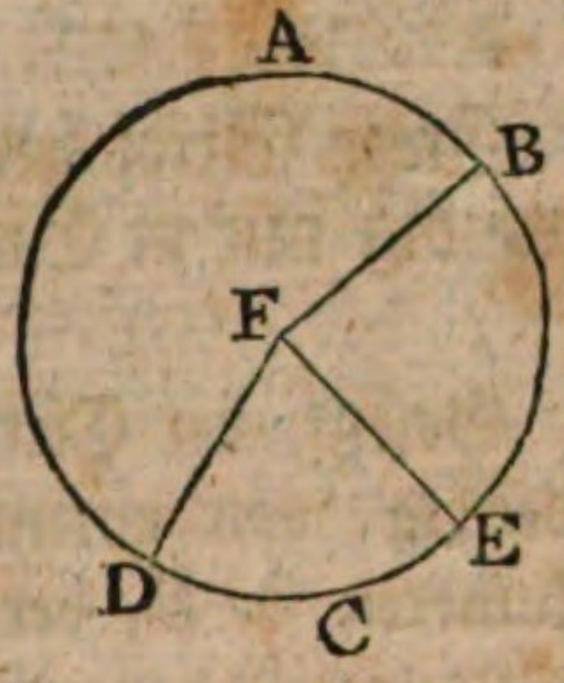
Der 10. Satz.

Ein Cirkel schneidet einen andern, ABC, nicht in mehr als zweyen Punkten.

Gesetzt er schnitte ihn in dreyen Punkten, D, B. E, so ziehe EB, BD, und halbire sie in F, G. Auf EB, BD, errichte in F, G, die FC, GK, senkrecht und verlängre sie bis A, H, so ist (3, 1. S.) L des andern Cirkels ABC Mittelpunkt. Nun wird eben so bewiesen, daß L auch des ersten Cirkels Mittelpunkt sey, welches (3, 5. S.) unmöglich.



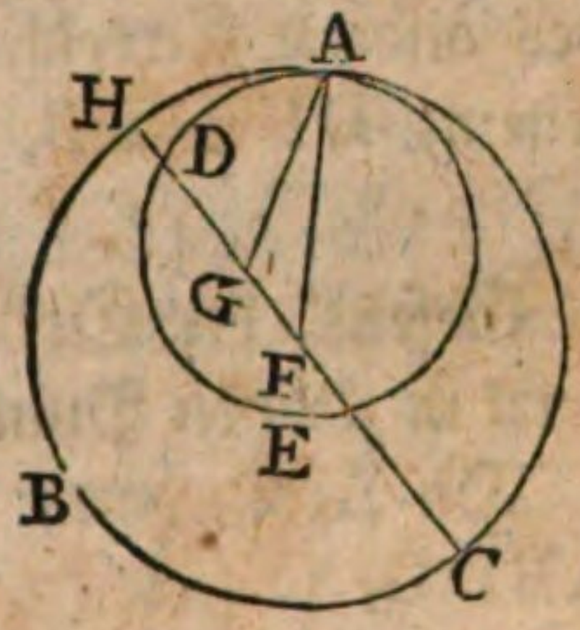
Ein



Ein andrer Beweis. Schnitte der erste Cirkel den andern ABC, in dreyen Punkten, B, E, D, so nimm (3, 1. S.) des Cirkels ABC Mittelpunkt F, und ziehe FD, FE, FB, welche (1, 15. Def.) einander gleich sind; folglich wäre (3, 9. S.) F auch des ersten Cirkels Mittelpunkt, welches (3, 5. S.) unmöglich.

Der 11. Satz.

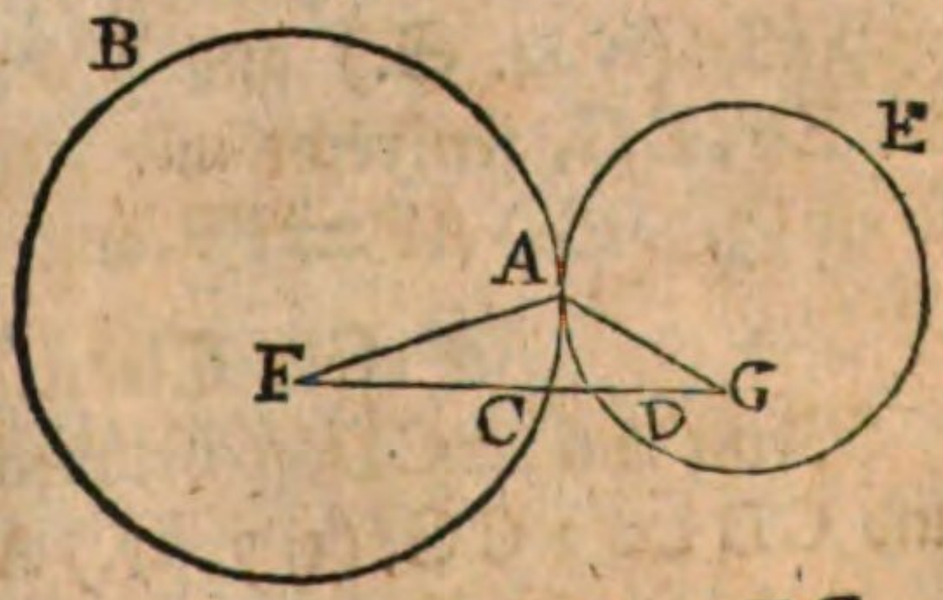
Wenn ein Cirkel ADE, einen andern, ABC, inwendig berührt: so trift die gerade Linie, welche die beyderseitigen Mittelpunkte verbindet, genugsam verlängert, den Berührungspunkt der Cirkel, A.



Nimm (3, 1. S.) des Cirkels ABC Mittelpunkt, F, und ziehe AF. Wäre nun in AF, welche man nach Belieben verlängern kann, nicht auch des Cirkels ADE Mittelpunkt, so sey er irgendwo ausser AF, etwa in G. Ziehe GF und verlängre sie an beyden Seiten nach C, H. Ziehe AG, so ist (1, 20. S.) $AG + GF > AF$. Nun ist (1, 15. Def.) $AF = FH = HG + GF$. Folglich ist $AG + GF > HG + GF$, folglich (1, 5. Ax.) $AG > HG$. Nun war des Cirkels ADE Mittelpunkt G und daher (1, 15. Def.) $AG = DG$. Folglich wäre $DG > HG$, welches (1, 9. Ax.) unmöglich ist.

Der 12. Satz.

Wenn zwey Cirkel, ABC, ADE, einander auswendig berühren: so geht die gerade Linie, welche die beyderseitigen Mittelpunkte verbindet, durch den Berührungspunkt der Cirkel, A.

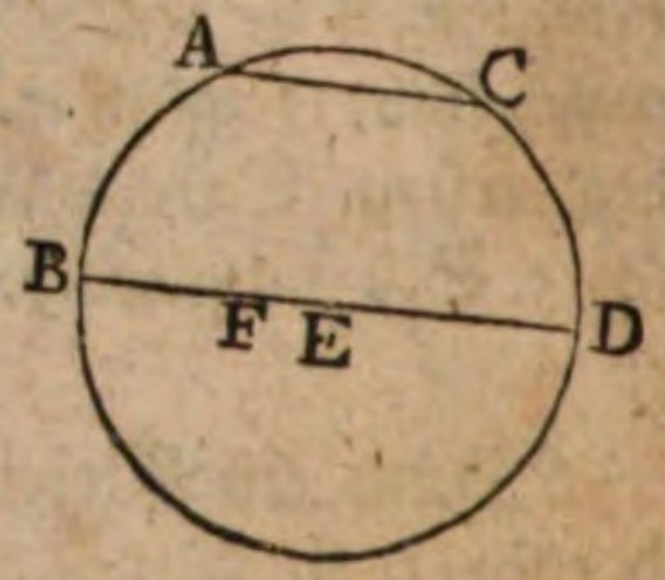


Gienge sie anderwärts durch, etwa wie FCDG, so daß F, G, die beyderseitigen Mittelpunkte wären, so ziehe AF, AG. Folglich ist (1, 15. Def.) $AF = FC$ und $AG = GD$, folglich $AF + AG = FC + GD$, folglich $AF + AG < FG$, da doch (1, 20. S.) $AF + AG > FG$.

Der 13. Satz.

Zwey Cirkel berühren einander sowohl inwendig als auswendig nur in Einem Punkte.

Erster Theil.



Gesetzt, der Cirkel ABDC, würde inwendig von einem andern in zweyen Punkten B, D, berührt, so sey E der Mittelpunkt des ersten und F der Mittelpunkt des andern Cirkels. Ziehe EF, so trift (3, 11. S.) dieselbe verlängert die Berührungspunkte B, D.

Da E der Mittelpunkt des ersten Cirkels, so ist (1, 15. Def.) DE = EB, folglich DF > FB. Nun ist F der Mittelpunkt des andern Cirkels, folglich (1, 15. Def.) DF = FB; welches jenem, DF > FB, offenbar wiederspricht.

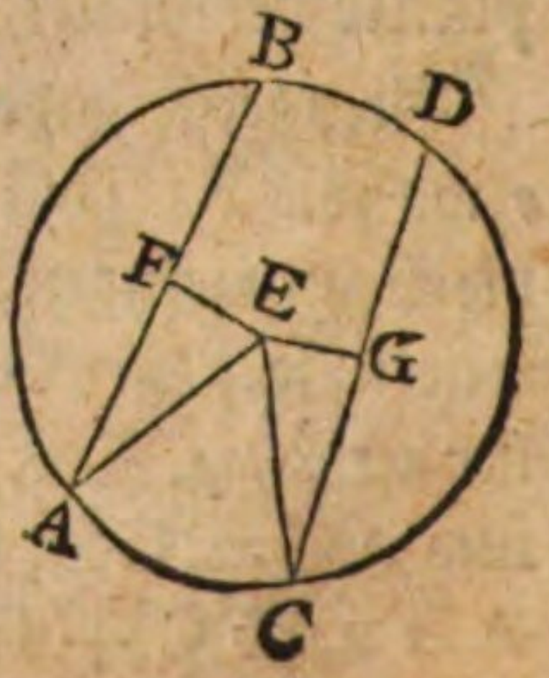
Zweyter Theil.

Gesetzt, der Cirkel ABDC, würde auswendig von einem andern in zweyen Punkten, A, C, berührt, so ziehe AC.

Da A, C, zwey Punkte in der Peripherie des ersten Cirkels ABDC, so fällt (3, 2. S.) AC innerhalb dieses Cirkels, folglich (3, 3. Def.) ausserhalb des andern Cirkels. Nun sind A, C, zwey Punkte in der Peripherie des andern Cirkels, folglich fällt (3, 2. S.) AC innerhalb des andern Cirkels; welches dem Obigen offenbar wiederspricht.

Der 14. Satz.

Wenn im Cirkel, ABDC, gerade Linien, AB, CD, einander gleich sind: so liegen sie gleich weit vom Mittelpunkte, E. Und wenn sie gleich weit vom Mittelpunkte, E, liegen, so sind sie einander gleich.



Fälle (1, 12. S.) aus E auf AB, CD, die EF, EG, senkrecht und ziehe AE, EC, so ist (3, 3. S.) AF = FB, und CG = GD.

Erster Theil.

Wenn AB = CD, so ist, weil AB = 2 AF und CD = 2 CG, (1, 7. Ax.) AF = CG.

Da

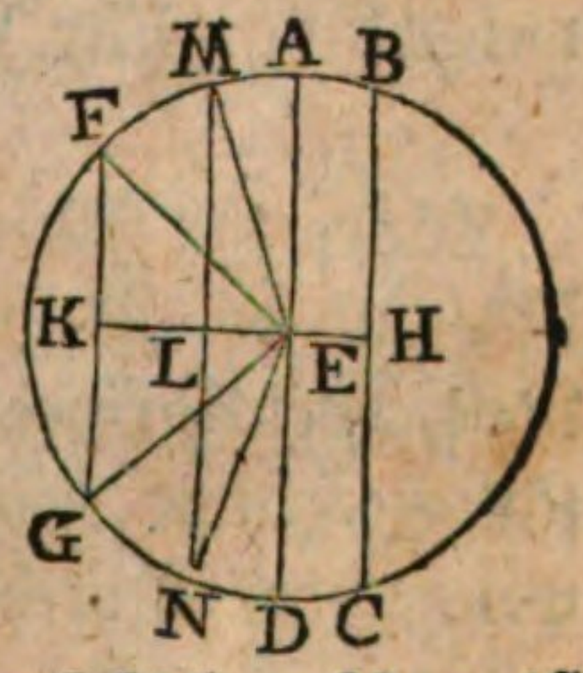
Da E des Cirkels Mittelpunkt, so ist (1, 15. Def.) AE = EC und daher □ AE = □ EC. Nun ist, weil bey F, G, rechte Winkel, (1, 47. S.) □ AE = □ AF + □ EF und □ EC = □ CG + □ EG. Folglich ist □ AF + □ EF = □ CG + □ EG, folglich, weil AF = CG, (1, 3. Ax.) □ EF = □ EG und daher EF = EG, folglich (3, 4. Def.) liegen AB, CD, gleich weit vom Mittelpunkte, E.

Zweyter Theil.

Wenn AB, CD, gleich weit vom Mittelpunkte E, liegen, das ist, (3, 4. Def.) wenn EF = EG, so ist, weil wie vorher □ AF + □ EF = □ CG + □ EG, (1, 3. Ax.) □ AF = □ CG, und daher AF = CG. Nun ist wie vorher AB = 2 AF und CD = 2 CG. Folglich ist (1, 6. Ax.) AB = CD.

Der 15. Satz.

Im Cirkel, ABCD, ist der Durchmesser, AD, die gröste Linie, und unter den übrigen jede dem Mittelpunkt, E, nähere, BC, grösser als die entferntere, FG.



Ziehe (1, 12. S.) aus E auf BC, FG, die EH, EK, senkrecht, so ist (3, 5. Def.) EK > EH. Mache daher (1, 3. S.) EL = EH. Errichte (1, 11. S.) auf EK in L die LM senkrecht und verlängre sie bis N. Ziehe EM, EN, EF, EG.

Da EH = EL, so ist (3, 14. S.) BC = MN. Nun ist (1, 20. S.) ME + EN > MN. Folglich ist ME + EN > BC. Nun ist (1, 15. Def.) ME + EN = AD. Folglich ist AD > BC.

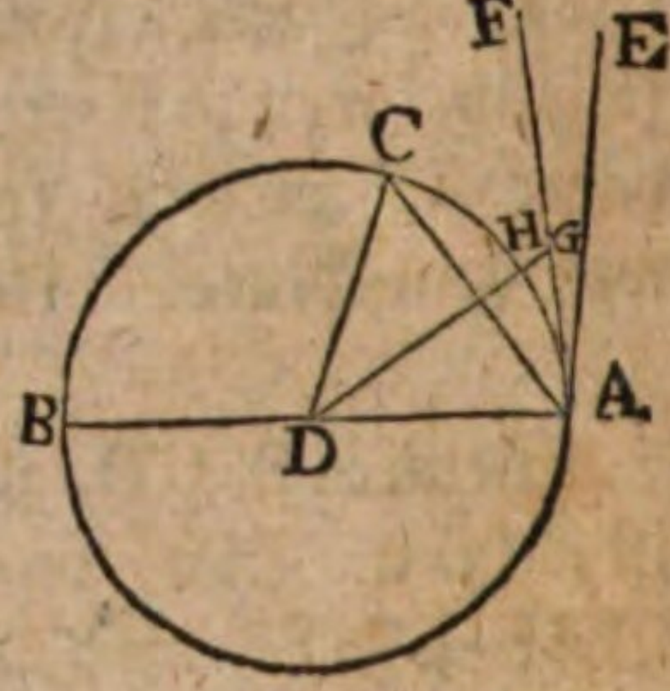
Da (1, 15. Def.) ME = FE und EN = EG, aber MEN > FEG, so ist (1, 24. S.) MN > FG. Nun war MN = BC. Folglich ist BC > FG.

Der 16. Satz.

Ein auf eines Cirkels, ABC, Durchmesser, BA, in dessen Endpunkte, A, aufgerichteter Perpendikel, AE, fällt ausserhalb des Cirkels. Ferner, zwischen den Cirkelbogen CHA und den Perpendikel, EA, fällt keine andre gerade Linie. Desgleichen

gleichen der Winkel des Halbcirkels, CHAB, ist grösser, sein Rest, CHAE, aber kleiner, als jeder geradlinicher spitzer Winkel.

Erster Theil.



Fiel der Perpendikel nicht ausserhalb des Cirkels, so falle er, wenns möglich, innerhalb, wie AC, so daß also DAC ein rechter Winkel wäre. Ziehe DC, so ist, weil (1, 15. Def.) DC = DA, (1, 5. S.) DCA = DAC, folglich beyde Winkel rechte, welches (1, 17. S.) unmöglich.

Zweyter Theil.

Fiele zwischen den Bogen CHA und dem Perpendikel, AE, eine gerade Linie, wie FA, so ziehe (1, 12. S.) auf FA aus D den Perpendikel DG, so ist, weil DGA ein rechter Winkel, (1, 17. S.) DGA > DAG, folglich (1, 19. S.) DA > DG. Nun ist (1, 15. Def.) DA = DH, folglich wäre DH > DG, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Dritter Theil.

Wäre der Winkel des Halbcirkels, welchen der Durchmesser BA und der Bogen CHA einschließt, nicht grösser, und sein Rest, welchen der Bogen CHA und der Perpendikel AE einschließt, nicht kleiner als irgend ein geradlinicher spitzer Winkel, welchen der Durchmesser BA und eine gerade Linie einschlösse, so müste diese gerade Linie, zwischen den Bogen CHA und den Perpendikel, AE, fallen, wie FA, welches nach Obigen unmöglich.

Zusatz.

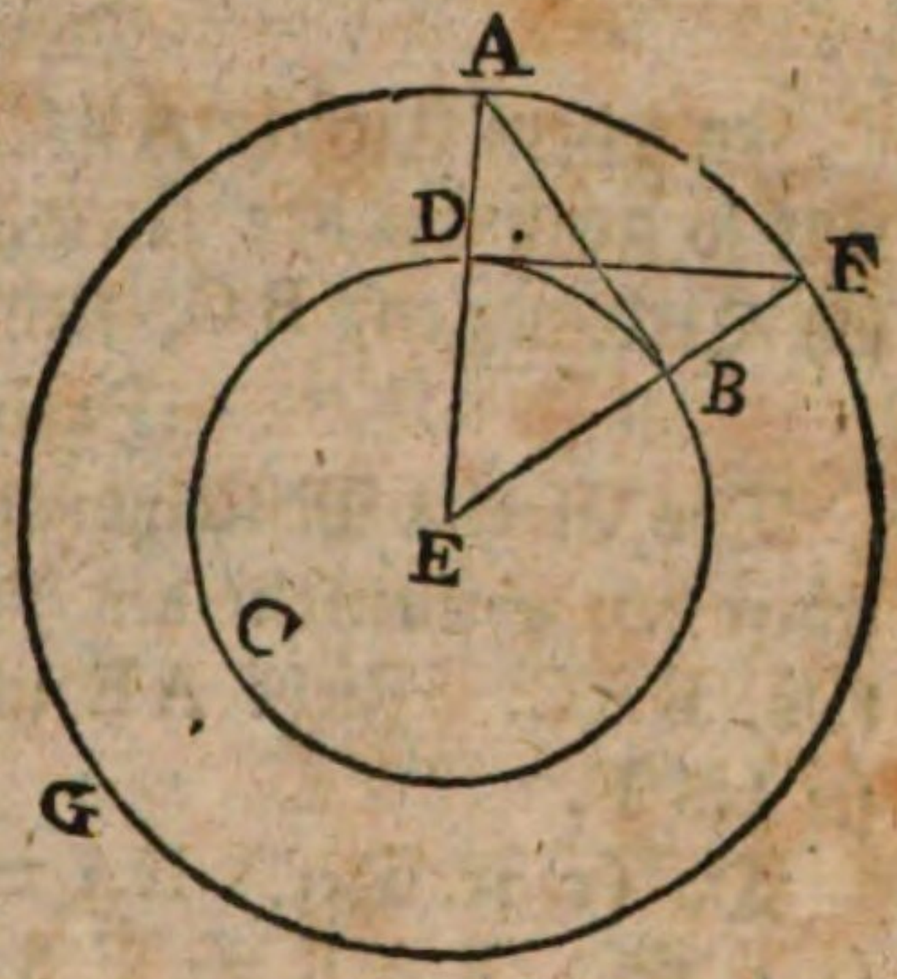
Hieraus erhellet, daß ein auf dem Durchmesser in dessen Endpunkte errichteter Perpendikel, den Cirkel berührt, und daß eine gerade Linie den Cirkel nur in Einem Punkte berührt; indem die gerade Linie, welche zwey Punkte in der Peripherie verbindet, (3, 2. S.) innerhalb des Cirkels fällt.

Der 17. Satz.

Aus einem gegebnen Punkte, A, eine gerade Linie die einen gegebnen Cirkel, BCD, berührt, zu ziehen.

Nimm

Nimm (3, 1. S.) des Cirkels Mittelpunkt, E, ziehe EA und beschreibe aus E, mit EA den Cirkel AFG. Errichte (1, 11. S.) auf EA in D die DF senkrecht. Ziehe EBF und AB, so ist AB die verlangte Linie.

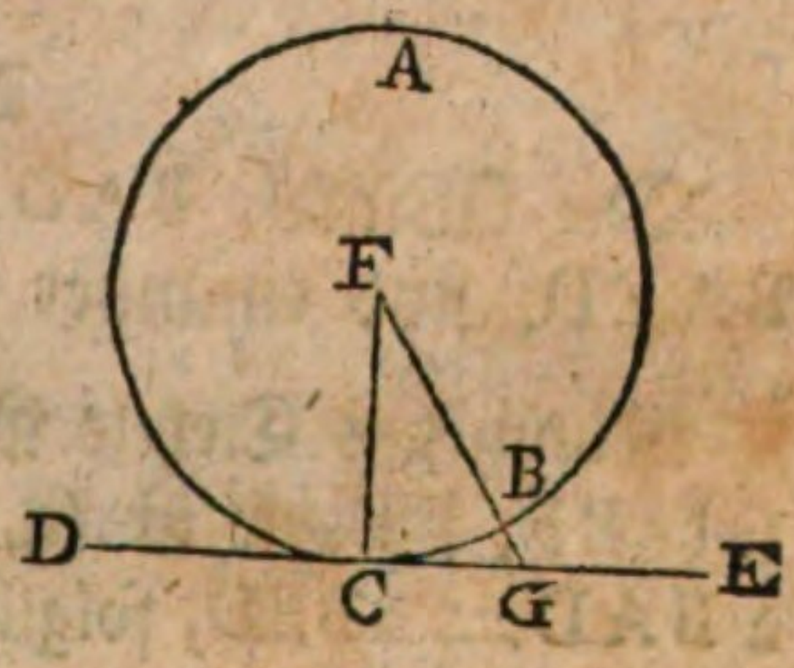


In den Triangeln, ABE, FDE, ist (1, 15. Def.) EA = EF, und EB = ED, auch der Winkel AEF gemein, folglich (1, 4. S.) EBA = EDF. Nun ist EDF, folglich auch EBA ein rechter Winkel, das ist, AB senkrecht auf EB. Folglich (3, 16. Zus.) AB eine Tangente des Cirkels, BCD.

Der 18. Satz.

Auf der Tangente, DE, eines Cirkels, ABC, stehet die gerade Linie vom Mittelpunkte, F, zum Berührungspunkte, C, senkrecht.

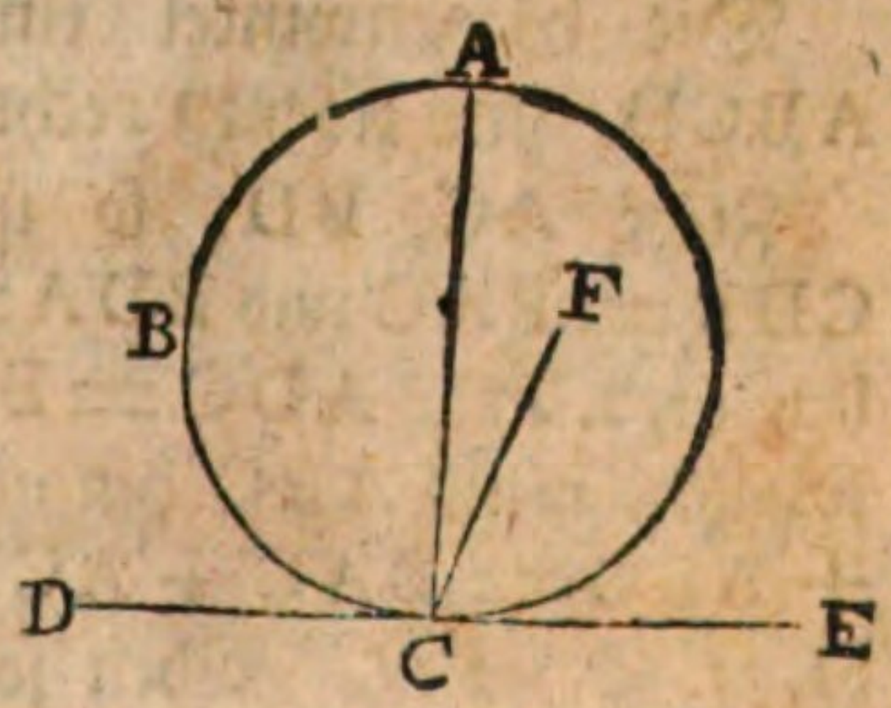
Wäre FC nicht senkrecht auf DE, so sey es eine andre, etwa FG, und daher FGC ein rechter Winkel, folglich (1, 17. S.) FCG < FGC, folglich (1, 19. S.) FC > FG. Nun ist (1, 15. Def.) FC = FB. Folglich wäre FB > FG, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.



Der 19. Satz.

Ist auf der Tangente, DE, eines Cirkels, ABC, im Berührungspunkte, C, eine gerade Linie, AC, senkrecht: so ist in ihr des Cirkels Mittelpunkt.

Wäre der Mittelpunkt nicht in AC, so sey er ausser ihr irgendwo, etwa in F. Ziehe FC, welche (3, 18. S.) auf DE senkrecht; daher FCE ein rechter Winkel. Nun war auch ACE ein rechter Winkel. Folglich wäre ACE = FCE, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.



Der

Der 20. Satz.

In jedem Cirkel, ABC, ist der Centriwinkel, BEC, doppelt so groß als der Peripheriewinkel, wenn beyde auf einerley Cirkelbogen, BC, stehen.

Erster Fall.

Des Cirkels Mittelpunkt E, sey zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels, BAC. Ziehe AE und verlängre sie bis F.

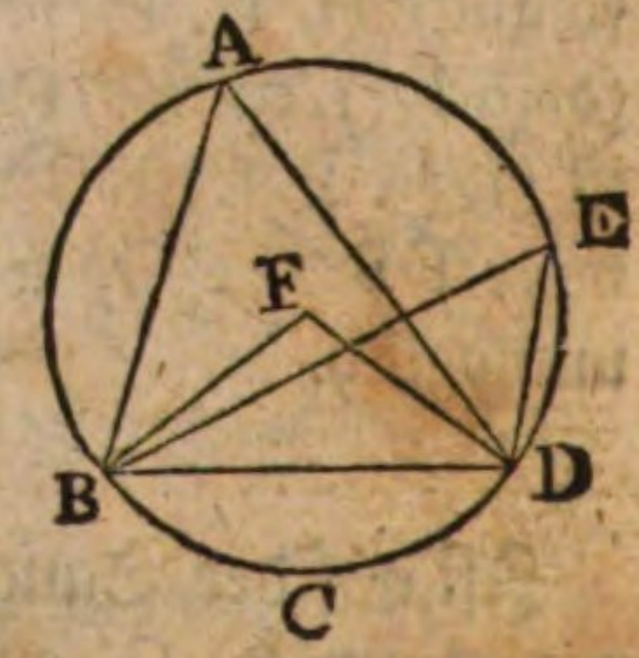
Da (1, 15. Def.) EA = EB, so ist (1, 5. S.) EAB = EBA, folglich (1, 32. S.) BEF = 2 EAB. Eben so ist FEC = 2 EAC, folglich BEC = 2 BAC.

Zweyter Fall.

Der Mittelpunkt, E, sey ausserhalb der Schenkel des Peripheriewinkels, BDC. Ziehe DE und verlängre sie bis G, so wird auf eben die Art bewiesen, daß GEC = 2 GDC und GEB = 2 GDB, folglich (1, 3. Ax.) BEC = 2 BDC.

Der 21. Satz.

Die Winkel, BAD, BED, in einerley Cirkelabschnitte, BAED, sind einander gleich.



Nimm des Cirkels Mittelpunkt F und ziehe BF, FD, so ist (3, 20. S.) BFD = 2 BAD = 2 BED, folglich BAD = BED.

Der 22. Satz.

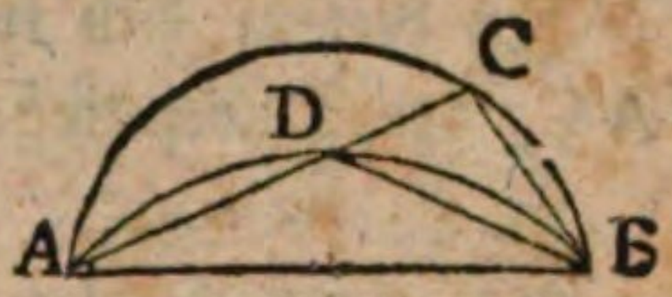
Die Gegenwinkel einer vierseitigen Figur im Cirkel, ABCD, sind zweyen rechten gleich.

Ziehe AC, BD, so ist (3, 21. S.) CDB = BAC und BDA = ACB, folglich (1, 2. Ax.) ADC = BAC + ACB, folglich, wenn ABC hinzukommt, ADC + ABC = BAC + ACB + ABC = (1, 32. S.) 2 R. Eben so wird dies von BAD, DCB, bewiesen.

Der

Der 23. Satz.

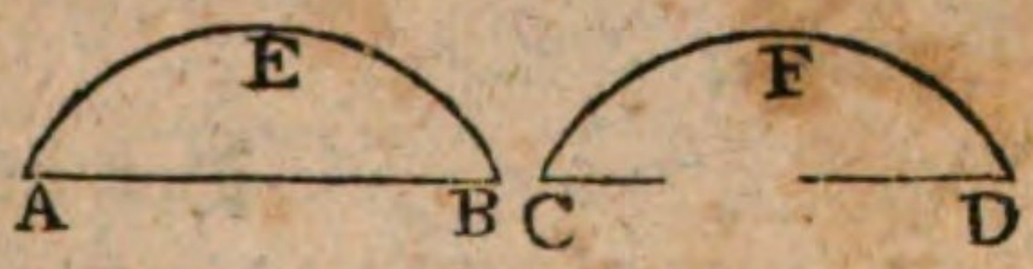
Auf Einer geraden Linie, AB, können nicht zwey Cirkelabschnitte, die änlich und ungleich sind, an einerley Seite beschrieben werden.



Wäre dies möglich, so seyen die Cirkelabschnitte, ACB, ADB, ungleich und änlich. Ziehe willkührlich AD, und verlängre sie bis C. Ziehe CB, DB, so ist, weil die Abschnitte änlich, (3, 11. Def.) ADB = ACB, welches (1, 16. S.) unmöglich.

Der 24. Satz.

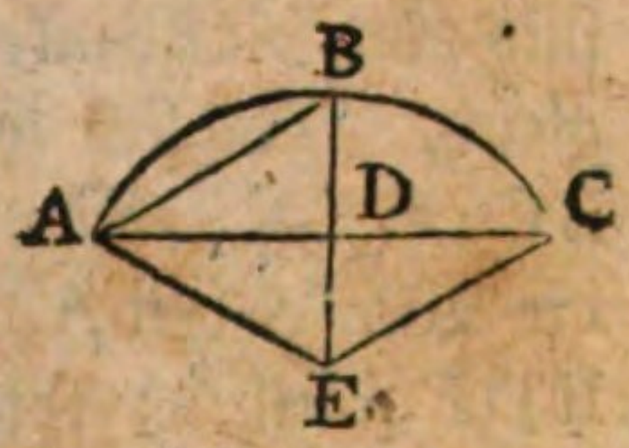
Aenliche Cirkelabschnitte, AEB, CFD, über gleichen geraden Linien, AB, CD, sind einander gleich.



Bringe AEB über CFD und lege A auf C und AB auf CD, so fällt, (weil AB = CD) B auf D. Nun sind die Abschnitte AEB, CFD, über CD, änlich, folglich (3, 23. S.) können sie nicht ungleich seyn.

Der 25. Satz.

Einen Cirkel, dessen Abschnitt, ABC, gegeben ist, zu beschreiben.



Halbire (1, 10. S.) AC in D, und ziehe (1, 11. S.) auf AC in D die DB senkrecht. Ziehe AB, so ist ABD entweder grösser, oder eben so groß, oder kleiner als BAD.

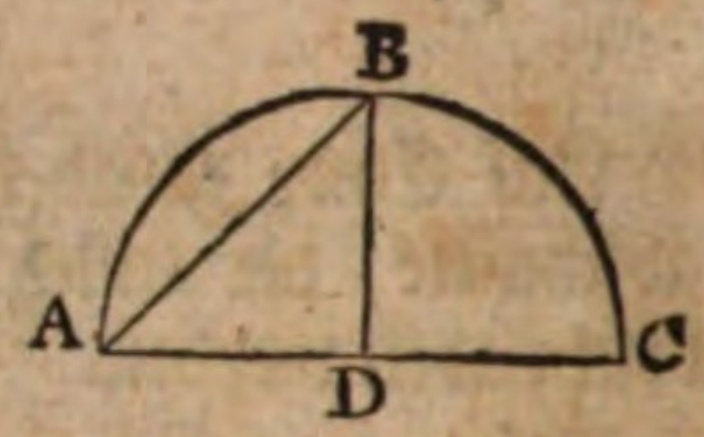
Erster Fall.

Ist ABD > BAD, so setze an BA (1, 23. S.) BAE = ABD, und verlängre BD bis E. Folglich ist (1, 6. S.) BE = EA. Nun ist, weil AD = DC, und DE gemein, auch bey D rechte Winkel, (1, 4. S.) AE = EC. Folglich ist (3, 9. S.) E der Mittelpunkt des Cirkels ABC.

In diesem Fall ist also das Segment ABC, kleiner als ein Halbcirkel, weil das Centrum E ausserhalb des Segments liegt.

Zweyter

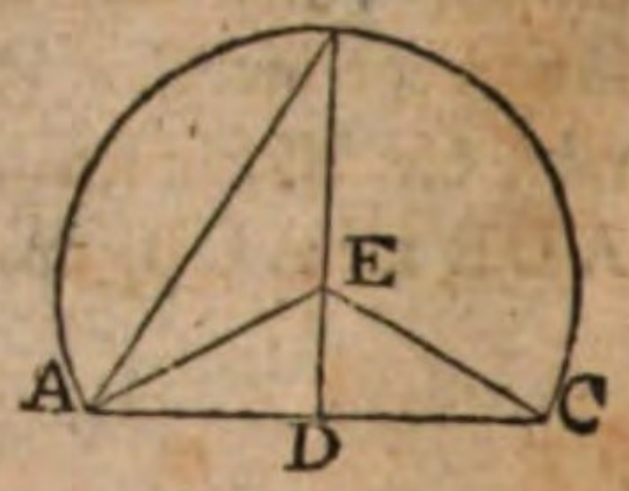
Zweyter Fall.



Ist ABD = BAD, so ist (1, 6. S.) AD = DB. Nun ist auch AD = DC. Folglich (3, 9. S.) D der Mittelpunkt des Cirkels ABC.

In diesem Fall ist das Segment ABC ein Halbcirkel, weil AC, der Durchmesser.

Dritter Fall.

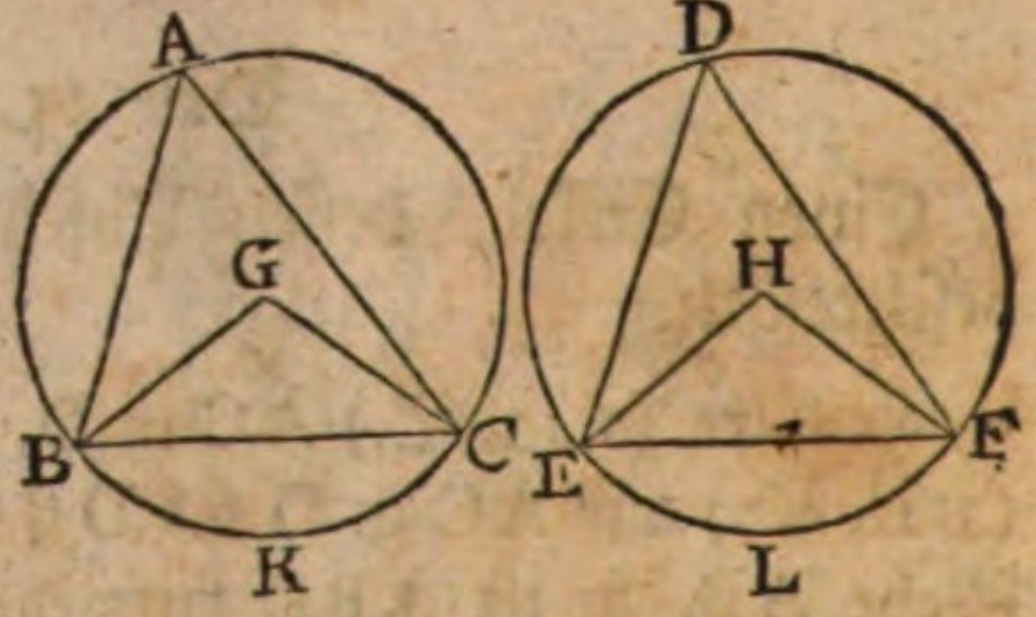


Ist ABD < BAD, so setze an BA (1, 23. S.) BAE = ABD und ziehe EC, so wird auf gleiche Art bewiesen, daß AE = EB = EC, und daher E der Mittelpunkt des Cirkels, ABC, sey.

In diesem Fall ist das Segment, ABC, grösser als ein Halbcirkel, weil das Centrum innerhalb des Segments liegt.

Der 26. Satz.

In gleichen Cirkeln, ABC, DEF, stehen gleiche Winkel, es seyen Centri- oder Peripheriewinkel, BGC, EHF; BAC, EDF, auch auf gleichen Bogen, BKC, ELF.

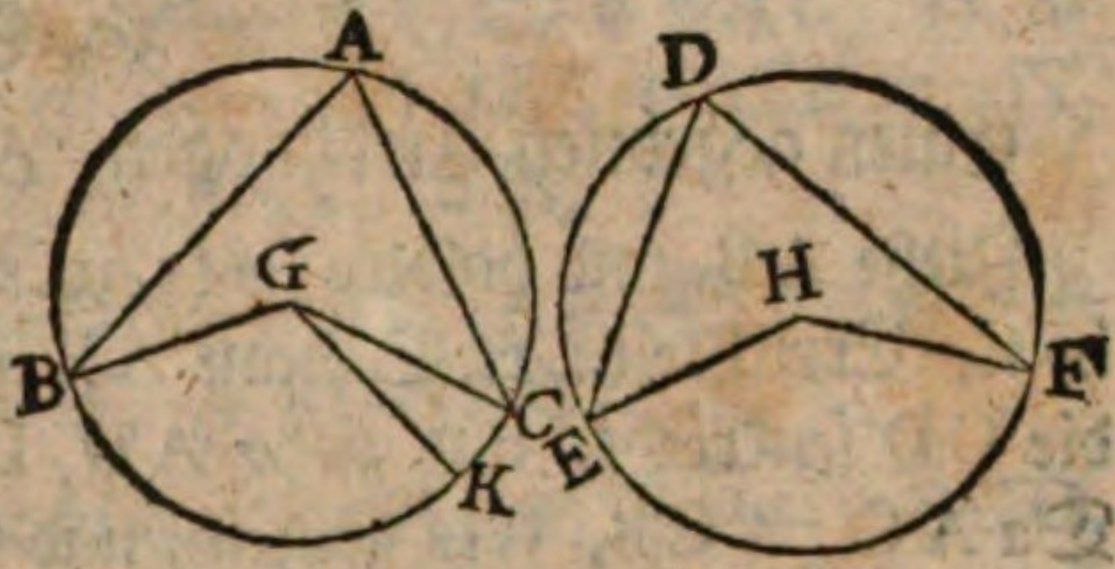


Ziehe BC, EF, so sind, weil die Cirkel gleich, (3, 1. Def.) auch ihre Halbmesser, BG, GC, EH, HF, gleich. Nun sind auch die Winkel bey G, H, gleich. Folglich ist (1, 4. S.) BC = EF. Nun sind, weil die Winkel bey A, D, gleich, (3, 11. Def.) die Segmente BAC, EDF, änlich; folglich (3, 24. S.) auch gleich. Nun sind die ganzen Cirkel gleich; folglich auch die übrigen Segmente BKC, ELF, folglich auch die Bogen BKC, ELF.

Der 27. Satz.

In gleichen Cirkeln, ABC, DEF, sind Winkel, die auf gleichen Bogen, BC, EF, stehen, es seyen Centri- oder Peripheriewinkel, BGC, EHF; BAC, EDF, einander gleich.

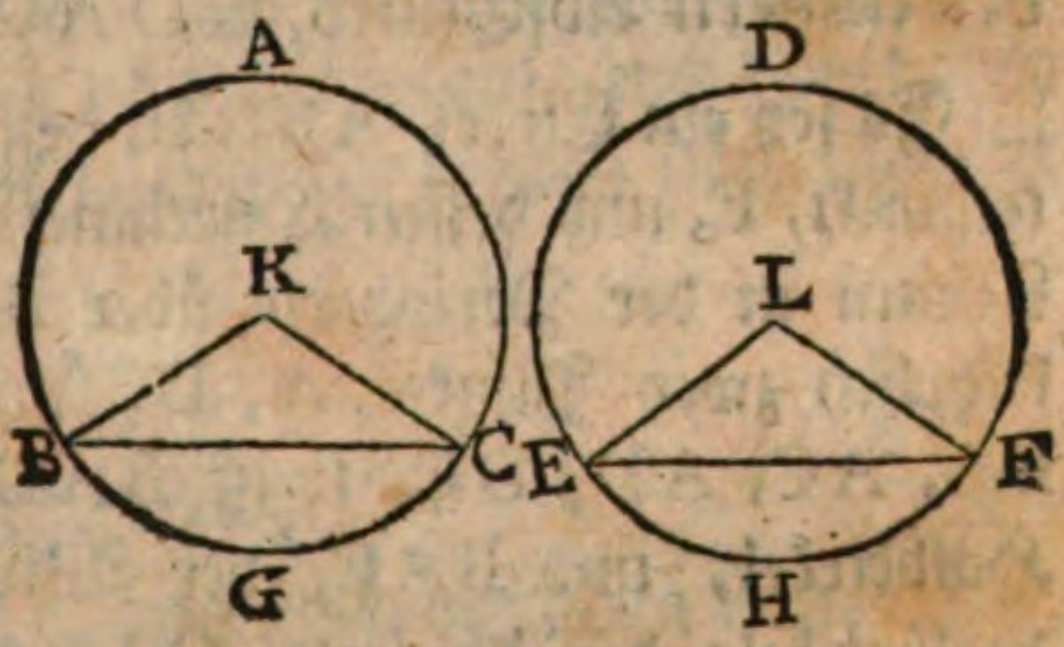
Sind



Sind BGC, EHF, gleich, so sind (3, 20. S.) auch BAC, EDF, gleich. Wären aber BGC, EHF, ungleich, so wäre einer davon, etwa BGC, grösser.. Es sey daher BGK = EHF, folglich ist (3, 26. S.) BK = EF. Nun ist angenommen BC = EF. Folglich wäre BC = BK, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Der 28. Satz.

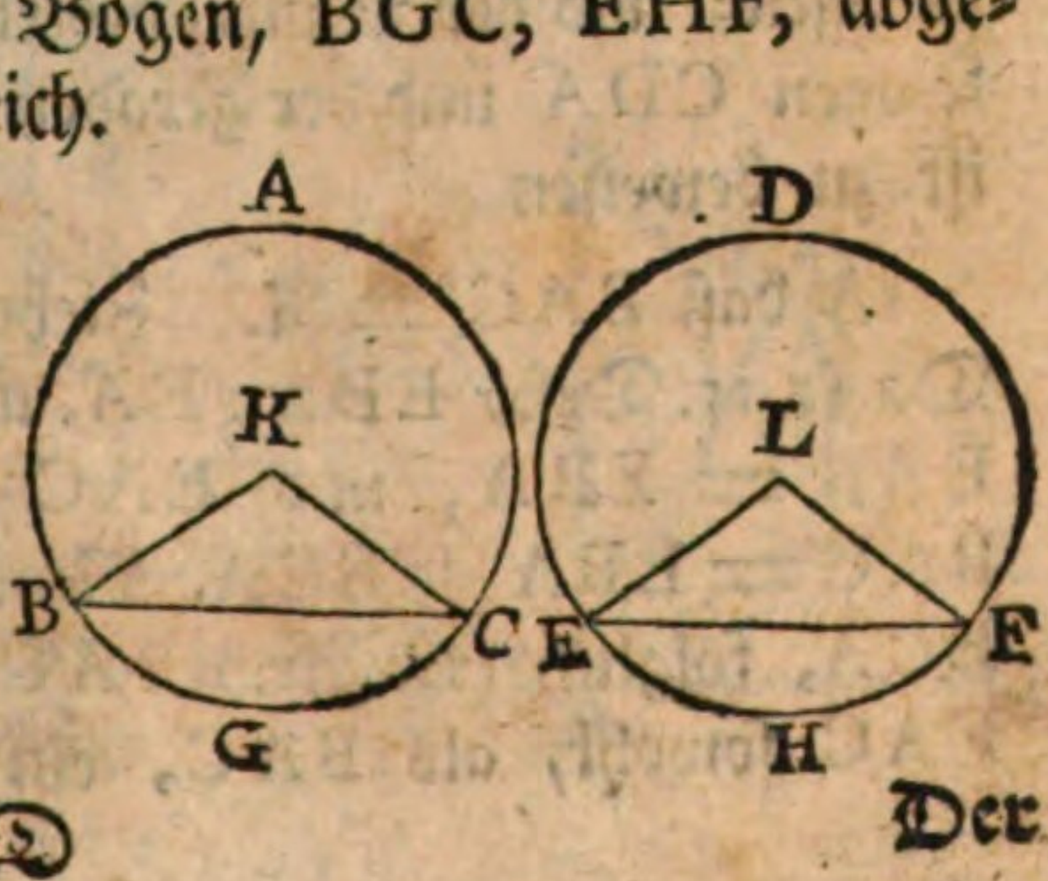
In gleichen Cirkeln, ABC, DEF, sind die von gleichen geraden Linien, BC, EF, abgeschnittnen Bogen einander gleich; der gröffre, BAC, nämlich dem grössern, EDF, und der kleinere, BGC, dem kleinern, EHF.



Nimm der Cirkel Mittelpunkte, K, L, und ziehe die Halbmesser BK, KC, EL, LF, welche, da die Cirkel gleich, (3, 1. Def.) auch gleich sind. Nun ist auch BC = EF, folglich (1, 8. S.) die Winkel bey K, L, gleich, folglich (3, 26. S.) auch die Bogen BGC, EHF, folglich, weil die Cirkel gleich, auch die Bogen BAC, EDF.

Der 29. Satz.

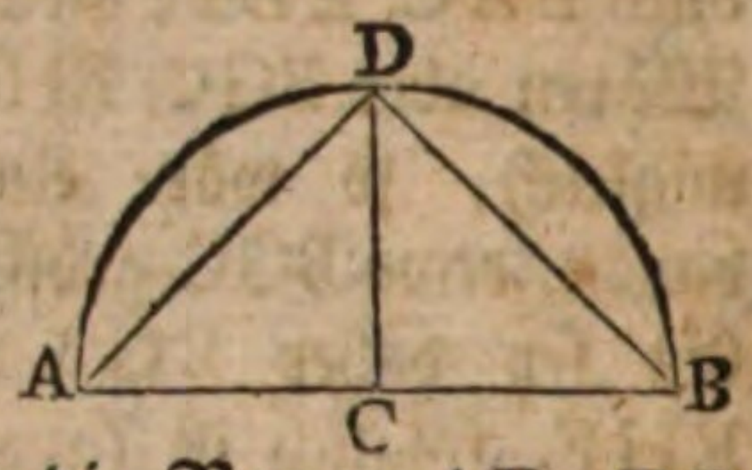
In gleichen Cirkeln, ABC, DEF, sind die geraden Linien, BC, EF, von denen gleiche Bogen, BGC, EHF, abgeschnitten werden, einander gleich.



Nimm die Mittelpunkte K, L, und ziehe die Halbmesser BK, KC, EL, LF, welche (3, 1. Def.) gleich sind. Nun sind, weil BGC = EHF, (3, 27. S.) auch die Winkel bey K, L, gleich. Folglich ist (1, 4. S.) BC = EF.

Der 30. Satz.

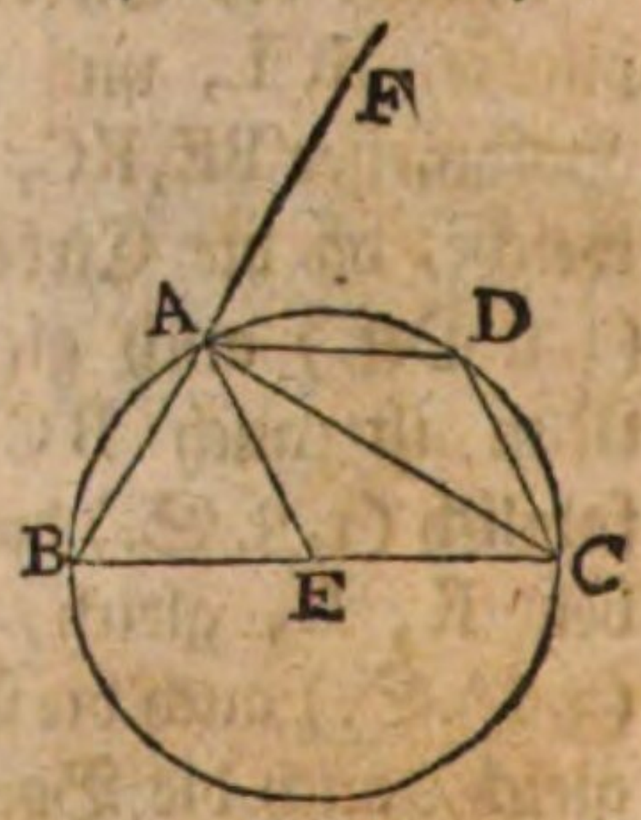
Einen gegebnen Cirkelbogen, ADB, zu halbiren.



Ziehe AB, und halbire sie (1, 10. S.) in C. Errichte (1, 11. S.) auf AB in C die CD senkrecht, und ziehe AD, DB. Da AC = CB, CD gemein, und bey C rechte Winkel, so ist (1, 4. S.) AD = DB, folglich (3, 28. S.) auch die Bogen AD, DB, einander gleich.

Der 31. Satz.

Der Winkel im Halbcirkel, BAC, ist ein rechter; aber der im grössern Abschnitt, ABC, kleiner als ein rechter, und der im kleinern Abschnitt, ADC, grösser als ein rechter. Auch ist der Winkel des grössern Abschnitts, CBAC, grösser, des kleinern Abschnitts, CDAC, aber kleiner, als ein rechter.



Es sey ein Cirkel, ABCD, dessen Mittelpunkt, E, und dessen Durchmesser, BC. Nimm in der Peripherie über BC willkührlich zwey Punkte A, D, und ziehe BA, AC, AD, DC, so ist BADC, ein Halbcirkel, und BAC, der Winkel im Halbcirkel; der Abschnitt CABC, grösser als ein Halbcirkel, und der Winkel im grössern Abschnitt, ABC; der Abschnitt CADC, kleiner als ein Halbcirkel, und der Winkel im kleinern Abschnitte, ADC. Der Winkel des grössern Abschnitts wird von dem Bogen CBA und der geraden Linie AC eingeschlossen; und der Winkel des kleinern Abschnitts, wird von dem Bogen CDA und der geraden Linie AC eingeschlossen. Nun ist zu beweisen

1.) daß BAC = R. Ziehe EA, und verlängre BA nach F. Da (1, 15. Def.) EB = EA, und EA = EC, so ist (1, 5. S.) EAB = EBA, und EAC = ECA, folglich (1, 2. Ax.) BAC = EBA + ECA. Nun ist (1, 32. S.) FAC = EBA + ECA, folglich (1, 1. Ax.) BAC = FAC, folglich (1, 10. Def.) FAC sowohl, als BAC, ein rechter Winkel. Oder: Da

(1, 32. S.)

(1, 32. S.) AEC = 2 BAE, und AEB = 2 EAC, so ist AEC + AEB = 2 BAC. Nun ist (1, 13. S.) AEC + AEB = 2 R, folglich 2 BAC = 2 R, folglich BAC = R.

2.) daß ABC < R. Da im △ ABC (1, 32. S.) ABC + BAC < 2 R, aber BAC = R, so ist ABC < R.

3.) daß ADC > R. Da in der vierseitigen Figur ABCD, (3, 22. S.) ABC + ADC = 2 R, aber ABC < R, so ist ADC > R.

4.) daß der Winkel CBAC > R. Denn er ist offenbar grösser, als der rechte Winkel BAC.

5.) daß der Winkel CDAC < R. Denn er ist offenbar kleiner, als der rechte Winkel FAC.

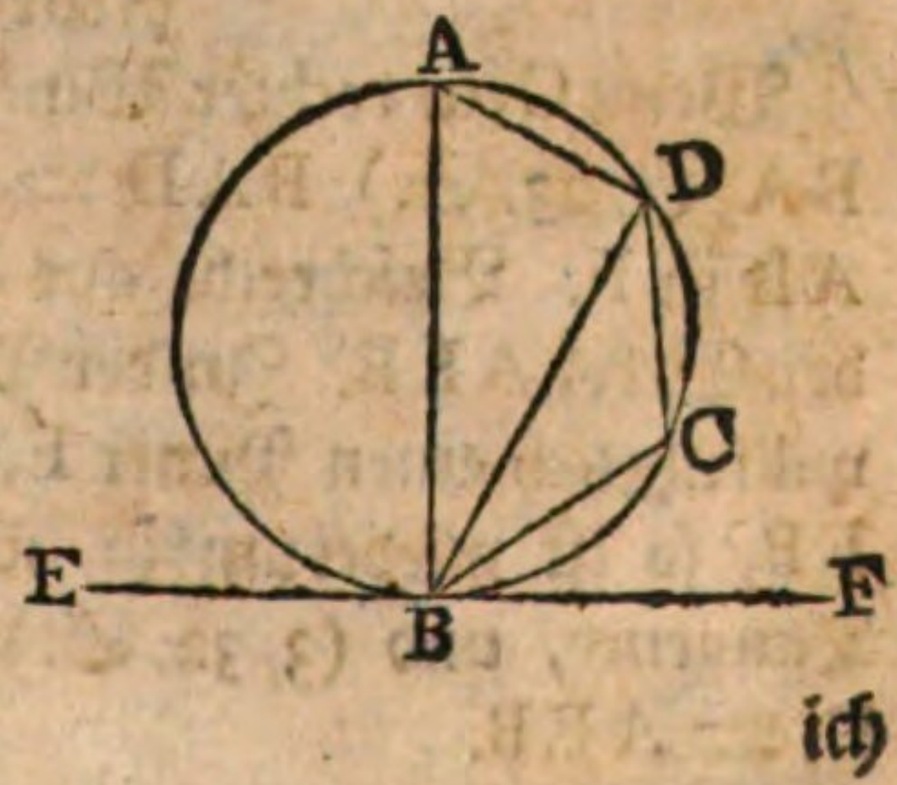
Zusatz.

Hieraus erhellet, wenn in einem Triangel ein Winkel den beyden übrigen zusammen gleich, daß er alsdenn ein rechter sey, weil sein Nebenwinkel diesen beyden übrigen, und daher ihm selbst gleich, folglich (1, 10. Def.) jeder der beyden Nebenwinkel ein rechter ist.

Der 32. Satz.

Wenn ein Cirkel, ABCD, von einer geraden Linie, EF, berührt wird, und vom Berührungspunkte B zur Peripherie eine gerade Linie, BD, geht, die den Cirkel schneidet: so sind die Winkel, welche sie mit der berührenden Linie macht, FBD, EBD, den Winkeln in den verwechselten Cirkelabschnitten gleich. (Der disseitige Winkel, FBD, nämlich dem im jenseitigen Abschnitte, und der jenseitige Winkel, EBD, dem im disseitigen Abschnitte.)

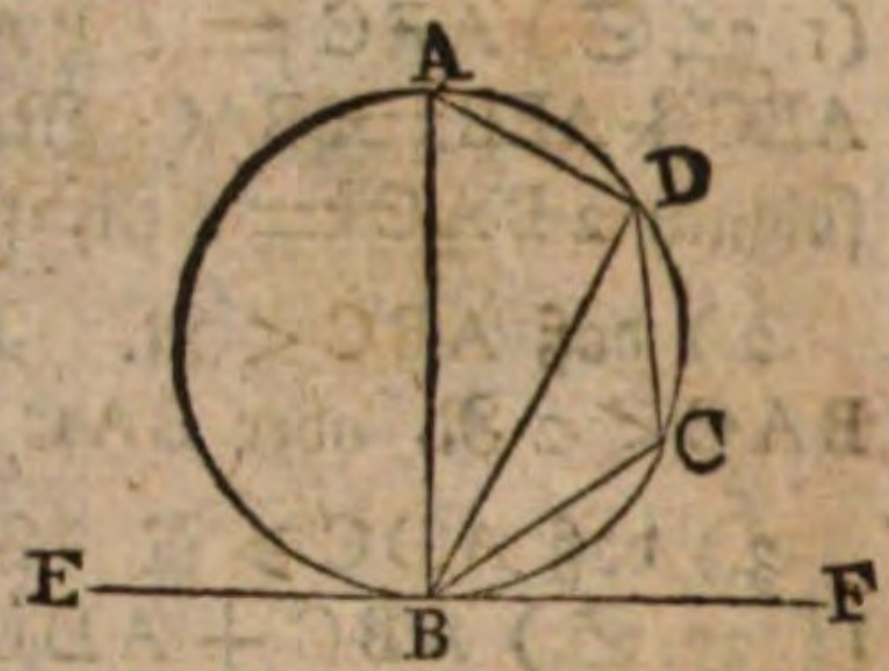
Errichte (1, 11. S.) auf EF in B die BA senkrecht. Im Bogen BD nimm willkührlich einen Punkt C, und ziehe AD, DC, CB.



Da (3, 19. S.) in BA, welche auf der Tangente EF in B senkrecht, der Mittelpunkt des Cirkels ist, folg-

ich

lich BA der Durchmesser, so ist (3, 31. S.) ADB ein rechter Winkel, folglich ADB = ABF, und (1, 32. S.) ADB = DAB + ABD, folglich DAB + ABD = ABF, folglich, wenn man ABD wegnimmt, (1, 3. Ax.) DAB = FBD.



Da (1, 13. S.) FBD + EBD = 2 R, und in der vierseitigen Figur, ABCD, (3, 22. S.) DAB + DCB = 2 R, so ist DAB + DCB = FBD + EBD. Nun war DAB = FBD, folglich ist (1, 3. Ax.) DCB = EBD.

Der 33. Satz.

Auf einer gegebnen geraden Linie, AB, ein Cirkelsegment zu beschreiben, welches einen gegebnen geradlinichen Winkel, C, faßt.

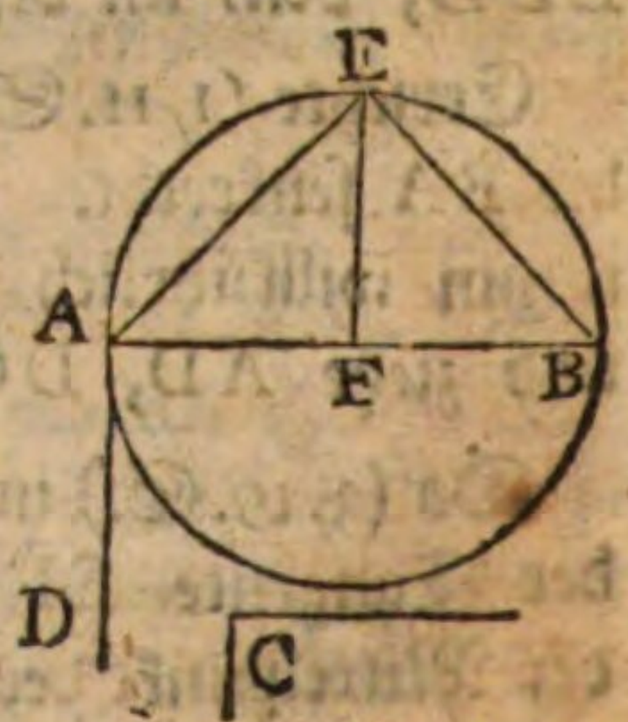
Erster Fall.

Wenn C ein spißer Winkel ist. Setze an BA, (1, 23. S.) BAD = C. Errichte auf DA (1, 11. S.) die AE senkrecht und halbire (1, 10. S.) AB in F. Errichte auf AB in F (1, 11. S.) die FG senkrecht, und ziehe GB, so ist, weil AF = FB, FG gemein, und bey F rechte Winkel, (1, 4. S.) AG = GB. Beschreibe aus G, mit GA, GB, den Cirkel ABE, und ziehe BE.

Da DA auf dem Durchmesser AE senkrecht, so berührt sie (3, 16. S.) den Cirkel in A, folglich ist (3, 32. S.) BAD = AEB. Nun ist BAD = C. Folglich ist AEB = C.

Zweyter Fall.

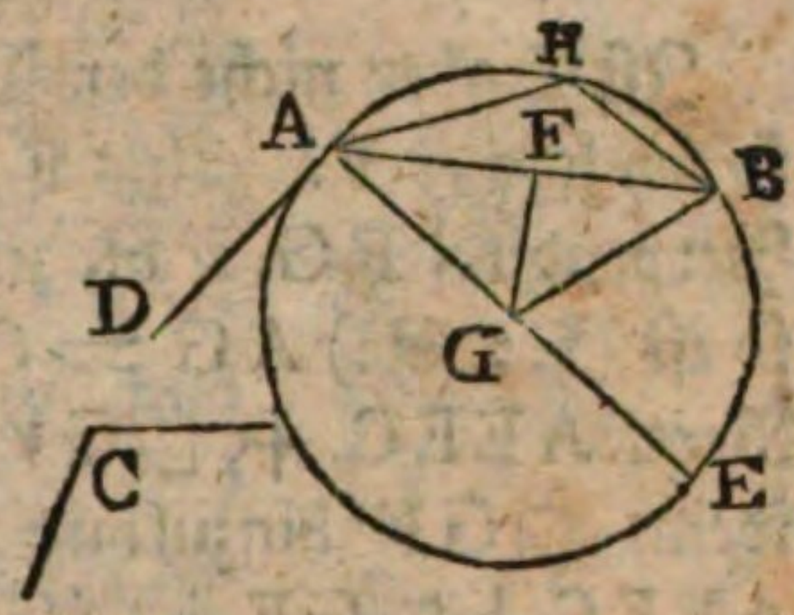
Wenn C ein rechter Winkel ist. Setze an BA (1, 23. S.) BAD = C, und halbire AB in F. Beschreibe aus F mit FA, FB, den Cirkel AEB. In der Peripherie nimm willkührlich einen Punkt E, und ziehe AE, EB, so ist wiederum (3, 16. S.) DA eine Tangente, und (3, 32. S.) BAD, das ist, C, = AEB.



Dritter

Dritter Fall.

Wenn C ein stumpfer Winkel ist.

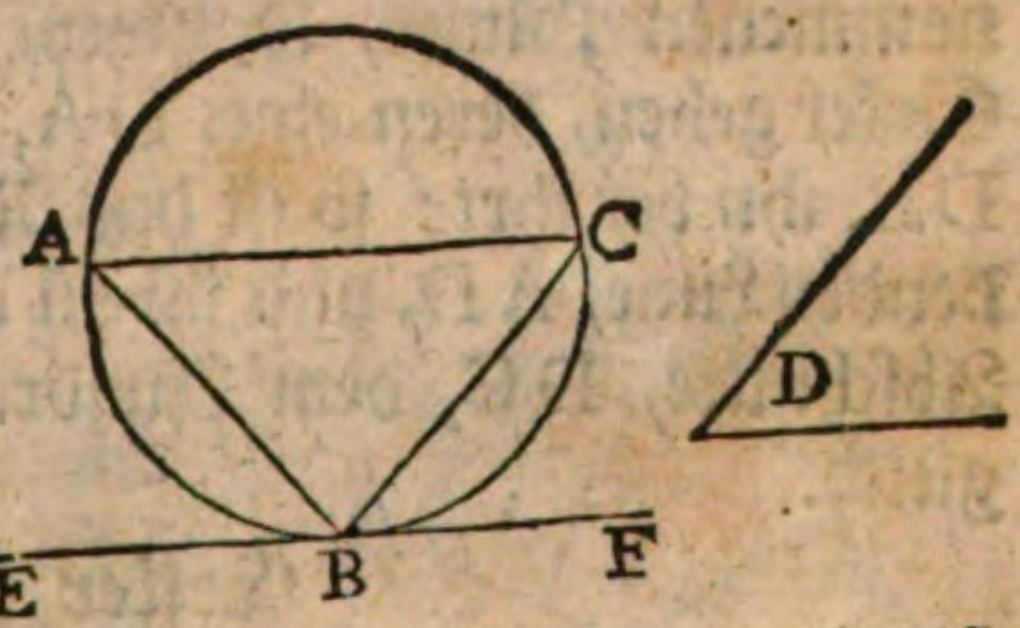


An BA setze (1, 23. S.) BAD = C. Auf DA errichte (1, 11. S.) die AE senkrecht. Halbire AB in F, und errichte auf ihr die FG senkrecht. Ziehe GB, so ist, weil AF = FB, FG gemein, und bey F rechte Winkel, (1, 4. S.) AG = GB. Aus G beschreibe mit GA, GB, den Cirkel AEB. Nimm in dem Bogen AB willkührlich den Punkt H, und ziehe AH, HB.

Da DA auf dem Durchmesser AE senkrecht, so ist sie (3, 16. S.) eine Tangente, folglich ist (3, 32. S.) BAD, das ist, C, = AHB.

Der 34. Satz.

Von einem gegebnen Cirkel, ABC, ein Segment abzuschneiden, welches einen gegebnen geradlinichen Winkel, D, faßt.



Ziehe (3, 17. S.) die Tangente EBF. An FB setze in B (1, 23. S.) FBC = D. In der Peripherie nimm jenseits willkührlich den Punkt A, und ziehe AB, AC.

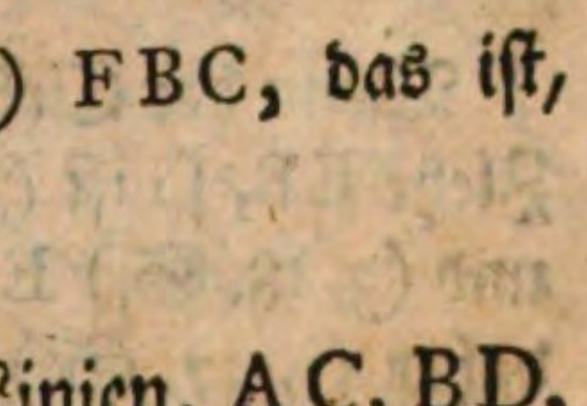
Da EF eine Tangente, so ist (3, 32. S.) FBC, das ist, D = BAC.

Der 35. Satz.

Wenn im Cirkel, ABCD, zwey gerade Linien, AC, BD, einander schneiden: so ist das Rectangel aus den Abschnitten der einen, AE, EC, dem Rectangel aus den Abschnitten der andern, BE, ED, gleich.

Erster Fall.

Ist E, wo sich die beyden Linien schneiden, der Mittelpunkt des Cirkels, so sind die Abschnitte (1, 15. Def.) einander gleich, und daher offenbar Rect. AEEC = Rect. BEED.



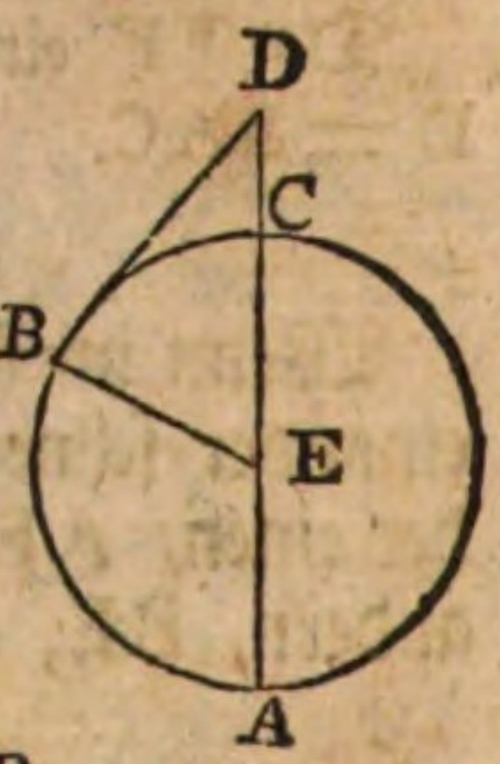
Zweyter Fall.

Ist E aber nicht der Mittelpunkt des Cirkels, so sey solcher F. Aus F fälle auf AC, BD, die Perpendikel FG, FH, und ziehe FB, FC, FE, so ist (3, 3. S.) AG = GC, folglich (2, 5. S.) Rect. AEEC + □GE = □GC, folglich, wenn □GF hinzukömmt, (1, 2. Ax.) Rect. AEEC + □GE + □GF = □GC + □GF.
Nun ist, weil bey G rechte Winkel, (1, 47. S.) □GE + □GF = □FE, und □GC + □GF = □FC. Folglich ist Rect. AEEC + □FE = □FC. Nun wird eben so bewiesen, daß Rect. DEEB + □FE = □FC. Folglich ist Rect. AEEC + □FE = Rect. DEEB + □FE, folglich, wenn man □FE wegnimmt, Rect. AEEC = Rect. DEEB.

Der 36. Satz.

Wenn von einem ausserhalb eines Cirkels, ABC, angenommenen Punkte, D, zwey gerade Linien, DA, DB, zum Cirkel gehen, deren eine, DA, den Cirkel schneidet, die andre, DB, ihn berührt: so ist das Rectangel aus der ganzen schneidenden Linie, AD, und ihrem ausserhalb des Cirkels liegenden Abschnitte, DC, dem Quadrat der berührenden Linie, DB, gleich.

Erster Fall.

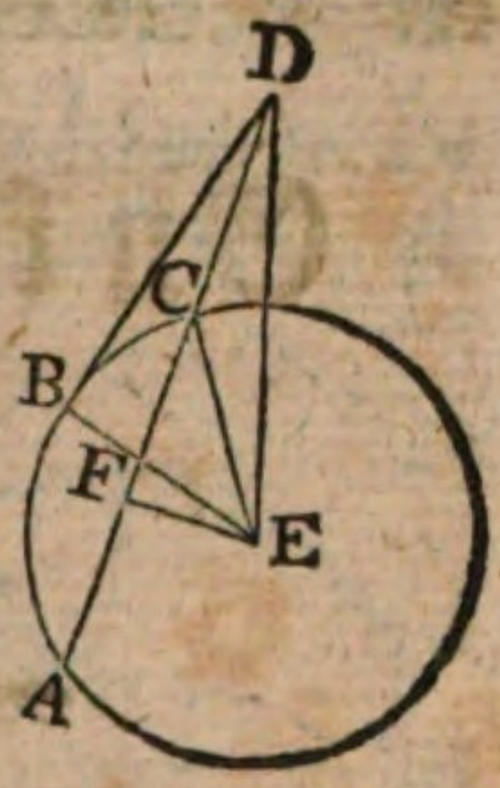


Wenn des Cirkels Mittelpunkt, E, in DA ist. Ziehe EB, so ist (1, 15. Def.) BE = EA = EC, und (3, 18. S.) EBD ein rechter Winkel, auch daher (1, 47. S.) □ED = □DB + □BE. Nun ist (2, 6. S.) Rect. ADDC + □CE = □ED, oder (weil CE = BE) Rect. ADDC + □BE = □ED. Folglich ist Rect. ADDC + □BE = □DB + □BE, folglich, wenn man □BE wegnimmt, Rect. ADDC = □DB.

Zweyter Fall.

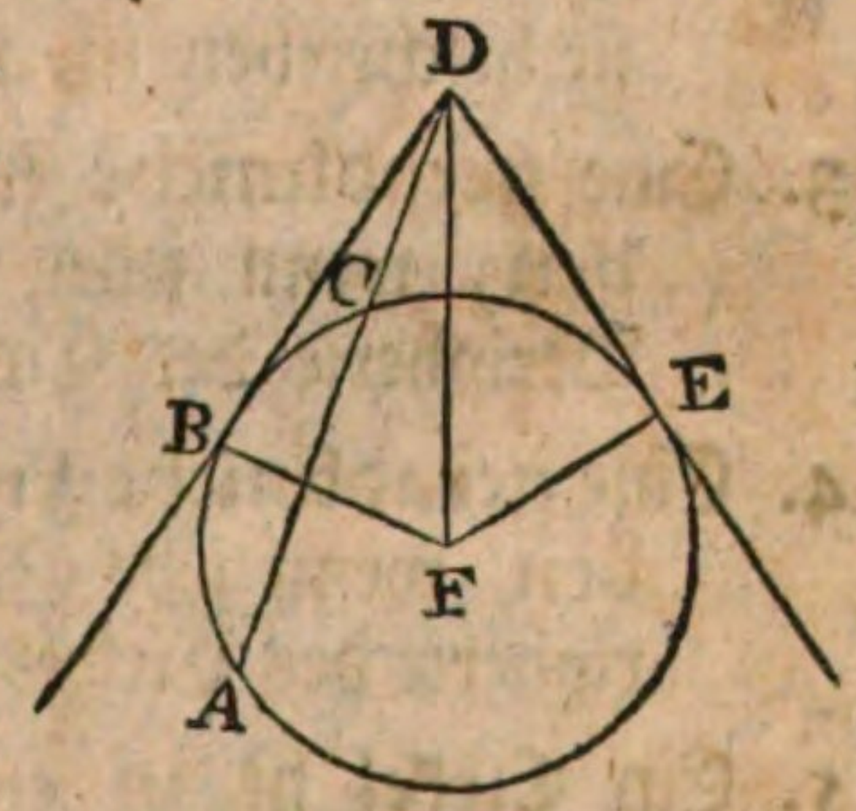
Wenn des Cirkels Mittelpunkt E, nicht in DA ist. Aus E fälle auf AC (1, 12. S.) den Perpendikel, EF, so ist (3, 3. S.) AC in

in F halbirt. Ziehe EB, EC, ED, so ist (2, 6. S.) Rect. ADDC + □FC = □FD, folglich (1, 2. Ax.) Rect. ADDC + □FC + □FE = □FD + □FE. Nun ist, weil bey F rechte Winkel, (1, 47. S.) □FC + □FE = □EC = (1, 15. Def.) □EB, und □FD + □FE = □DE = (1, 47. S.) □DB + □EB. Folglich ist Rect. ADDC + □EB = □DB + □EB, folglich, wenn man □EB wegnimmt, Rect. ADDC = □DB.



Der 37. Satz.

Wenn von einem ausserhalb eines Cirkels, ABC, angenommnen Punkte, D, zwey gerade Linien, DA, DB, zum Cirkel gehen, deren eine, DA, den Cirkel schneidet, die andre, DB, ihn trift; und es ist das Rectangel aus der ganzen schneidenden Linie, AD, und ihrem ausserhalb des Cirkels liegenden Abschnitte, DC, dem Quadrat der treffenden Linie, DB, gleich: so berührt die treffende Linie den Cirkel.



Ziehe (3, 17. S.) die Tangente DE. Nimm (3, 1. S.) den Mittelpunkt, F, und ziehe FE, FB, FD.

Da DE den Cirkel berührt und DA ihn schneidet, so ist (3, 36. S.) Rect. ADDC = □DE. Nun ist angenommen, Rect. ADDC = □DB, folglich ist □DB = □DE und daher DB = DE. Nun ist auch (1, 15. Def.) FB = FE, auch FD gemein. Folglich (1, 8. S.) FBD = FED. Nun ist FED ein rechter Winkel, folglich auch FBD, folglich BD auf FB senkrecht, folglich (3, 16. S.) BD eine Tangente.

Eben so wird auch der Beweis geführt, wenn des Cirkels Mittelpunkt, F, in DA, ist.

Euklids Elemente

Viertes Buch.

Definitionen.

1. Eine geradliniche Figur ist in eine andre geradliniche Figur beschrieben, wenn jeder Winkel der beschriebnen eine von den Seiten derjenigen, worein sie beschrieben ist, trift.

2. Eine geradliniche Figur ist um eine andre geradliniche Figur beschrieben, wenn jede Seite der beschriebnen einen von den Winkeln derjenigen, um die sie beschrieben ist, trift.

3. Eine geradliniche Figur ist in einen Cirkel beschrieben, wenn jeder Winkel der beschriebnen Figur die Peripherie des Cirkels trift.

4. Eine geradliniche Figur ist um einen Cirkel beschrieben, wenn jede Seite der beschriebnen Figur die Peripherie des Cirkels berühret.

5. Ein Cirkel ist in eine geradliniche Figur beschrieben, wenn die Peripherie des Cirkels jede Seite der Figur, worein er beschrieben ist, berühret.

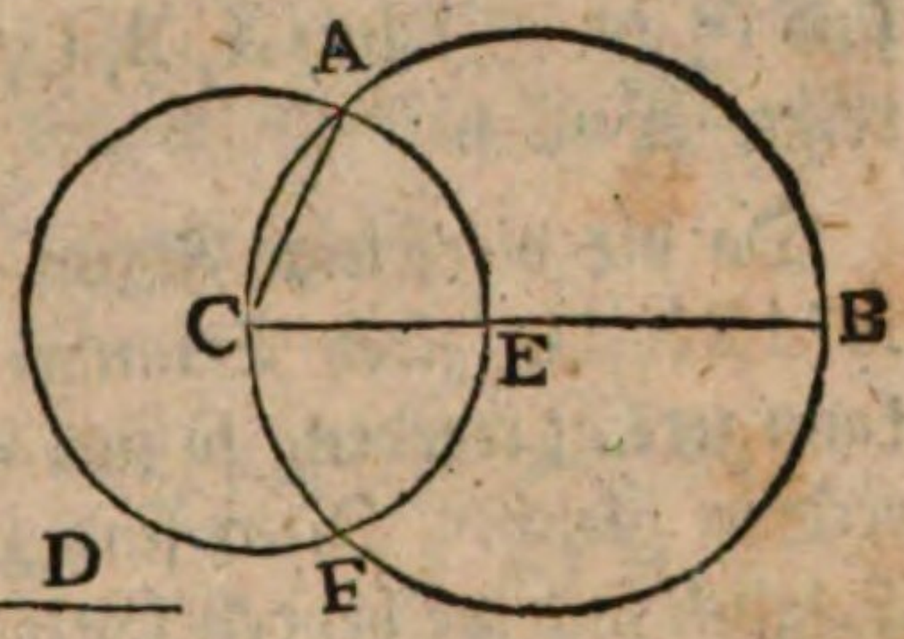
6. Ein Cirkel ist um eine geradliniche Figur beschrieben, wenn die Peripherie des Cirkels jeden Winkel der Figur, um die er beschrieben ist, trift.

7. Eine gerade Linie ist in einen Cirkel eingetragen, wenn ihre Endpunkte in der Peripherie des Cirkels sind.

Der 1. Satz.

In einen gegebnen Cirkel, ABC, eine gegebne gerade Linie, D, die nicht gröſſer als der Durchmesser, BC, ist, einzutragen.

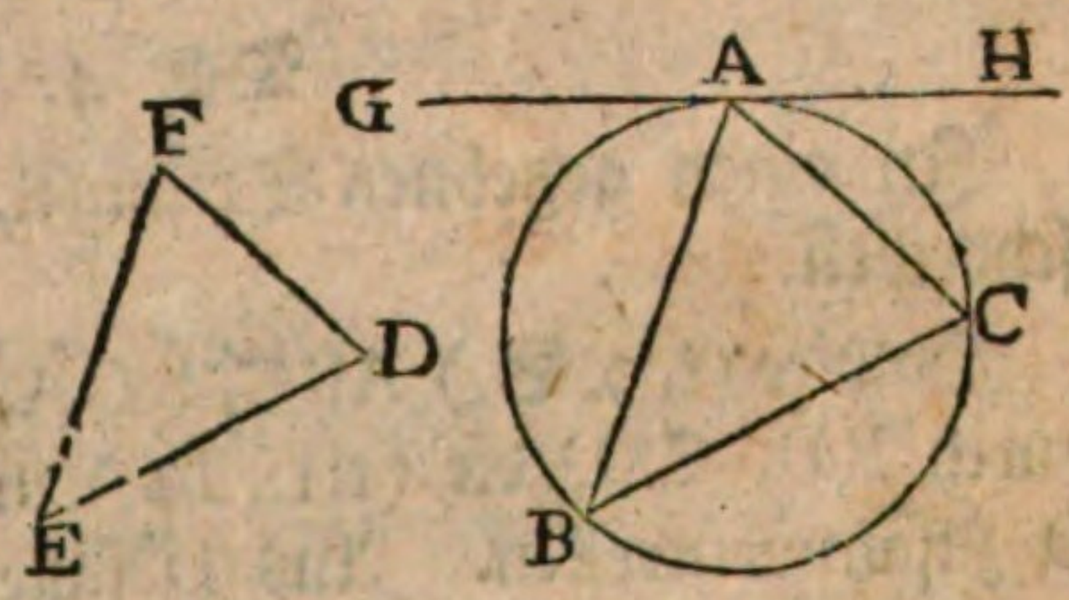
Ist der Durchmesser $BC = D$, so ist das Verlangte geschehen. Ist aber $BC > D$, so mache (1, 3. S.) $CE = D$ und beschreibe aus C mit CE den Cirkel, AEF. Ziehe CA, so ist (1, 15. Def.) $CA = CE$. Nun ist $CE = D$. Folglich $CA = D$.



Der 2. Satz.

In einen gegebnen Cirkel, ABC, einen Triangel zu beschreiben, der einem gegebnen Triangel, DEF, gleichwinklich sey.

Ziehe (3, 17. S.) die Tangente GAH. An A setze (1, 23. S.) $HAC = E$ und $GAB = D$. Ziehe BC.



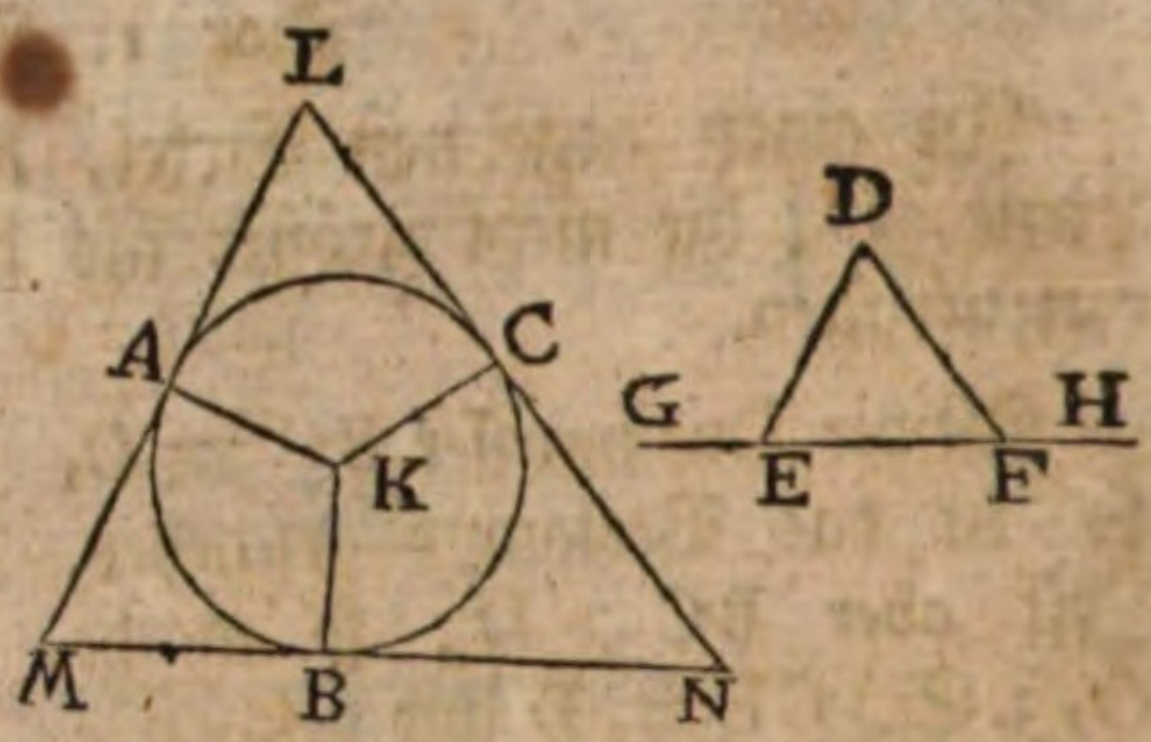
Da GAH eine Tangente, so ist (3, 32. S.) $HAC = E$ ABC, und $GAB = ACB$. Nun ist $HAC = E$ und $GAB = D$. Folglich ist (1, 1. Ax.) $ABC = E$, und $ACB = D$, folglich (1, 32. S.) $BAC = F$. Demnach ist $\triangle ABC$ dem $\triangle DEF$ gleichwinklich.

Der 3. Satz.

Um einen gegebnen Cirkel, ABC, einen Triangel zu beschreiben, der einem gegebnen Triangel, DEF, gleichwinklich sey.

Verlängre EF, an beyden Seiten nach G, H. Nimm (3, 1. S.) des Cirkels Mittelpunkt, K, und ziehe von K willkührlich die

die KB. An K setze (1, 23. S.) BKA = DEG, und BKC = DFH. Ziehe (3, 17. S.) durch A, B, C, die Tangenten, LAM, MBN, NCL, so sind (3, 18. S.) bey A, B, C, rechte Winkel.

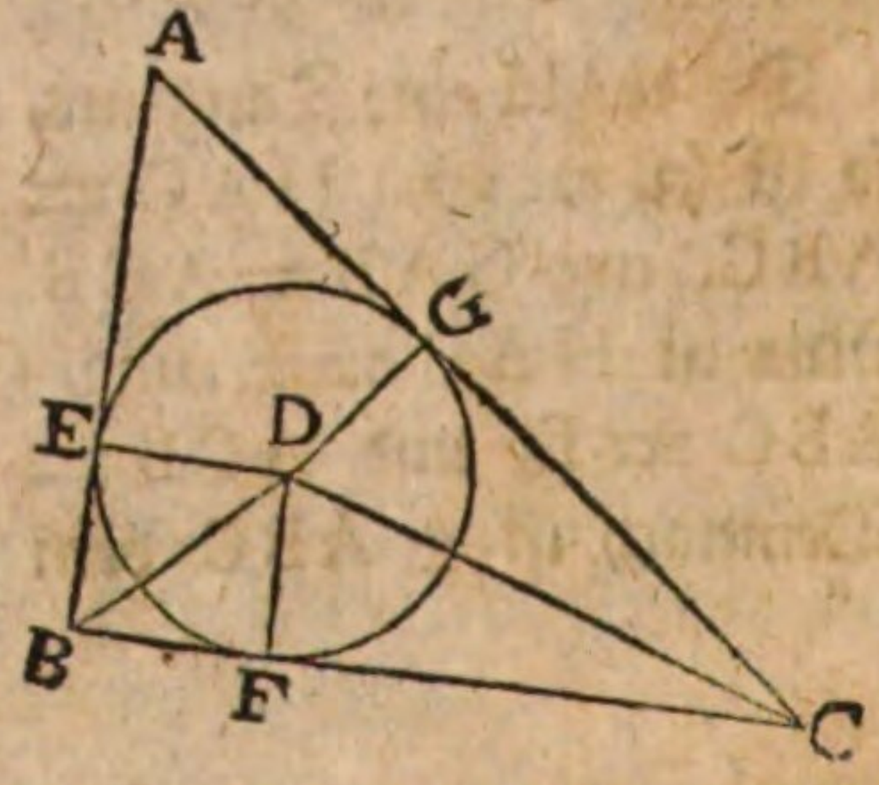


Da die vierseitige Figur, AMBK, in zwey Triangel kann zerlegt werden, so sind (1, 32. S.) die Winkel derselben vier rechten gleich. Nun sind zwey davon, die bey A, B, rechte. Folglich sind die beyden übrigen, AKB + AMB = 2 R. Nun ist (1, 13. S.) DEG + DEF = 2 R, folglich AKB + AMB = DEG + DEF. Nun war AKB = DEG. Folglich ist (1, 3. Ax.) AMB = DEF. Nun wird auf eben die Art bewiesen, daß BNC = DFE. Folglich ist (1, 32. S.) auch MLN = EDF. Demnach ist △ LMN dem △ DEF gleichwinklich.

Der 4. Satz.

In einen gegebnen Triangel, ABC, einen Cirkel zu beschreiben.

Halbire (1, 9. S.) ABC, BCA, durch BD, CD, die (1, 11. Ax.) in D zusammentreffen. Aus D fälle (1, 12. S.) auf AB, BC, CA, die Perpendikel, DE, DF, DG.



Da EBD = DBF, bey E, F, rechte Winkel, und BD gemein, so ist (1, 26. S.) DE = DF. Nun ist eben so erweislich DF = DG. Folglich ist auch DE = DG. Demnach sind DE, DF, DG, gleich. Folglich gehet der Cirkel, den man aus D mit einer dieser gleichen Linien beschreibt, durch E, F, G. Nun sind bey E, F, G, rechte Winkel, folglich (3, 16. S.) berührt der Cirkel jede Seite des Triangels.

Der 5. Satz.

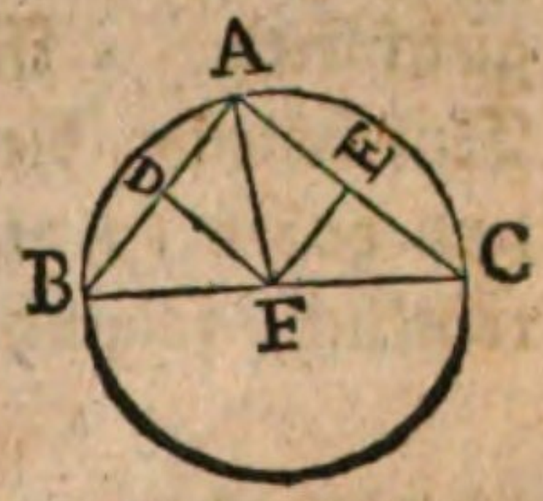
Um einen gegebnen Trianget, ABC, einen Cirkel zu beschreiben.

Halbire (1, 10. S.) AB, AC, in D, E. Errichte (1, 11. S.) auf AB, AC, in D, E, die Perpendikel DF, EF, welche (1, 11. Ax.) im Punkte, F, zusammentreffen. Dieser Punkt, F, fällt entweder über, oder auf, oder unter BC.

Erster Fall.

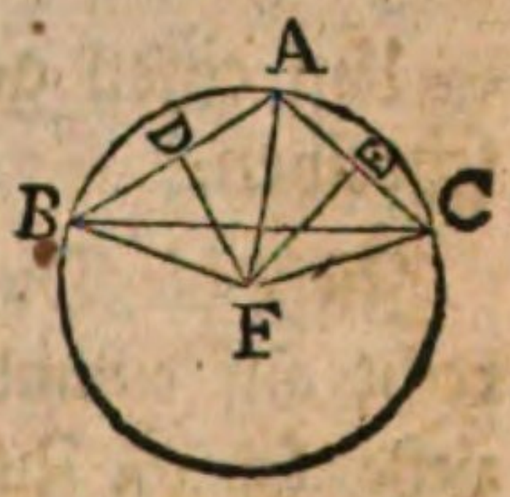
Es falle F über BC. Ziehe FA, FB, FC, so ist, weil AD = DB, DF gemein, und bey D rechte Winkel, (1, 4. S.) AF = FB. Nun ist eben so erweislich AF = FC. Folglich ist auch FB = FC, folglich geht ein Cirkel, aus F mit FA beschrieben, durch A, B, C.

Zweyter Fall.



Es falle F auf BC. Ziehe FA, so ist, wie vorher erweislich, das F der Mittelpunkt des Cirkels, der um den △ ABC beschrieben wird.

Dritter Fall.



Es falle F unter BC. Ziehe FA, FB, FC, so ist, weil AD = DB, FD gemein, und bey D rechte Winkel, (1, 4. S.) FA = FB. Nun ist eben so erweislich FA = FC. Folglich ist auch FB = FC, folglich F der Mittelpunkt des Cirkels, der durch A, B, C, gehet.

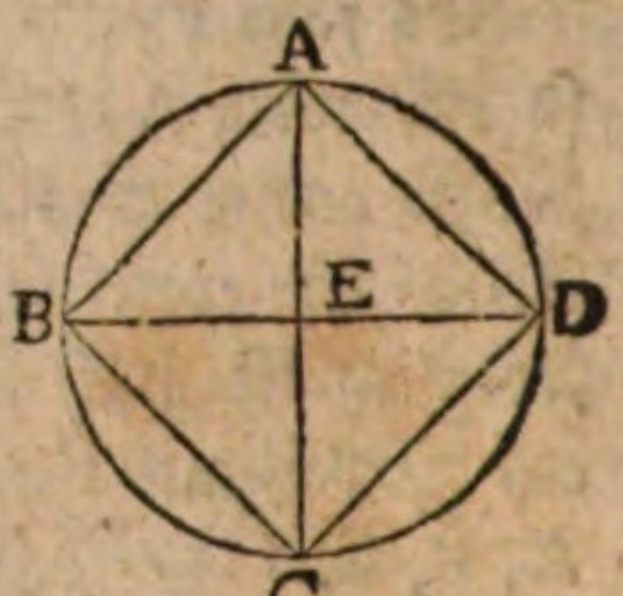
Zusatz.

Hieraus erhellet: wenn der Mittelpunkt des Cirkels über BC fällt, daß alsdenn der Winkel BAC, indem er ein Winkel im grössern Cirkelabschnitt ist, kleiner als ein rechter sey; ferner, wenn der Mittelpunkt auf BC fällt, daß alsdenn BAC, der Winkel im Halbcirkel, ein rechter sey; ferner, wenn der Mittelpunkt unter BC fällt, daß alsdenn BAC, der Winkel im kleinern Cirkelabschnitte, grösser als ein rechter sey. Und eben so auch

umgekehrt: wenn vorgedachter Winkel BAC entweder ein spitzer, oder ein rechter, oder ein stumpfer Winkel ist, daß alsdenn der Mittelpunkt des Cirkels im ersten Fall über BC, im zweyten auf BC, im dritten unter BC falle.

Der 6. Satz.

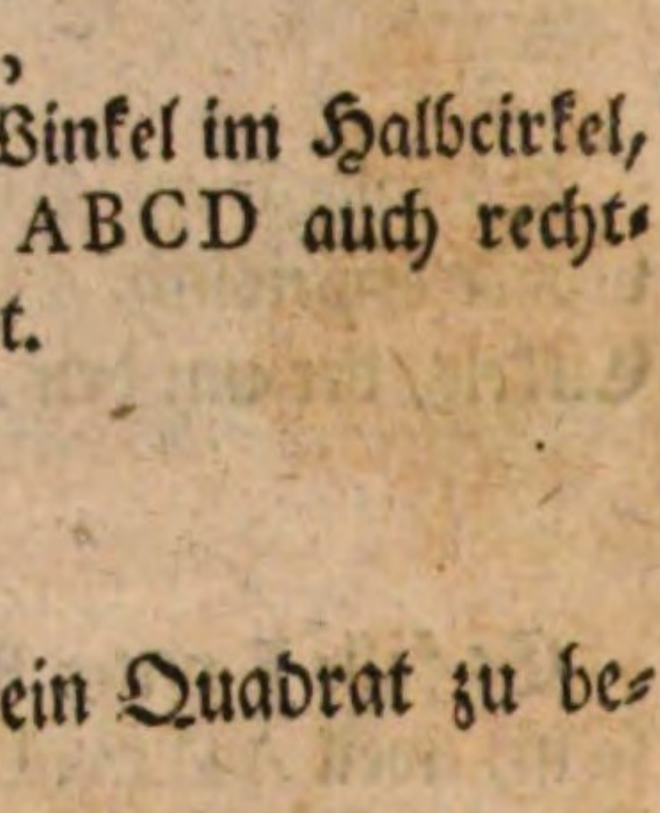
In einen gegebnen Cirkel, ABCD, ein Quadrat zu beschreiben.



Ziehe die Durchmesser, AC, BD, (1, 11. S.) senkrecht auf einander. Ziehe AB, BC, CD, DE, so ist, weil (1, 15. Def.) BE = ED, EA gemein, und bey E rechte Winkel (1, 4. S.) BA = AD. Nun ist eben so erweislich BA = BC, und AD = DC. Folglich ist die vierseitige Figur, ABCD, gleichseitig. Nun sind, weil AC, BD, Durchmesser, die Winkel bey A, B, C, D, Winkel im Halbcirkel, und daher (3, 31. S.) rechte. Folglich ist ABCD auch rechtwinklich, folglich (1, 30. Def.) ein Quadrat.

Der 7. Satz.

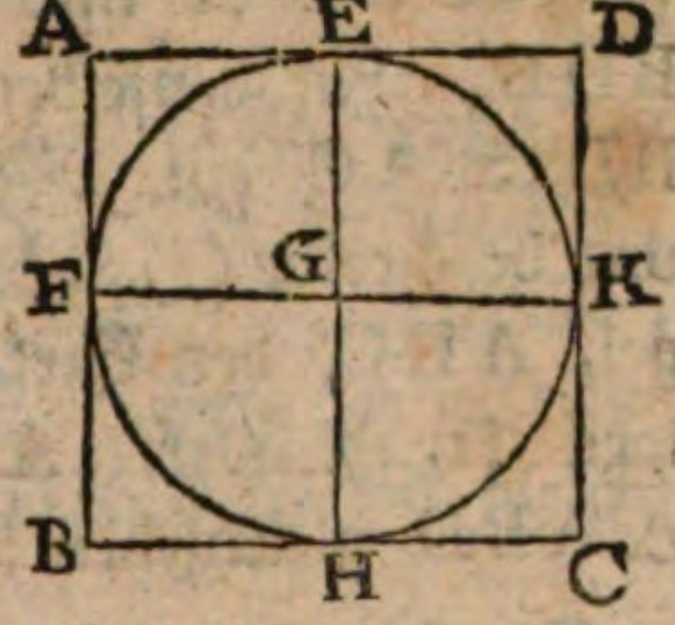
Um einen gegebnen Cirkel, ABCD, ein Quadrat zu beschreiben.



Ziehe die Durchmesser, AC, BD, senkrecht auf einander. Durch A, B, C, D, ziehe (3, 16. Zus.) die Tangenten FG, GH, HK, KF, so sind (3, 18. S.) bey A, B, C, D, rechte Winkel. Nun sind auch bey E rechte Winkel. Folglich sind (1, 28. S.) GF, BD, HK, desgleichen GH, AC, FK, parallel, folglich ist FGHK, ein Parallelogramm, auch (1, 34. S.) dessen Seiten den Durchmessern des Cirkels, und dessen Winkel dem Winkel bey E gleich; folglich gleichseitig und rechtwinklich, folglich (1, 30. Def.) ein Quadrat.

Der 8. Satz.

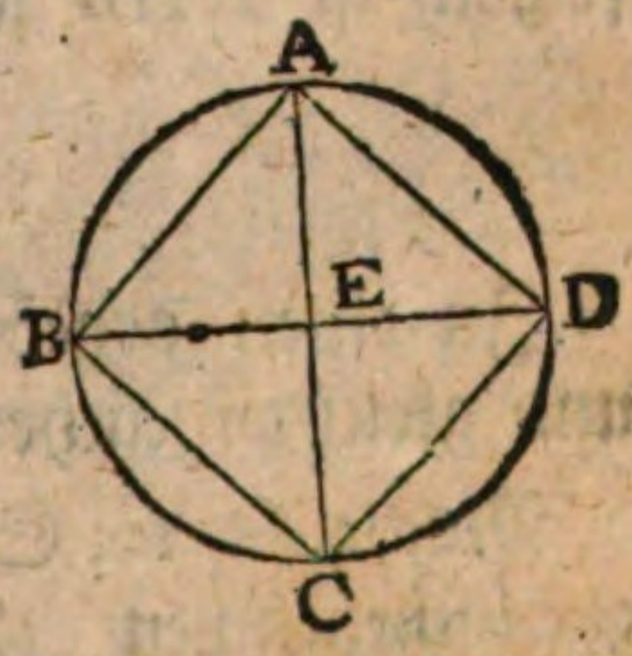
In ein gegebnes Quadrat, ABCD, einen Cirkel zu beschreiben.



Halbire AD, AB, in E, F. Ziehe (1,31.S.) durch E, der AB, DC, die EH und durch F, der AD, BC, die FK parallel, so entstehen vier Parallelogramme, wie AG. Nun ist AD = AB, auch AE = ½ AD und AF = ½ AB, folglich AE = AF, folglich (1,34.S.) auch FG = GE. Nun ist eben so erweislich, daß FG = GH, und GE = GK, folglich gehet ein Cirkel aus G mit GE beschrieben, durch E, F, H, K. Nun sind bey E, F, H, K, rechte Winkel. Folglich (3,16.S.) berührt der Cirkel die Seiten des Quadrats.

Der 9. Satz.

Um ein gegebnes Quadrat, ABCD, einen Cirkel zu beschreiben.

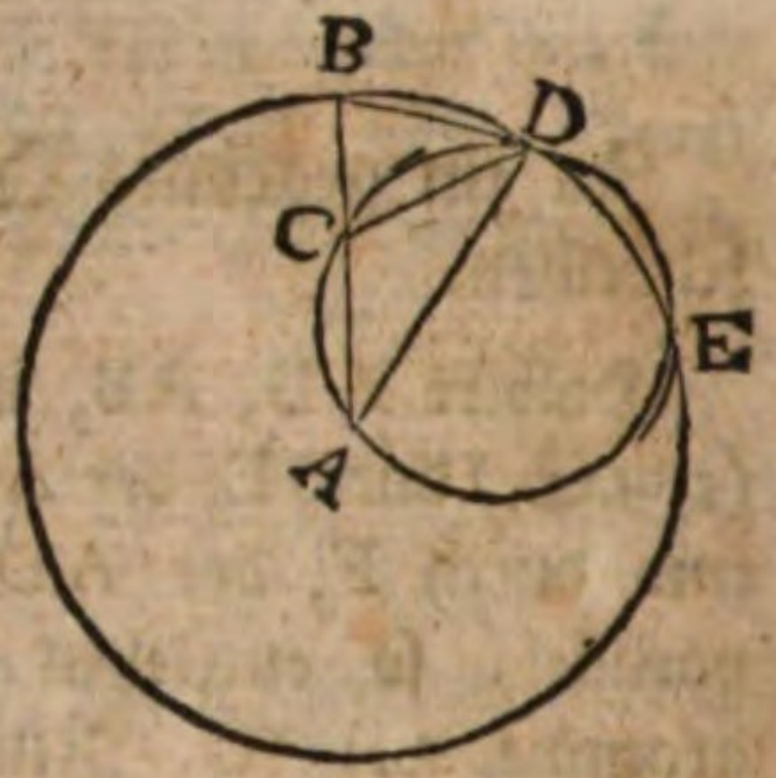


Ziehe die Diagonalen, AC, BD, die sich in E schneiden, so ist, weil AB = AD, auch AC gemein, und BC = CD, (1,8.S.) BAC = CAD, folglich von BAC, CAD, jeder die Hälfte eines rechten Winkels. Nun ist eben so erweislich, daß von ABD, DBC, jeder die Hälfte eines rechten Winkels sey. Folglich ist EAB = EBA, folglich (1,6.S.) EA = EB. Nun ist eben so erweislich, daß EA = ED, und EB = EC. Folglich geht ein Cirkel, aus E mit EA beschrieben, durch A, B, C, D.

Der 10. Satz.

Einen gleichschenklichen Triangel zu beschreiben, worinn jeder der beyden Winkel an der Grundlinie doppelt so groß als der dritte übrige Winkel sey.

Es

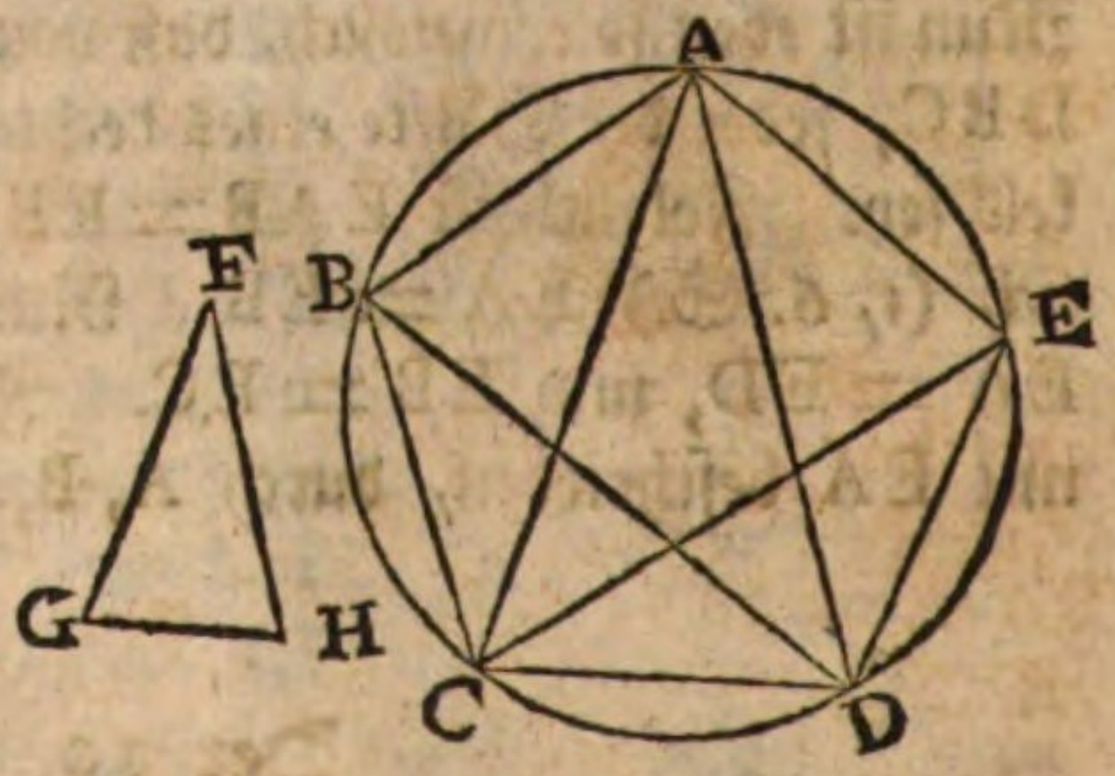


Es sey eine gerade Linie, AB, und dieselbe (2, 11. S.) in C so geschnitten, daß Rect. ABBC = □CA. Beschreibe aus A mit AB den Cirkel BDE. In denselben trage (4, 1. S.) BD = AC ein. Ziehe DA, DC, und beschreibe (4, 5. S.) um den Triangel, ADC, den Cirkel ACD, so ist, weil (1, 15. Def.) AB = AD, der △ABD gleichschenklich und (1, 5. S.) ADB = ABD.

Da Rect. ABBC = □CA, aber CA = BD, so ist Rect. ABBC = □BD, folglich ist (3, 37. S.) BD die Tangente des Cirkels ACD, folglich ist (3, 32. S.) BDC = CAD, folglich, wenn CDA hinzukommt, ADB = CAD + CDA. Nun ist (1, 32. S.) BCD = CAD + CDA. Folglich ist (1, 1. Ax.) ADB = BCD. Nun war ADB = CBD. Folglich ist (1, 1. Ax.) BCD = CBD, folglich (1, 6. S.) BD = DC. Nun war BD = CA. Folglich ist DC = CA, folglich (1, 5. S.) CAD = CDA, folglich (1, 32. S.) BCD = 2 CAD. Nun war ADB, sowol als ABD dem Winkel BCD gleich, folglich ist ADB sowohl als ABD = 2 CAD.

Der 11. Satz.

In einen gegebnen Cirkel, ABCDE, ein gleichseitiges und gleichwinkliches Pentagon zu beschreiben.



Mache (4, 10. S.) einen gleichschenklichen Triangel FGH, worin jeder der Winkel bey G, H, doppelt so groß als der bey F sey. Beschreibe in den gegebnen Cirkel (4, 2. S.) den △ACD, welcher dem △FGH gleichwinklich sey, nämlich A = F, C = G, D = H, so ist jeder der Winkel ACD, ADC, = 2CAD. Halbire (1, 9. S.) ACD, ADC, durch CE, DB, so sind die fünf Winkel, CAD, ACE, ECD, CDB, BDA,

einander

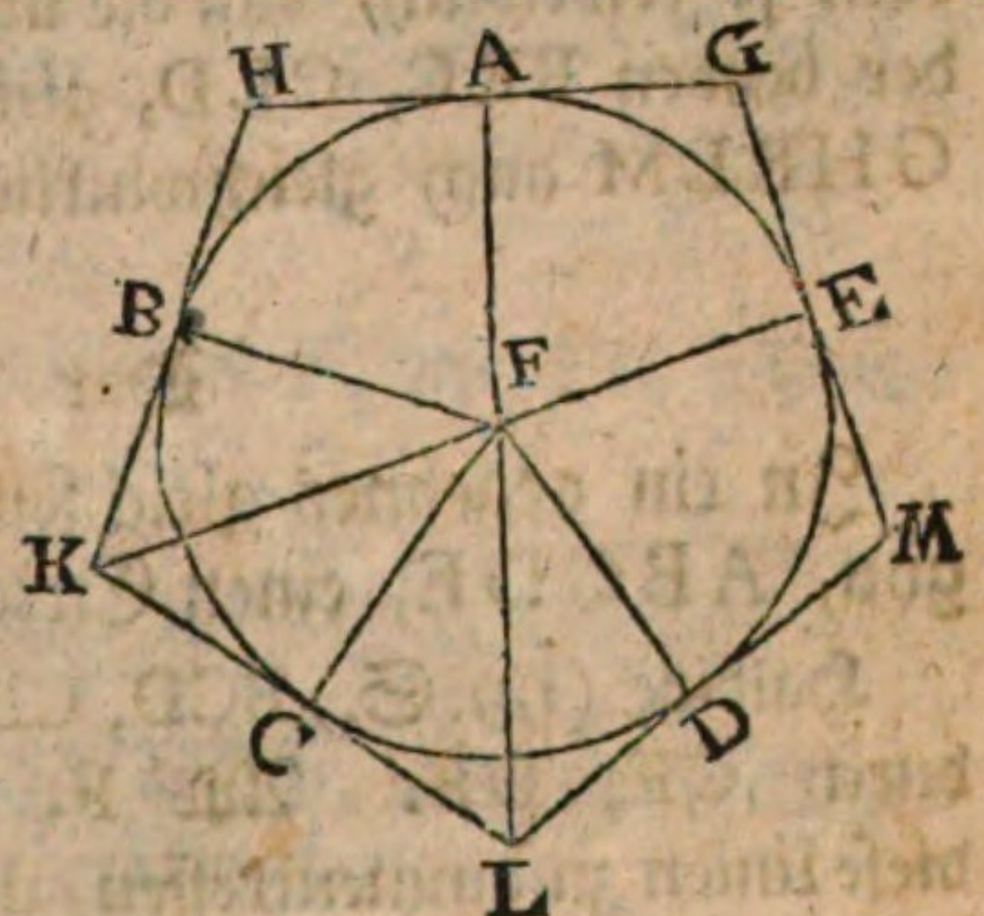
einander gleich, folglich (3, 26. und 29. S.) die Bogen, worauf sie stehen, AB, BC, CD, DE, EA, und die geraden Linien, AB, BC, CD, DE, EA, einander gleich. Folglich ist ABCDE ein gleichseitiges Pentagon.

Da der Bogen AB dem Bogen DE gleich, so ist, wenn der Bogen BCD hinzukommt, der Bogen ABCD = BCDE, folglich (3, 27. S.) der Winkel DEA = EAB. Nun ist eben so erweislich, daß jeder der übrigen Winkel, einem der Winkel DEA, EAB, gleich. Folglich ist ABCDE auch ein gleichwinkliches Pentagon.

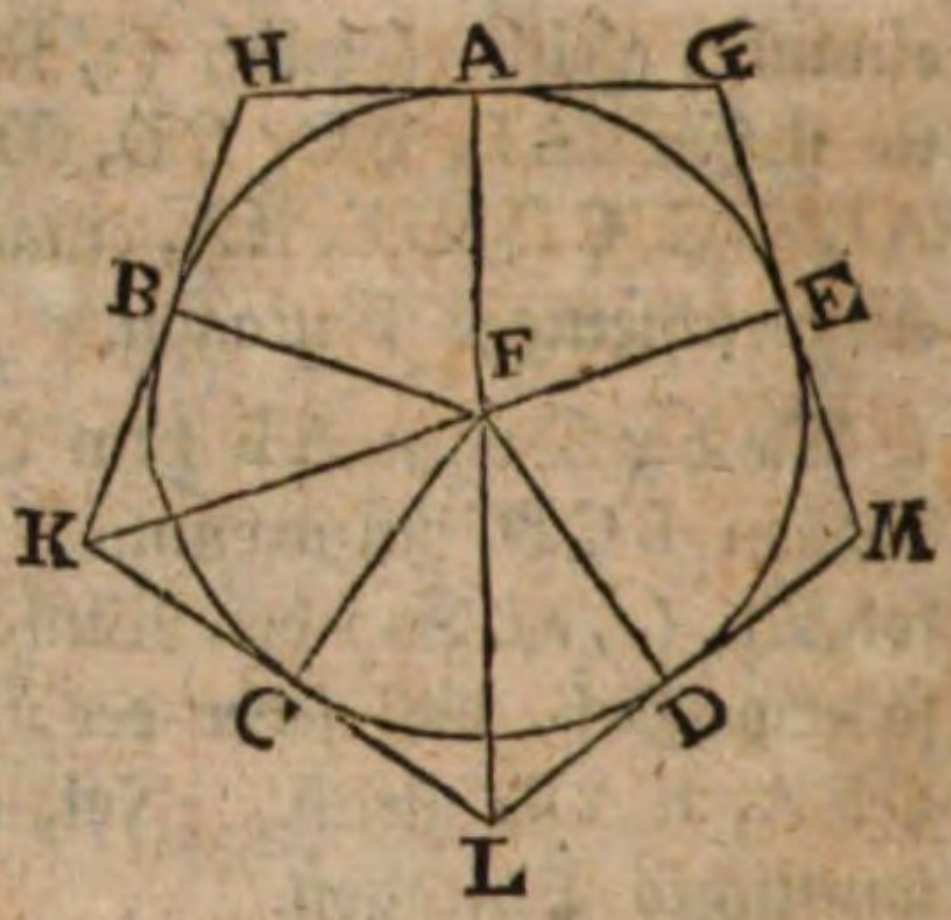
Der 12. Satz.

Um einen gegebnen Cirkel, ABCDE, ein gleichseitiges und gleichwinkliches Pentagon zu beschreiben.

Denke dir (4, 11. S.) ein gleichseitiges und gleichwinkliches Pentagon im Cirkel beschrieben, dessen Winkel bey A, B, C, D, E. Durch diese Punkte ziehe (3, 16. Zus.) die Tangenten GH, HK, KL, LM, MG. Nimm des Cirkels Mittelpunkt, F, und ziehe FA, FB, FC, FD, FE, desgleichen FK, FL.



Da (3, 18. S.) bey B, C, D, rechte Winkel, so ist (1, 47. S.) □FK = □FB + □BK = □FC + □KC. Nun ist (1, 15. Def.) FB = FC, und daher □FB = □FC, folglich (1, 3. Ax.) □BK = □KC, und daher BK = KC. Nun ist auch FB = FC, und FK gemein. Folglich ist (1, 8. S.) BFK = CFK, das ist, CFK = ½ BFC. Eben so ist erweislich CL = LD, und CFL = DFL, das ist, CFL = ½ CFD. Nun ist, weil (4, 11. S.) der Bogen BC = CD, (3, 27. S.) BFC = CFD, folglich ist (1, 7. Ax.) CFK = CFL. Nun sind bey C rechte Winkel, auch ist CF gemein, folglich ist (1, 26. S.) KC = CL, das ist, KC = ½ KL. Nun ist eben so

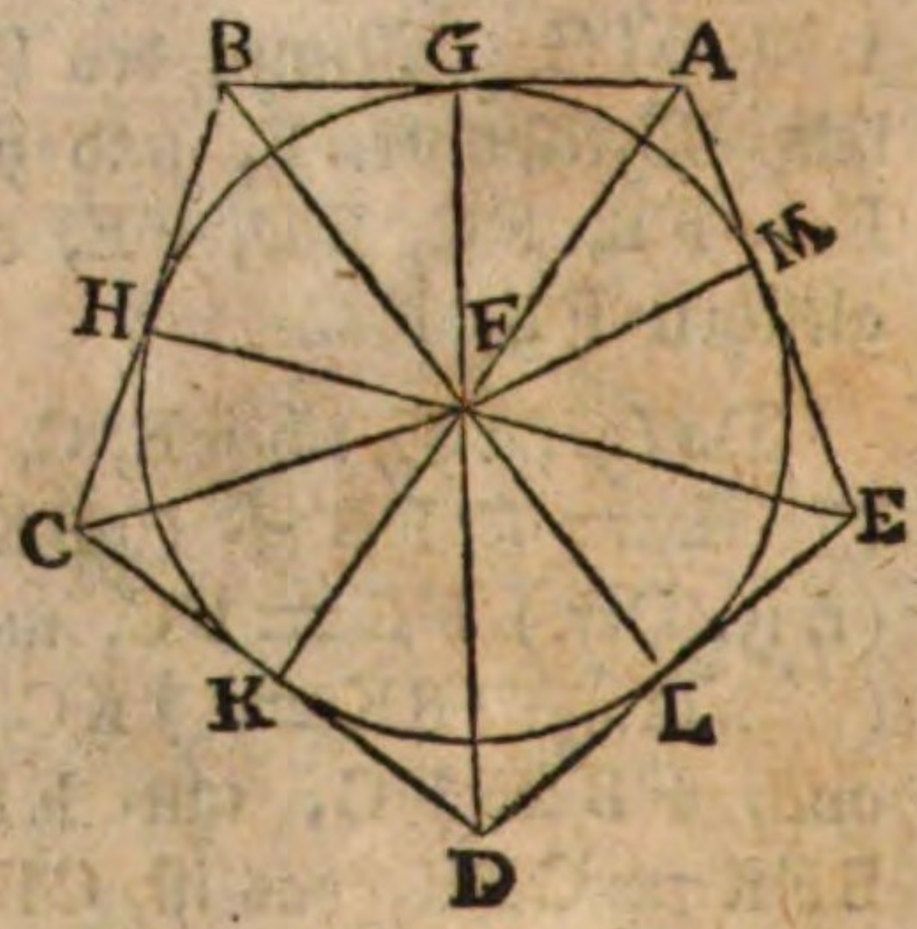


so erweislich $KB = \frac{1}{2} KH$, $LD = \frac{1}{2} LM$, und es war $KC = KB$, $CL = LD$. Folglich ist (1, 6. Ax.) $KL = KH$, und $KL = LM$. Nun wird auf eben die Art bewiesen, $KH = HG$, und $LM = MG$. Folglich ist das Pentagon GHKLM gleichseitig.

Da bey B, C, rechte Winkel, und nach Obigen $BFK = CFK$, so ist (1, 32. S.) $BKF = CKF$, das ist, $CKF = \frac{1}{2} BKC$. Und eben so ist erweislich $CLF = \frac{1}{2} CLD$. Nun ist, weil bey C rechte Winkel, auch nach Obigen $CFK = CFL$, (1, 32. S.) $CKF = CLF$; folglich (1, 6. Ax.) $BKC = CLD$. Nun ist eben so erweislich, daß die übrigen Winkel bey M, G, H, jedem der beyden BKC, CLD, gleich sind, folglich ist das Pentagon GHKLM auch gleichwinklich.

Der 13. Satz.

In ein gegebnes gleichseitiges und gleichwinkliches Pentagon, ABCDE, einen Cirkel zu beschreiben.



Halbire (1, 9. S.) BCD, CDE, durch CF, DF. Aus F, wo diese Linien zusammentreffen, ziehe FE, FA, FB, so ist, weil $BC = CD$, CF gemein, und $BCF = DCF$, (1, 4. S.) $CBF = CDF$. Nun ist CDF die Hälfte des Winkels $CDE = CBA$. Folglich ist auch CBF die Hälfte des Winkels CBA, und daher CBA durch BF halbirt. Eben so ist ein gleiches von BAE, AED, erweislich.

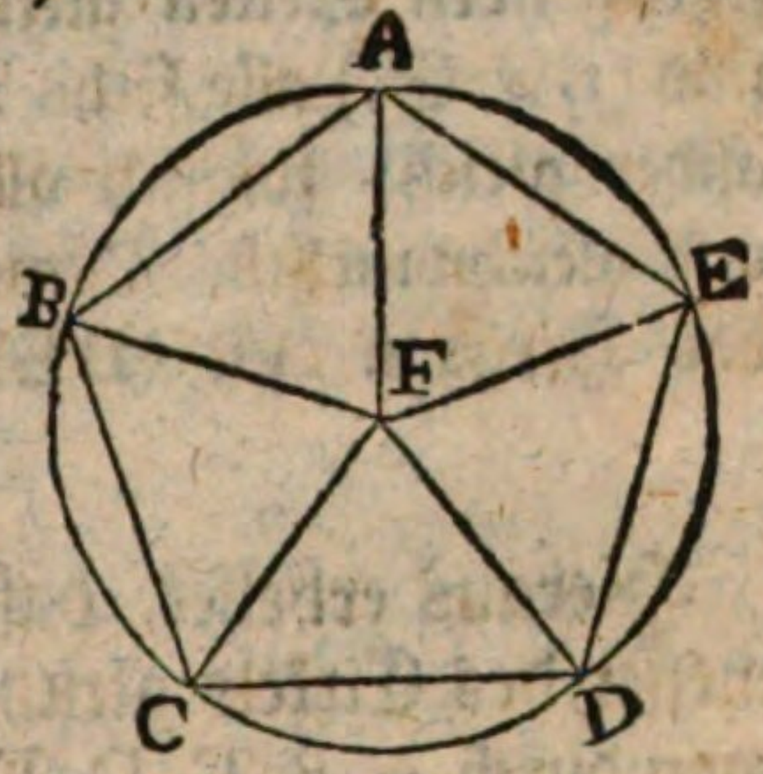
Aus F fälle (1, 12. S.) auf die Seiten des Pentagons die Perpendikel, FG, FH, FK, FL, FM, so sind bey H, K, rechte Winkel, und es war $HCF = KCF$, auch ist CF gemein.

Folglich

Folglich ist (1, 26. S.) FH = FK. Nun ist eben so von den übrigen Perpendikeln, FL, FM, FG, erweislich, daß jeder der FH, FK, gleich. Folglich geht ein Cirkel, aus F mit FG beschrieben, durch G, H, K, L, M, und berührt, weil bey diesen Punkten rechte Winkel, (3, 16. S.) die Seiten des Pentagons.

Der 14. Satz.

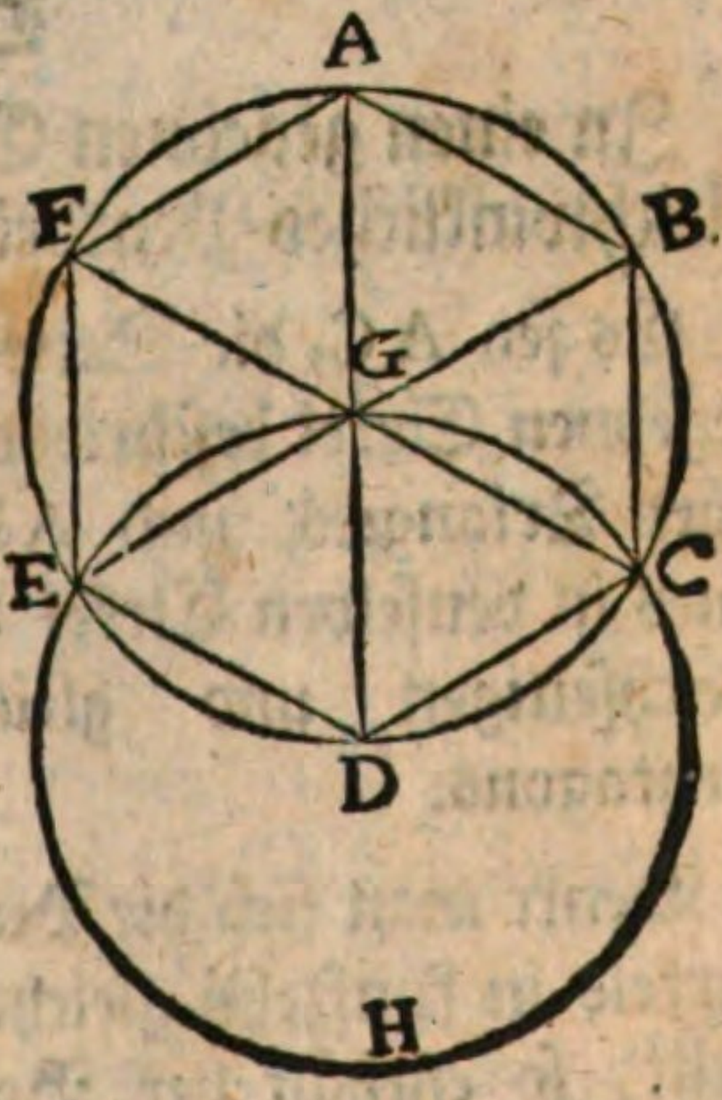
Um ein gegebnes gleichseitiges und gleichwinkliches Pentagon, ABCDE, einen Cirkel zu beschreiben.



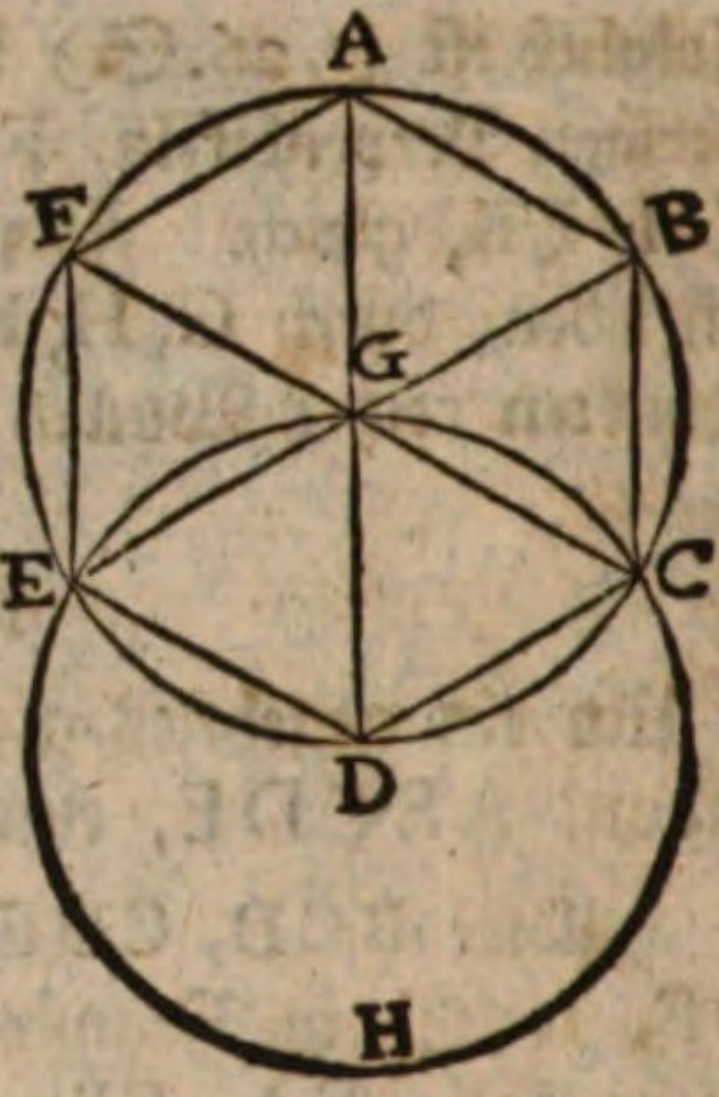
Halbire BCD, CDE, durch CF, DF, welche in F zusammentreffen. Ziehe FE, FA, FB, so ist, wie (4, 13. S.) erweislich, daß durch diese Linien auch die übrigen Winkel des Pentagons halbirt werden, folglich die daher entstehenden Hälften alle einander gleich sind. Folglich ist (1, 6. S.) FC = FD = FE = FA = FB. Folglich geht ein Cirkel aus F, mit FA beschrieben, durch A, B, C, D, E.

Der 15. Satz.

In einen gegebnen Cirkel, ABCDEF, ein gleichseitiges und gleichwinkliches Hexagon zu beschreiben.



Es sey des Cirkels Mittelpunkt G. Ziehe den Durchmesser, AGD. Aus D beschreibe mit DG den Cirkel EGCH. Ziehe EG, CG, und verlängre sie bis B, F. Ziehe AB, BC, CD, DE, EF, FA, so ist, weil (1, 15. Def.) DE = DG, und DG = GE, der Triangel GED gleichseitig, folglich auch (1, 5. S.) gleichwinklich, und jeder Winkel (1, 32. S.) der dritte Theil von zwey rechten. Eben dies ist auch vom △GLC erweislich.



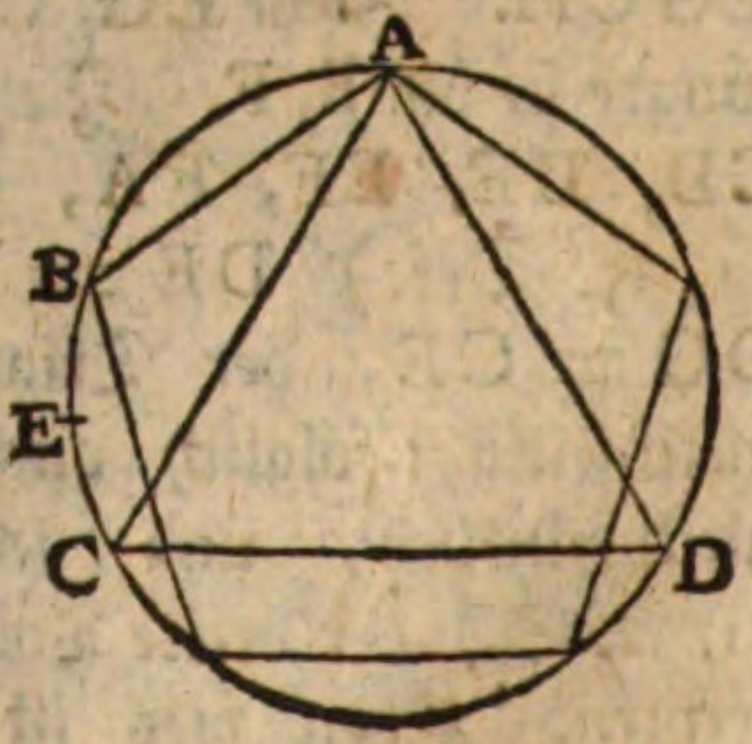
Da EGD sowohl als DGC, ein Drittel von 2 R, so ist (1, 13. S) auch CGB ein Drittel von 2 R, folglich sind diese drey Winkel einander gleich. Nun sind sie (1, 15. S.) auch ihren Scheitelwinkeln gleich, folglich sind alle sechs Winkel um G einander gleich. Nun sind auch (1, 15. Def.) die solche Winkel einschliessenden Seiten gleich. Folglich sind (1, 4. S.) alle sechs Triangel einander gleich, folglich alle gleichseitig und gleichwinklich. Demnach ist auch das Hexagon ABCDEF gleichseitig und gleichwinklich.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß die Seite des Hexagons dem Halbmesser des Cirkels gleich sey. Auch ist leicht einzusehen, wenn man durch A, B, C, D, E, F, Tangenten zieht, daß eben so, wie beym Pentagon, um den Cirkel ein gleichseitiges und gleichwinkliches Hexagon beschrieben werde. Ferner ist klar, daß eben so, wie beym Pentagon gezeigt worden, in und um einen gegebnen Cirkel ein gleichseitiges und gleichwinkliches Hexagon beschrieben werden könne.

Der 16. Satz.

In einen gegebnen Cirkel, ABCD, ein gleichseitiges und gleichwinkliches Pentdekagon zu beschreiben.



Es sey AC, die Seite eines in den gegebnen Cirkel beschriebnen gleichseitigen Triangels, und AB die Seite eines in denselben Cirkel beschriebnen gleichseitigen und gleichwinklichen Pentagons.

Denkt man sich die Peripherie des Cirkels in funfzehn gleiche Theile getheilt, so enthält der Bogen ABC,

als der dritte Theil der Peripherie, fünf solcher Theile, der Bogen, AB, aber als der fünfte Theil der Peripherie, drey solcher Theile, folglich der Bogen BC zwey solcher Theile. Halbire BC in E, so ist BE sowohl als EC Ein solcher Theil. Zieht man nun die gerade Linie EC, so lassen sich funfzehn der EC gleiche gerade Linien in den Cirkel (4, 1. S.) eintragen, und es ist das hierdurch in den Cirkel beschriebne Pentdekagon gleichseitig, aber auch, weil die Winkel desselben alle auf gleichen Bogen stehen, (3, 27. S.) gleichwinklich.

Zusatz.

Eben so wie beym Pentagon gelehrt worden, wird auch ein gleichseitiges und gleichwinkliches Pentdekagon um einen gegebnen Cirkel; oder ein Cirkel in und um ein gegebnes gleichseitiges und gleichwinkliches Pentdekagon beschrieben.

Euklids Elemente

Fünftes Buch.

Definitionen.

1. Eine Grösse ist ein Theil von einer andern, die kleinere nämlich von der grössern, wenn die grössere sich von ihr genau messen läßt.
2. Die grössere ist ein **Vielfaches** von der kleinern, wenn sie sich von der kleinern genau messen läßt.
3. Eine **Verhältniß** ist eine gewisse Beziehung, welche zwey gleichartige Grössen, in Absicht der Grösse, auf einander haben.
4. Grössen **sind in Verhältniß**, wenn sie vervielfältigt einander übertreffen können.
5. Grössen **sind in einerley Verhältniß**, die erste nämlich zur zweyten, und die dritte zur vierten, wenn, bey Vergleichung eines jeden Gleichvielfachen der ersten und dritten, mit einem jedem Gleichvielfachen der zweyten und vierten, jedesmahl es sich findet, wenn das Vielfache der ersten kleiner, oder eben so groß, oder grösser, als das Vielfache der zweyten, daß alsdenn das Vielfache der dritten im ersten Fall auch kleiner, im zweyten auch eben so groß, im dritten auch grösser, als das Vielfache der vierten ist.
6. Grössen, welche in einerley Verhältniß sind, heissen **proportionirt.**
7. Ist aber unter solchen Gleichvielfachen, das Vielfache der ersten grösser als das Vielfache der zweyten, hingegen das Vielfache der dritten nicht grösser als das

Vielfache der vierten: so hat alsdenn die erste zur zweyten eine **grössere Verhältniß**, als die dritte zur vierten.

8. **Proportion** ist die Aenlichkeit der Verhältnisse.

9. Eine Proportion erfordert wenigstens drey Glieder.

10. Wenn drey Grössen (stetig) proportionirt sind: so ist die Verhältniß der ersten zur dritten **zwiefach höher** als die Verhältniß der ersten zur zweyten.

11. Wenn vier Grössen (stetig) proportionirt sind: so ist die Verhältniß der ersten zur vierten **dreyfach höher** als die Verhältniß der ersten zur zweyten. Und dies so fort, immer um Eins höher, so weit die (stetige) Proportion gehet.

12. Forderglieder sind Fordergliedern, und Hinterglieder sind Hintergliedern **homolog**.

13. **Verwechselt** wird die Verhältniß, wenn man setzt: das Forderglied zum Fordergliede, und das Hinterglied zum Hintergliede.

14. **Umgekehrt** wird die Verhältniß, wenn man das Hinterglied zum Fordergliede, und das Forderglied zum Hintergliede macht.

15. **Verbunden** wird die Verhältniß, wenn man setzt: das Aggregat des Forderglieds und Hinterglieds zu eben demselben Hintergliede.

16. **Getrennt** wird die Verhältniß, wenn man setzt: der Ueberschuß des Forderglieds über das Hinterglied zu eben demselben Hintergliede.

17. **Zurückkehrend** wird die Verhältniß, wenn man setzt: das Forderglied zum Ueberschuß des Forderglieds über das Hinterglied.

18. **Gleichförmig** heißt die Verhältniß, wenn mehrere Grössen mit eben so vielen andern, je zwey mit je zweyen, (zerstreut oder unzerstreut) proportionirt sind, und man setzt: die erste zur letzten von jenen, wie die erste zur letzten von diesen. Oder kürzer: wenn man die äussersten Grössen mit Uebergehung der mittlern setzt.

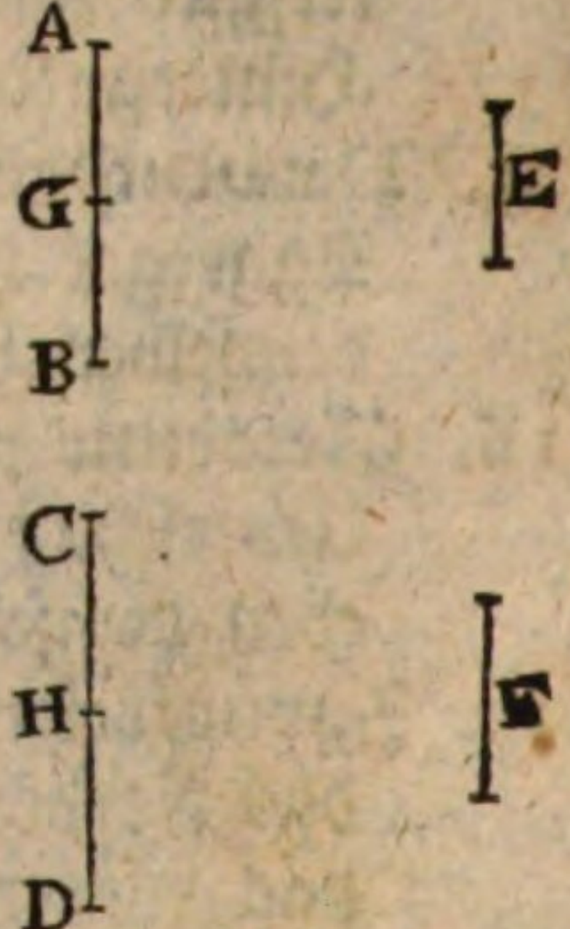
19. Grössen sind in **unzerstreuter Proportion**, wenn das Forderglied zum Hintergliede, wie das Forderglied

zum Hintergliede, und das Hinterglied zu einer andern Grösse, wie das Hinterglied zu einer andern Grösse. (Oder: wenn die erste zur zweyten, wie die vierte zur fünften, und die zweyte zur dritten, wie die fünfte zur sechsten.)

20. Drey Grössen sind mit eben so vielen andern in **zerstreuter Proportion**, wenn von jenen das Forderglied zum Hintergliede, wie von diesen das Forderglied zum Hintergliede, hingegen von jenen das Hinterglied zu einer andern Grösse, wie von diesen eine andre Grösse zum Forderglied. (Oder: wenn die erste zur zweyten, wie die fünfte zur sechsten, und die zweyte zur dritten, wie die vierte zur fünften.)

Der 1. Satz.

Wenn mehrere Grössen, AB, CD, von eben so vielen andern, E, F, je eine von einer, gleichvielfach sind: so ist das Aggregat der erstern, AB, CD, vom Aggregat der letztern, E, F, eben so vielfach, als eine, AB, es von einer, E, ist.



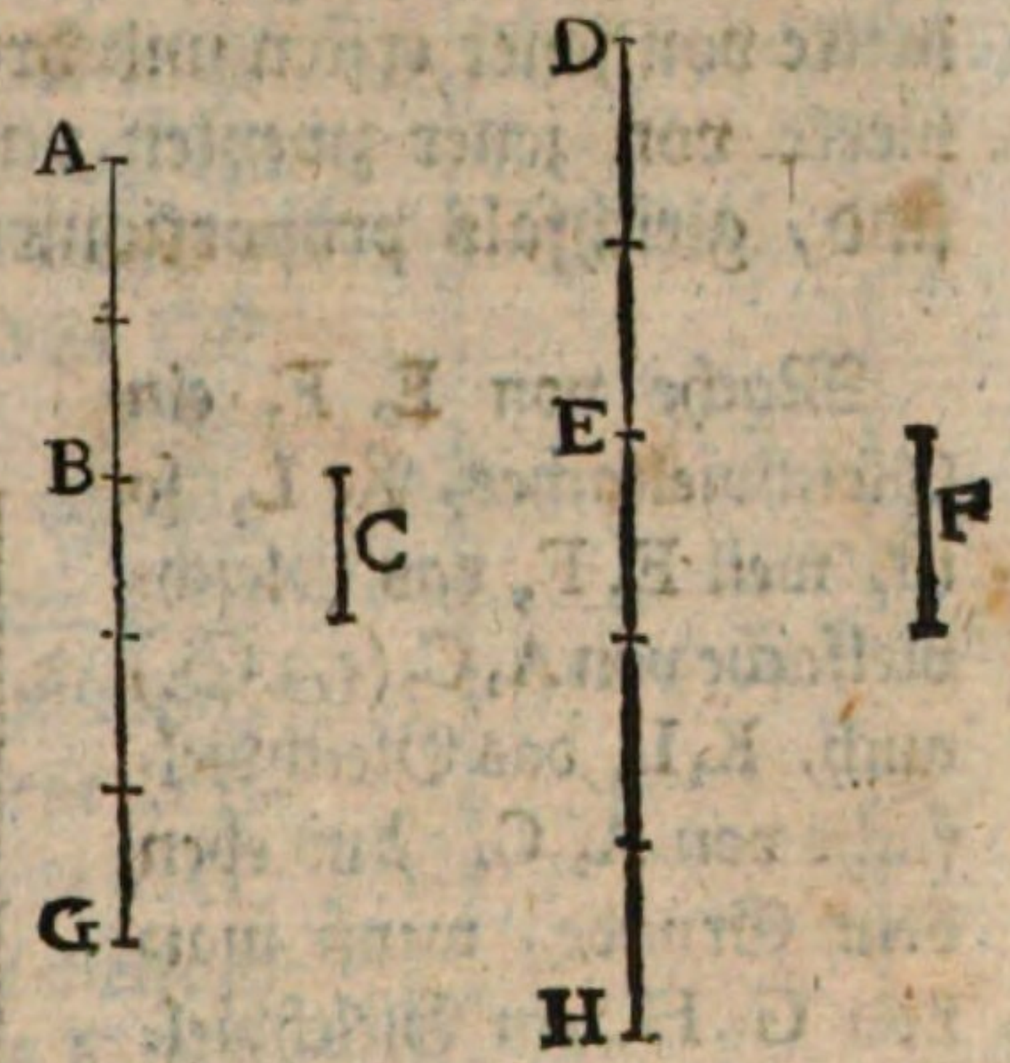
Da AB von E eben so vielfach, als CD von F, so ist E in AB so vielmal enthalten, als F in CD. Theile daher AB in ihre Theile, AG, GB, deren jeder = E, desgleichen CD in ihre Theile, CH, HD, deren jeder = F, so sind dieser Theile, CH, HD, so viele, als jener, AG, GB. Da AG = E und CH = F, so ist AG + CH = E + F. Eben so ist erweislich GB + HD = E + F. Folglich so vielmal E in AB, so vielmal ist E + F in AB + CD, und daher AB + CD von E + F eben so vielfach, als AB von E.

Der 2. Satz.

Wenn eine Grösse, AB, von einer andern, C, eben so vielfach, als eine dritte, DE, es von einer vierten, F, ist; desgleichen eine fünfte, BG, von der zweyten, C, eben so vielfach, als eine sechste, EH, es von der vierten, F, ist:

so

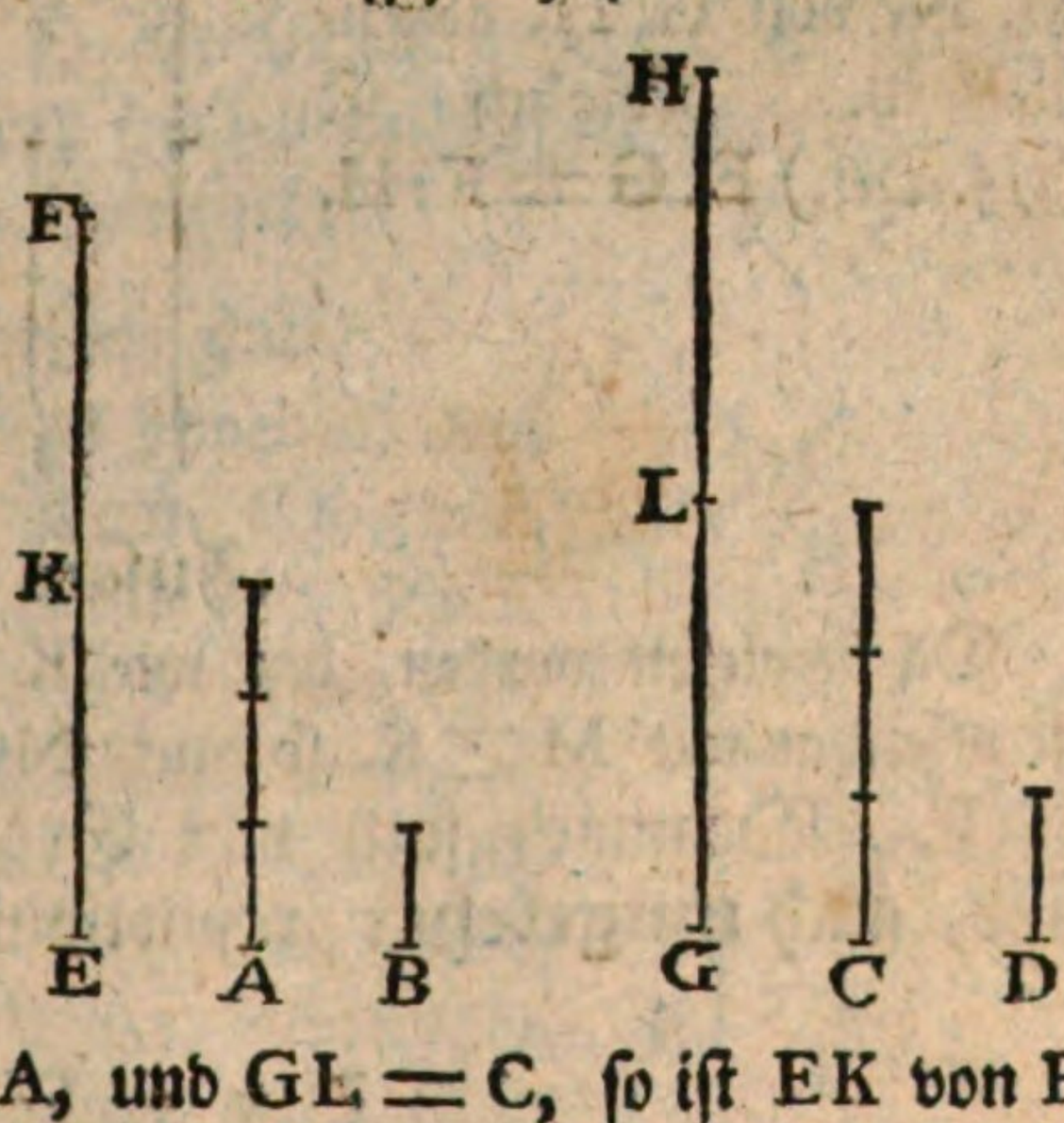
so ist auch verbunden das Aggregat der ersten und fünften, AG, von der zweyten, C, eben so vielfach, als das Aggregat der dritten und sechsten, DH, es von der vierten, F, ist.



Da AB von C und DE von F gleichvielfach, desgleichen BG von C und EH von F gleichvielfach: so ist C in AB so vielmal als F in DE, desgleichen C in BG so vielmal, als F in EH; folglich C in AG so vielmal als F in DH, und daher AG von C eben so vielfach als DH von F.

Der 3. Satz.

Wenn eine Grösse, A, von einer andern, B, eben so vielfach, als eine dritte, C, es von einer vierten, D, ist, und man nimmt ein Gleichvielfaches der ersten und dritten, EF, GH: so ist gleichförmig das Vielfache der ersten, EF, von der zweyten Grösse, B, eben so vielfach, als das Vielfache der dritten, GH, es von der vierten Grösse, D, ist.



Da EF von A, und GH von C gleichvielfach, so ist A in EF so vielmal, als C in GH. Theile daher EF in ihre Theile, EK, KF, deren jeder = A, desgleichen GH in ihre Theile, GL, LH, deren jeder = C, so sind dieser Theile, GL, LH, so viel als jener, EK, KF. Da A von B so vielfach, als C von D; aber EK = A, und GL = C, so ist EK von B so vielfach, als GL von D. Eben so ist erweislich, daß KF von B eben so vielfach, als LH von D. Folglich ist (5, 2. S.) verbunden EF von B eben so vielfach, als GH von D.

Der 4. Satz.

Wenn vier Grössen, A, B, C, D, proportionirt sind: so sind vier andre Grössen, E, G, F, H, von denen die erste und dritte von jener ersten und dritten, desgleichen die zweyte und vierte von jener zweyten und vierten, jedes Gleichvielfache sind, gleichfals proportionirt.

Mache von E, F, ein Gleichvielfaches, K, L, so ist, weil E, F, das Gleichvielfache von A, C, (5, 3. S.) auch, K, L, das Gleichvielfache von A, C. Aus eben dem Grunde, wenn man von G, H, ein Gleichvielfaches, M, N, macht, ist M, N, das Gleichvielfache von B, D. Nun ist A:B = C:D. Folglich ist (5, 5. Def.) wie K ≷ M, so auch L ≷ N. Nun war K, L, von E, F, und M, N, von G, H, gleichvielfach. Folglich ist (5, 5. Def.) E:G = F:H.

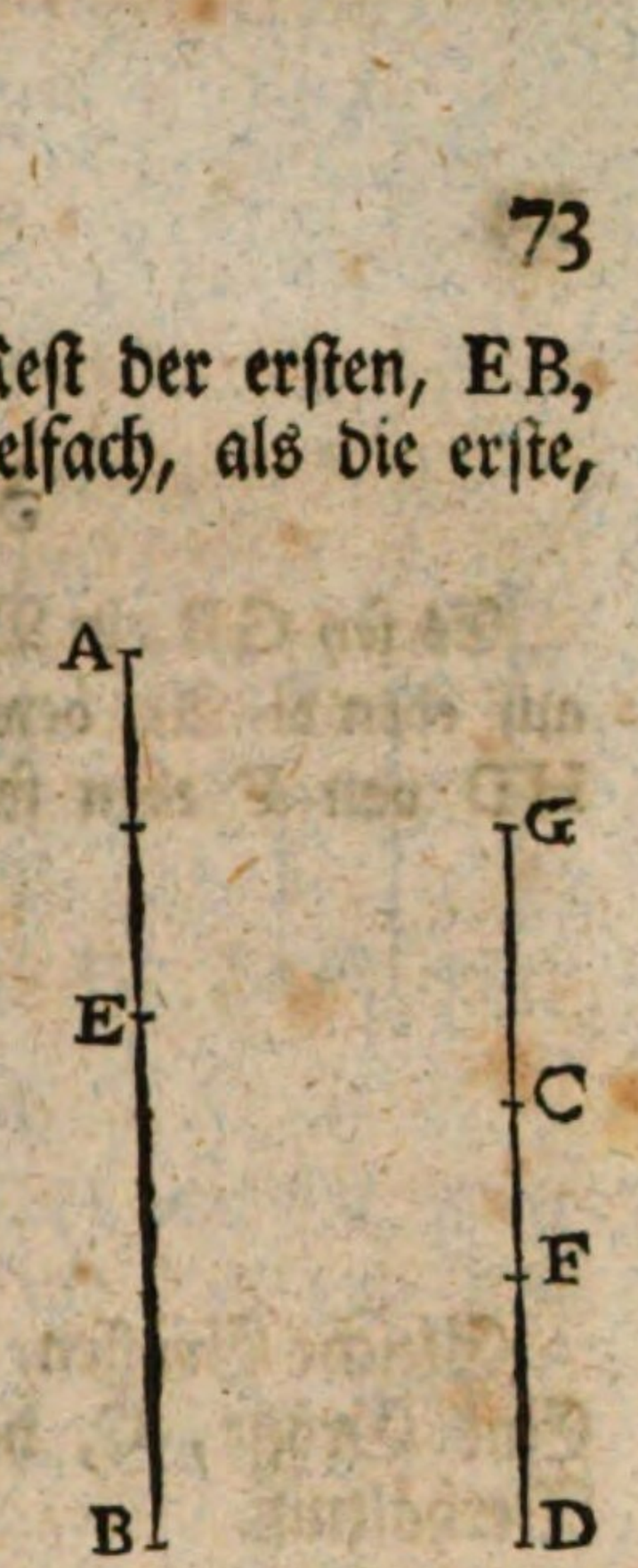
Zusatz.

Da bewiesen worden, daß wie K ≷ M, so auch L ≷ N, so ist offenbar wie M ≷ K, so auch N ≷ L. Folglich ist G:E = H:F. Demnach sind vier Grössen, welche proportionirt sind, auch **umgekehrt** proportionirt.

Der 5. Satz.

Wenn eine Grösse, AB, von einer andern, CD, eben so vielfach, als ein Stück der ersten, AE, es von einem Stück der

der zweyten, CF, ist: so ist auch der Rest der ersten, EB, vom Rest der zweyten, FD, eben so vielfach, als die erste, AB, es von der zweyten, CD, ist.



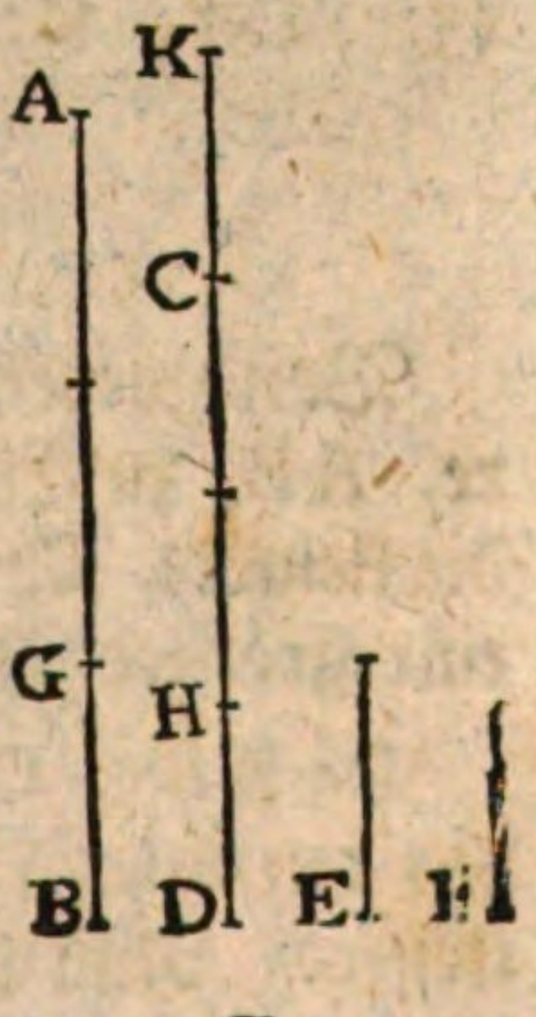
So vielfach AE von CF, eben so vielfach sey EB von CG. Folglich ist (5, 1. S.) AB von GF, eben so vielfach als AE von CF. Nun ist AE von CF eben so vielfach als AB von CD. Folglich ist AB von GF, CD, das Gleichvielfache, folglich (1, 6. Ax.) GF = CD, folglich, wenn man CF wegnimmt, (1, 3. Ax.) GC = FD. Nun war AE von CF eben so vielfach als EB von CG. Folglich ist AE von CF eben so vielfach als EB von DF. Nun war AE von CF eben so vielfach als AB von CD. Folglich ist EB von DF eben so vielfach als AB von CD.

Der 6. Satz.

Wenn zwey Grössen, AB, CD, von zweyen andern, E, F, gleichvielfach, auch Stücke der erstern, AG, CH, von denselben beyden andern, E, F, gleichvielfach sind: so sind die Reste, GB, HD, entweder denselben beyden andern, E, F, gleich, oder derselben Gleichvielfaches.

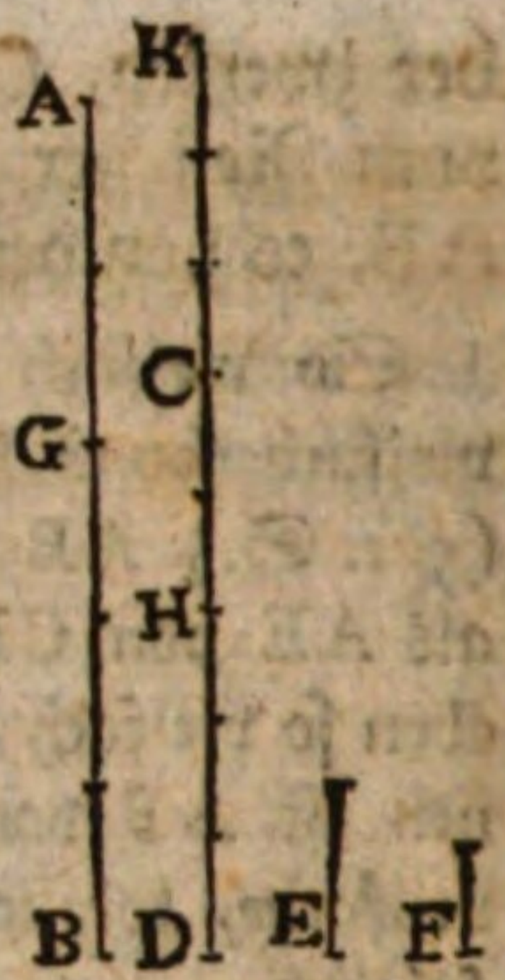
Erster Fall.

Es sey GB = E, so ist zu beweisen, daß alsdenn auch HD = F. Mache CK = F, so ist, weil auch GB = E, und AG von E eben so vielfach, als CH von F, (5, 2. S.) AB von E eben so vielfach als HK von F. Nun war AB von E eben so vielfach als CD von F. Folglich sind HK, CD, von F gleichvielfach, folglich ist (1, 6. Ax.) HK = CD, folglich, wenn man CH wegnimmt, CK = HD. Nun war CK = F. Folglich ist HD = F.



Zweyter Fall.

Es sey GB ein Vielfaches von E, so wird auf eben die Art bewiesen, daß alsdenn auch HD von F eben so vielfach sey.

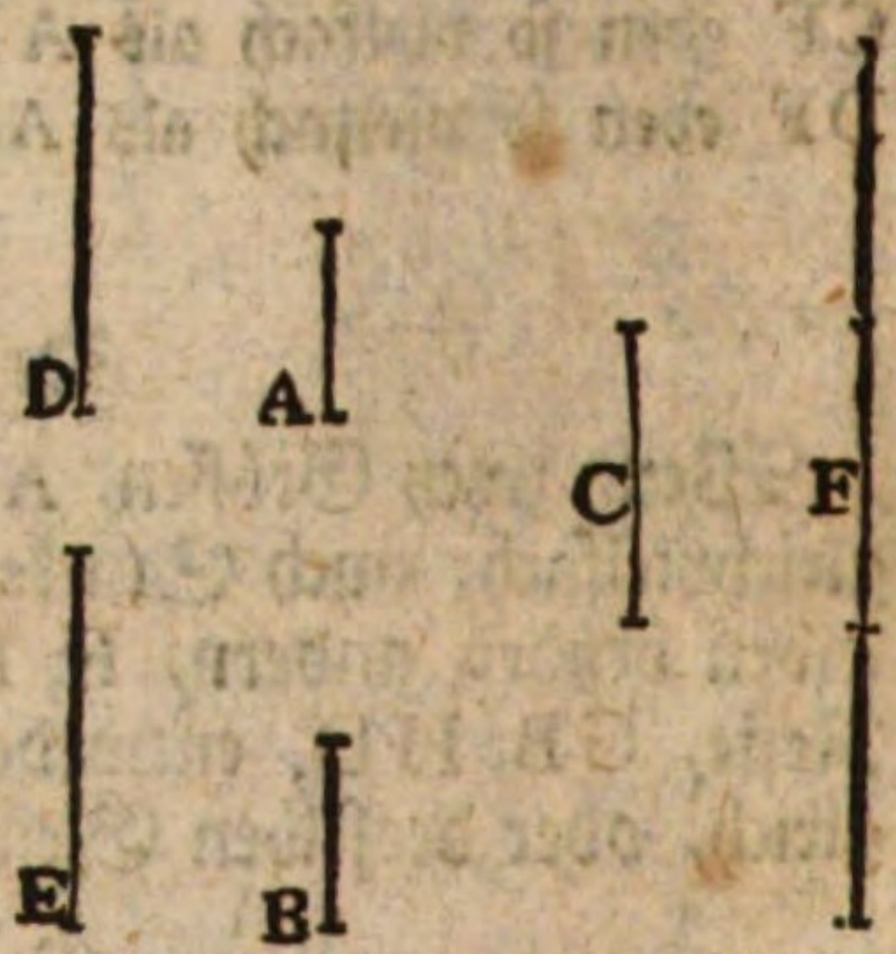


Der 7. Satz.

Gleiche Grössen, A, B, haben zu Einer Grösse, C, auch Eine Grösse, C, hat zu gleichen Grössen, A, B, einerley Verhältniß.

Erster Theil.

Mache von A, B, ein Gleichvielfaches, D, E, so ist, weil $A = B$, auch $D = E$. Macht man nun von C ein Vielfaches F, so ist wie $D \gtrless F$, eben so auch $E \gtrless F$, folglich (5, 5. Def.) $A : C = B : C$.



Zweyter Theil.

Da $D = E$, so ist wie $F \gtrless D$, eben so auch $F \gtrless E$, folglich (5, 5. Def.) $C : A = C : B$.

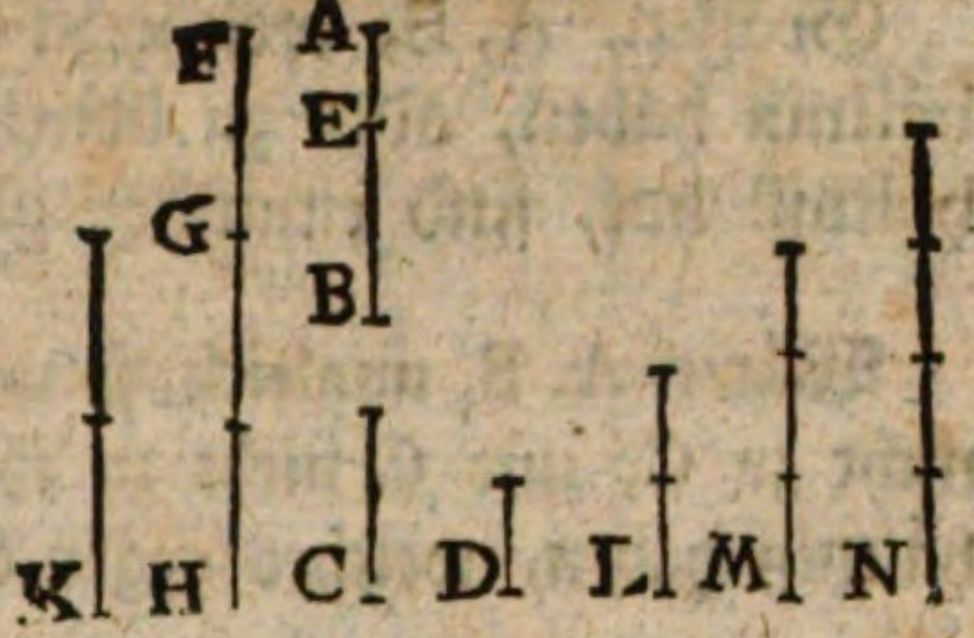
Der 8. Satz.

Von zweyen ungleichen Grössen, AB, C, hat die grössere, AB, zu Einer dritten, D, eine grössere Verhältniß, als die kleinere, C. Und Eine dritte, D, hat zu der kleinern, C, eine grössere Verhältniß, als zu der grössern, AB.

Da $AB > C$, so mache $BE = C$, folglich wird (5, 4. Def.) von den beyden AE, EB, die kleinere vervielfältigt die D übertreffen. Nun ist entweder $AE < EB$, oder $BE < EA$.

Erster

Erster Fall.



Es sey $AE < EB$. Nun sey von AE das Vielfache $FG > D$. So vielfach FG von AE, eben so vielfach sey GH von EB, desgleichen K von C. Nimm von D das zweyfache, L, das dreyfache, M, das vierfache, N, welches zunächst grösser als K sey, so ist nicht $K < M$.

Da FG von AE eben so vielfach als GH von EB, so ist (5, 1. S.) FG von AE eben so vielfach als FH von AB. Nun ist FG von AE eben so vielfach als K von C. Folglich ist FH von AB eben so vielfach, als K von C, das ist, FH, K, sind das Gleichvielfache von AB, C.

Da GH von EB eben so vielfach als K von C, und $EB = C$, so ist $GH = K$. Nun ist nicht $K < M$. Folglich ist auch nicht $GH < M$. Nun ist $FG > D$. Folglich ist $FH > D + M$, das ist $FH > N$. Nun ist nicht $K > N$, auch sind FH, K, ein Gleichvielfaches von AB, C, und N ein Vielfaches von D. Folglich ist (5, 7. Def.) $AB : D > C : D$.

Aus eben den Gründen, weil $N > K$, aber nicht $N > FH$, ist $D : C > D : AB$.

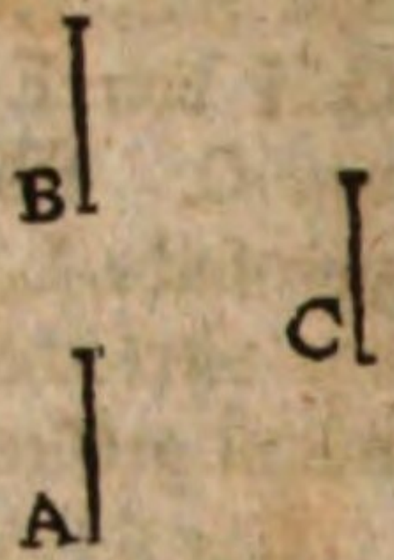
Zweyter Fall.

Es sey $BE < EA$. Nun sey von BE das Vielfache $GH > D$. So vielfach GH von BE, eben so vielfach sey FG von AE, desgleichen K von C. Folglich ist wie vorher erweislich, daß FH von AB eben so vielfach als K von C. Nimm wie vorher von D das zweyfache, dreyfache, vierfache, L, M, N, so daß N zunächst $> FG$, folglich FG nicht $< M$. Nun ist $GH > D$, folglich $FH > D + M$, das ist, $FH > N$. Nun ist $FG > GH$, das ist, $> K$, aber nicht $> N$, und daher K nicht $> N$. Folglich ist eben so wie vorher, $AB : D > C : D$ und $D : C > D : AB$.

Der

Der 9. Satz.

Grössen, A, B, welche zu Einer dritten, C, einerley Verhältniß haben, oder zu denen Eine dritte, C, einerley Verhältniß hat, sind einander gleich.

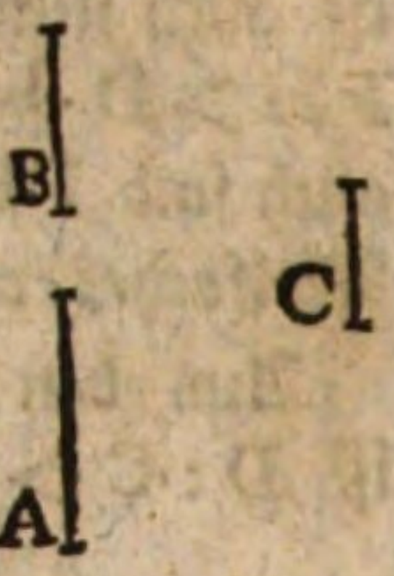


Wären A, B, ungleich, so würden sie (5, 8. S.) nicht zu C, und C nicht zu ihnen, einerley Verhältniß haben, welches gegen das Angenommene.

Der 10. Satz.

Von zweyen Grössen, A, B, ist diejenige die grössere, welche zu Einer dritten, C, eine grössere Verhältniß hat; und diejenige die kleinere, zu welcher Eine dritte, C, eine grössere Verhältniß hat.

Erster Theil.



Es sey $A : C > B : C$. Wäre nun nicht $A > B$, so wär entweder $A = B$, oder $A < B$, und im ersten Fall (5, 7. S.) $A : C = B : C$, im zweyten (5, 8. S.) $A : C < B : C$, beydes aber gegen das Angenommene.

Zweyter Theil.

Es sey $C : B > C : A$. Wäre nun nicht $B < A$, so wär entweder $B = A$, oder $B > A$, und im ersten Fall (5, 7. S.) $C : B = C : A$, im zweyten (5, 8. S.) $C : B < C : A$, beydes aber gegen das Angenommene.

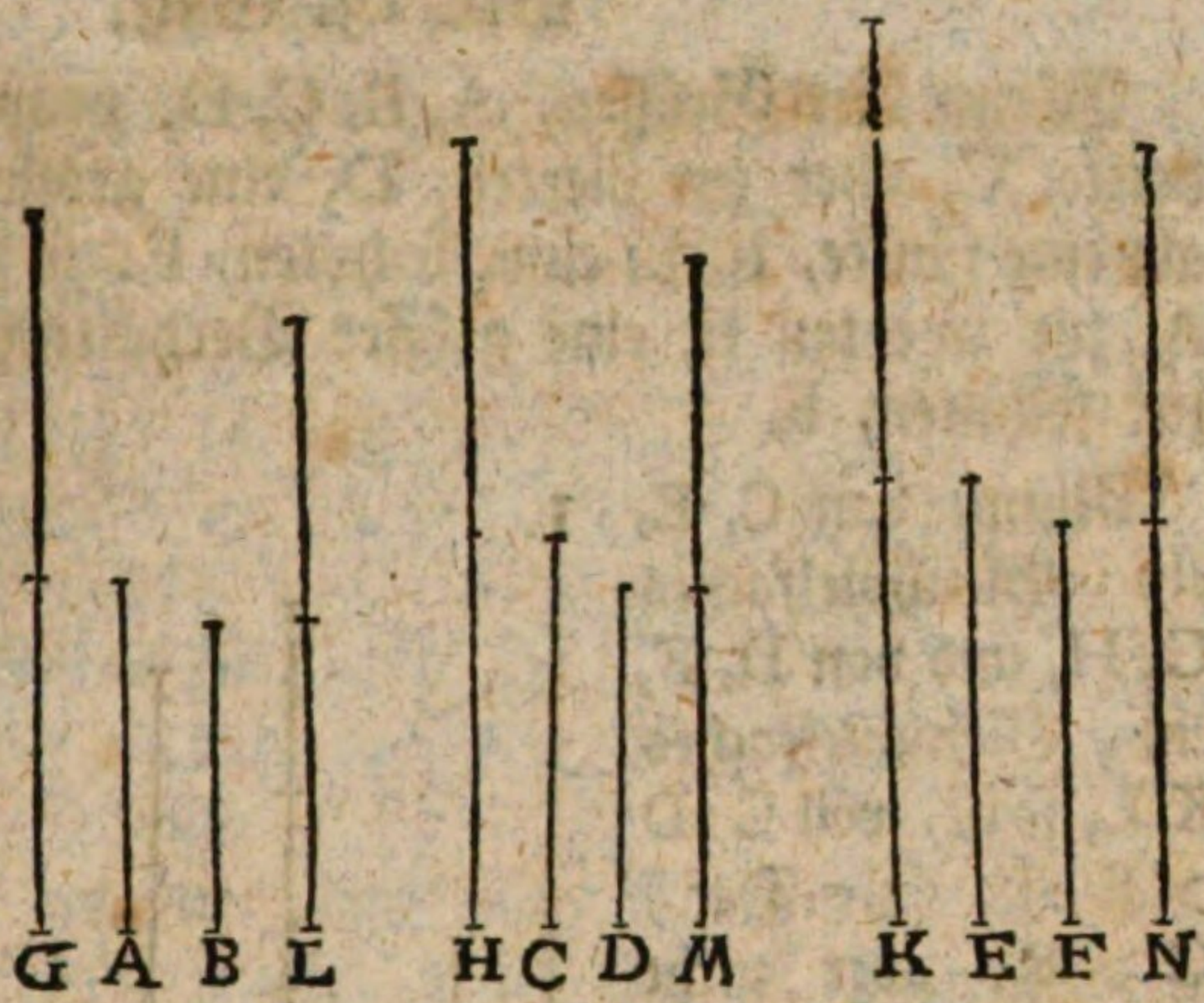
Der 11. Satz.

Verhältnisse, $A : B$, $E : F$, welche Einer dritten, $C : D$, gleich; sind selbst einander gleich.

Von A, C, E, nimm willkührlich das Gleichvielfache, G, H, K, und von B, D, F, das Gleichvielfache L, M, N, so ist, (5, 5. Def.)

weil

weil A:B=C:D, wie G≷L so auch H≷M, und weil C:D=E:F, wie H≷M, so auch K≷N. Folglich ist wie G≷L, so auch K≷N. Nun sind G, K, von A, E, und L, N, von B, F, gleichvielfach. Folglich ist (5, 5. Def.) A:B=E:F.



Der 12. Satz.

Wenn mehrere Grössen, A, B, C, D, E, F, proportionirt sind: so verhalten sich alle Forderglieder, A, C, E, zu allen Hintergliedern, B, D, F, wie eins der Forderglieder, A, zu einem der Hinterglieder, B.

Von A, C, E, nimm willkührlich das Gleichvielfache, G, H, K, und von B, D, F, das Gleichvielfache, L, M, N, so ist, weil A:B=C:D=E:F, (5, 5. Def.) wie G≷L, so auch H≷M und K≷N, und daher wie G≷L, so auch G+H+K≷L+M+N. Nun

ist, weil G, H, K, von A, C, E, und L, M, N, von B, D, F, gleichvielfach, (5, 1. S.) G von A eben so vielfach als G+H+K von A+C+E, und L von B eben so vielfach als L+M+N von B+D+F, das ist, G und G+H+K sind das Gleichvielfache von A und von A+C+E, desgleichen L und L+M+N sind das Gleichvielfache von B und von B+D+F. Folglich ist (5, 5. Def.) A:B=A+C+E:B+D+F.

Der

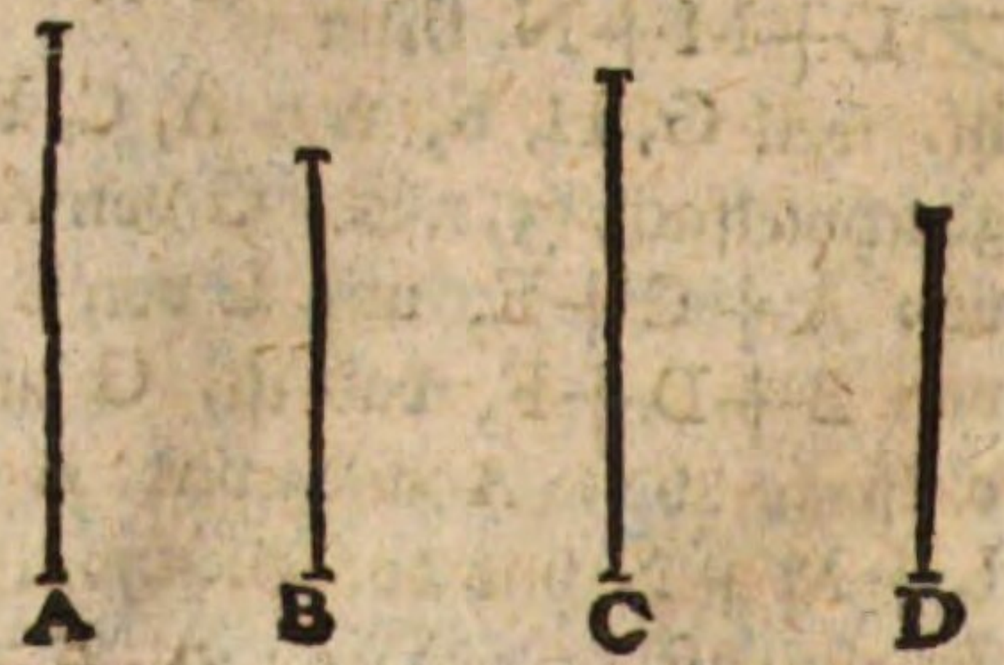
Der 13. Satz.

Wenn vier Grössen, A, B, C, D, proportionirt sind, die dritte, C, aber zur vierten, D, eine grössre Verhältniß hat, als eine fünfte, E, zu einer sechsten, F: so hat auch die erste, A, zur zweyten B, eine grössre Verhältniß als die fünfte, E, zur sechsten, F.

Nimm von C, E, ein Gleichvielfaches G, H, und von D, F, ein Gleichvielfaches K, L, so ist, weil C : D > E : F, (5, 7. Def.) G > K, aber nicht H > L. So vielfach G von C, eben so vielfach sey M von A, und so vielfach K von D, eben so vielfach sey N von B. Nun ist C : D = A : B. Folglich (5, 5. Def.) da G > K, ist M > N. Nun war H nicht > L, auch waren M, H, das Gleichvielfache von A, E, und N, L, das Gleichvielfache von B, F. Folglich ist (5, 7. Def.) A : B > E : F.

Der 14. Satz.

Wenn vier Grössen, A, B, C, D, proportionirt sind, und die erste, A, entweder grösser, oder eben so groß, oder kleiner, als die dritte, C, ist: so ist die zweyte, B, im ersten Fall auch grösser, im zweyten auch eben so groß, im dritten auch kleiner, als die vierte, D.

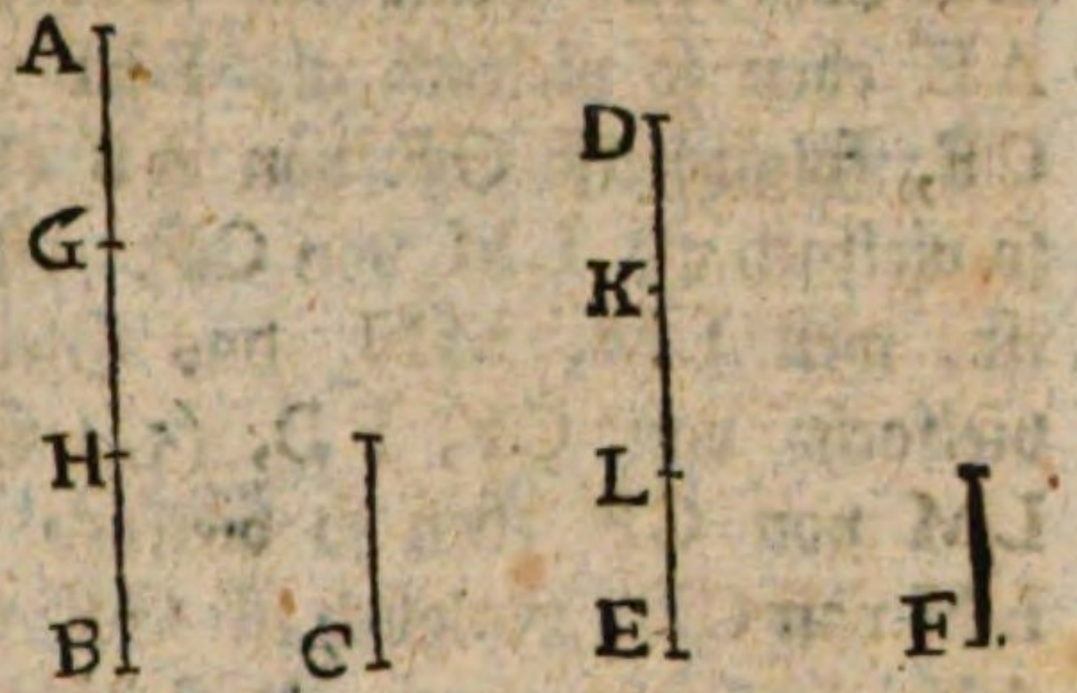


Wenn A > C, so ist (5, 8. S.) A : B > C : B. Nun ist A : B = C : D, folglich ist (5, 13. S.) C : D > C : B, folglich ist (5, 10. S.) D < B, das ist, B > D. Auf eben die Art wird bewiesen, daß B < D, wenn A < C und daß B = D, wenn A = C.

Der

Der 15. Satz.

Grössen, C, F, verhalten sich, wie ihr Gleichvielfaches, AB, DE.



Da AB von C eben so vielfach als DE von F, so ist C in AB so vielmal als F in DE. Zerlege daher AB in ihre Theile, AG, GH, HB, deren jeder = C, und DE in ihre Theile, DK, KL, LE, deren jeder = F, so sind dieser Theile so viel als jener, auch jene, so wie diese einander gleich. Folglich ist (5, 7. S.) AG : DK = GH : KL = HB : LE, folglich (5, 12. S.) AG : DK = AB : DE. Nun ist AG = C, und DK = F, folglich C : F = AB : DE.

Der 16. Satz.

Wenn vier Grössen, A, B, C, D, proportionirt sind: so sind sie auch verwechselt proportionirt.

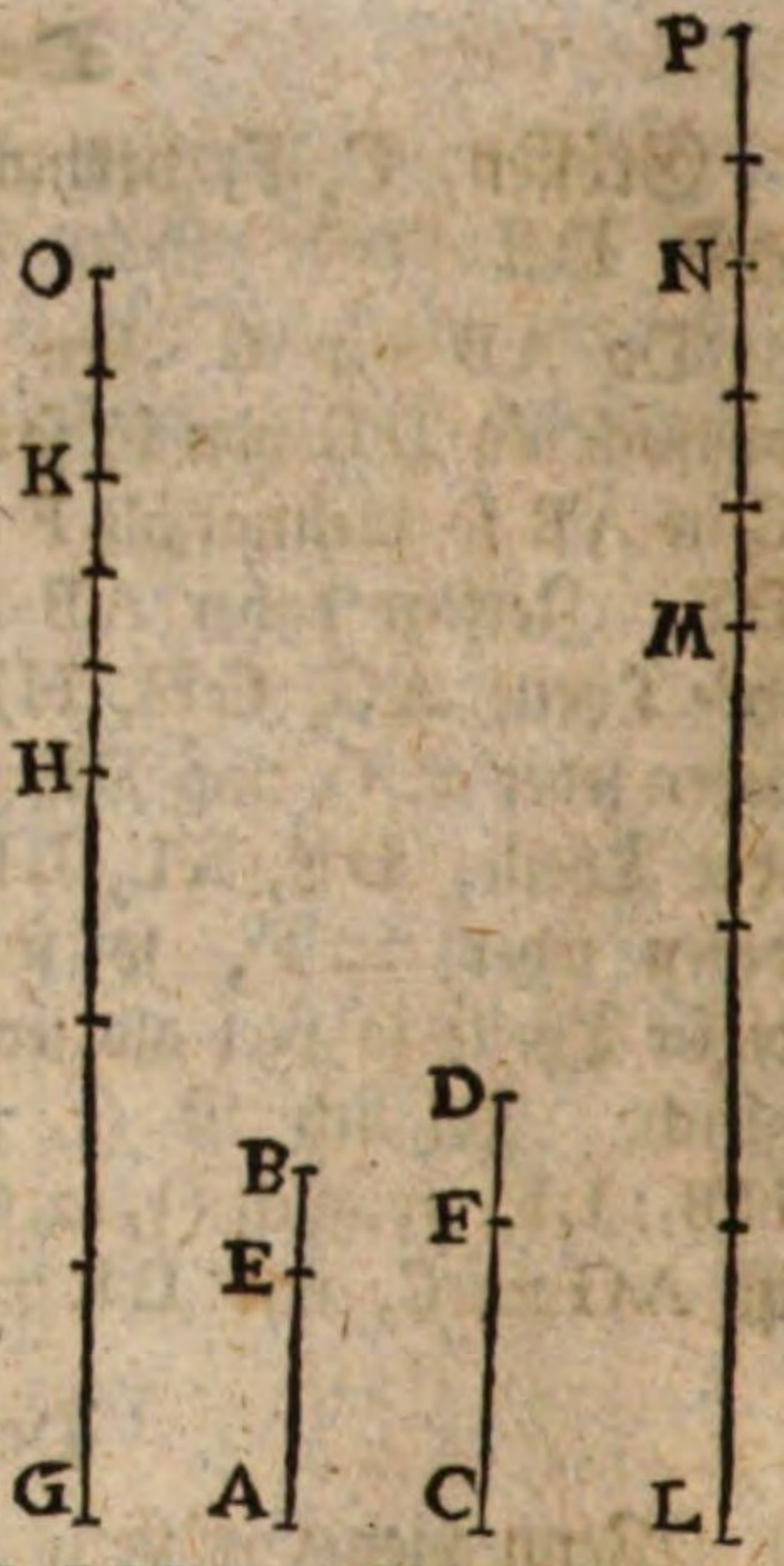
Mache von A, B, ein Gleichvielfaches, E, F, und von C, D, ein Gleichvielfaches, G, H, so ist (5, 15. S.) A : B = E : F und C : D = G : H. Nun ist A : B = C : D. Folglich (5, 11. S.) E : F = G : H, folglich (5, 14. S.) wie E ≷ G, so auch F ≷ H. Nun waren E, F, das Gleichvielfache von A, B, und G, H, das Gleichvielfache von C, D. Folglich ist (5, 5. Def.) A : C = B : D.

Der 17. Satz.

Wenn verbundne Grössen, AB, BE, CD, DF, proportionirt sind, so sind sie auch **getrennt** proportionirt.

Mache von AE, EB, CF, FD, ein Gleichvielfaches GH, HK, LM, MN, und von EB, FD, ein Gleichvielfaches, KO, NP. Da

Da GH, HK, das Gleichvielfache von AE, EB, so ist (5, 1. S.) GH von AE eben so vielfach als GK von AB. Nun war GH von AE eben so vielfach als LM von CF, folglich ist GK von AB eben so vielfach als LM von CF. Nun ist, weil LM, MN, das Gleichvielfache von CF, FD, (5, 1. S.) LM von CF eben so vielfach als LN von CD. Folglich ist GK von AB eben so vielfach als LN von CD, das ist, GK, LN, sind das Gleichvielfache von AB, CD.

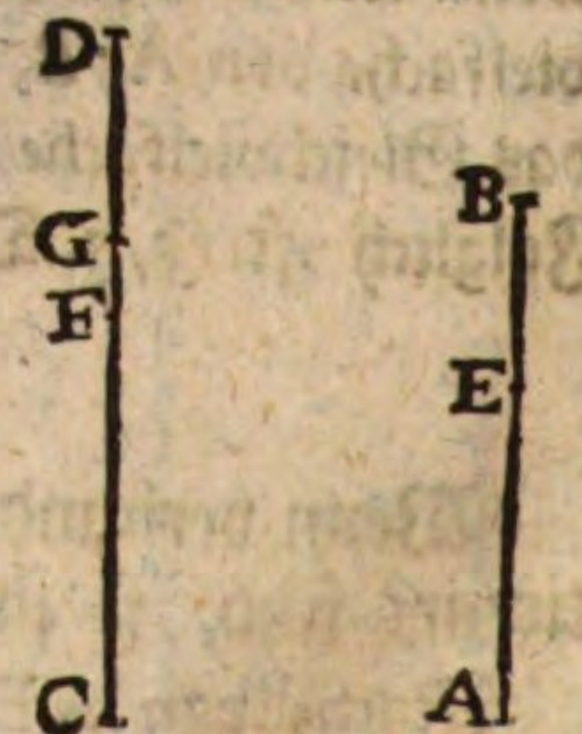


Da HK, MN, von EB, FD, und KO, NP, von EB, FD, gleichvielfach: so sind (5, 2. S.) **verbunden** HO, MP, das Gleichvielfache von EB, FD. Nun waren GK, LN, das Gleichvielfache von AB, CD, und es war AB : BE = CD : DF. Folglich ist (5, 5. Def.) wie GK ≷ HO, so auch LN ≷ MP, folglich, wenn man HK, MN, wegnimmt, ist wie GH ≷ KO, so auch LM ≷ NP. Nun sind GH, LM, von AE, CF, und KO, NP, von EB, FD, gleichvielfach. Folglich ist (5, 5. Def.) AE : EB = CF : FD.

Der 18. Satz.

Wenn getrennte Grössen, AE, EB, CF, FD, proportionirt sind: so sind sie auch **verbunden** proportionirt.

Wäre nicht AB : BE = CD : DF, so setze die Proportion so, daß das vierte Glied entweder < oder > DF.



Erster Fall.

Es sey das vierte Glied < DF, so wie etwa DG, nämlich AB : BE = CD : DG, so ist (5, 17. S.) AE : EB = CG : GD. Nun ist angenommen AE : EB = CF : FD.

Folglich

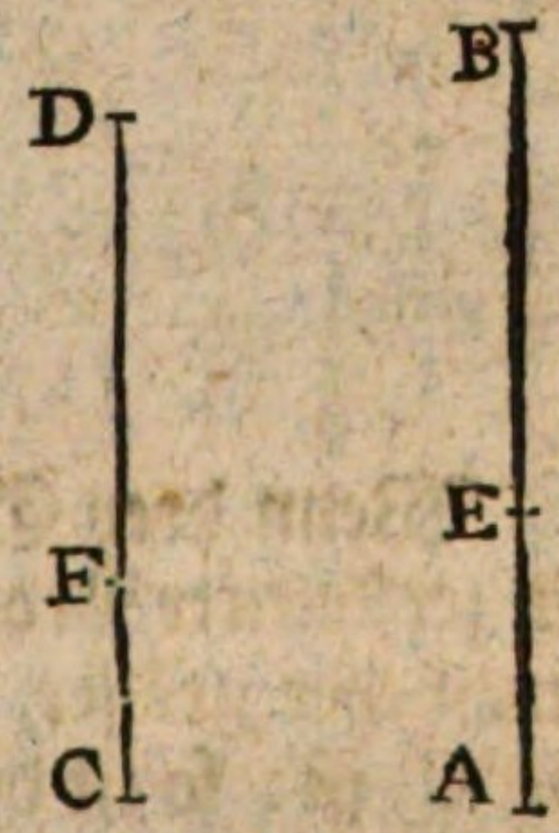
Folglich ist (5, 11. S.) CG : GD = CF : FD. Nun ist offenbar CG > CF. Folglich ist (5, 14. S.) GD > FD, welches gegen das Angenommene GD < FD.

Zweyter Fall.

Es sey das vierte Glied > DF, so wird auf eben die Art bewiesen, daß solches wiedersprechend sey.

Der 19. Satz.

Wenn das Ganze, AB, zum Ganzen, CD, wie ein Stück, AE, zu einem Stück, CF; so ist auch der Rest, EB, zum Rest, FD, wie das Ganze, AB, zum Ganzen, CD.



Da AB : CD = AE : CF, so ist (5, 16. S.) verwechselt AB : AE = CD : CF, folglich (5, 17. S.) getrennt EB : AE = FD : CF, folglich (5, 16. S.) verwechselt EB : FD = AE : CF. Nun ist angenommen AE : CF = AB : CD. Folglich ist (5, 11. S.) EB : FD = AB : CD.

Zusatz.

Da eben bewiesen worden, daß AB : CD = BE : DF, wenn AB : CD = AE : CF, so ist (5, 16. S.) verwechselt AB : BE = CD : DF, und AB : AE = CD : CF, oder AB : AB — BE = CD : CD — DF, das ist, (5, 17. Def.) zurückkehrend. Wenn demnach verbundene Grössen proportionirt sind, so sind sie auch zurückkehrend proportionirt.

Der 20. Satz.

Wenn drey Grössen, A, B, C, mit dreyen andern, D, E, F, in unzerstreuter Proportion sind, und gleichförmig die erste, A, entweder grösser, oder eben so groß, oder kleiner, als die dritte, C, ist: so ist die vierte, D, im ersten Fall auch grösser, im zweyten auch eben so groß, im dritten auch kleiner, als die sechste, F.

Erster Fall.

Es sey A > C, folglich ist (5, 8. S.) A : B > C : B. Nun ist (5, 19. Def.) A : B = D : E und umgekehrt C : B = F : E. Folglich D : E > F : E. Folglich (5, 10. S.) D > F.

Zweyter Fall.

Es sey A = oder < C, so wird eben so bewiesen, daß D alsdenn auch = oder < F.

Der 21. Satz.

Wenn drey Grössen, A, B, C, mit dreyen andern, D, E, F, in zerstreuter Proportion sind, und gleichförmig die erste, A, entweder grösser, oder eben so groß, oder kleiner, als die dritte, C, ist: so ist die vierte, D, im ersten Fall auch grösser, im zweyten auch eben so groß, im dritten auch kleiner, als die sechste, F.

Erster Fall.

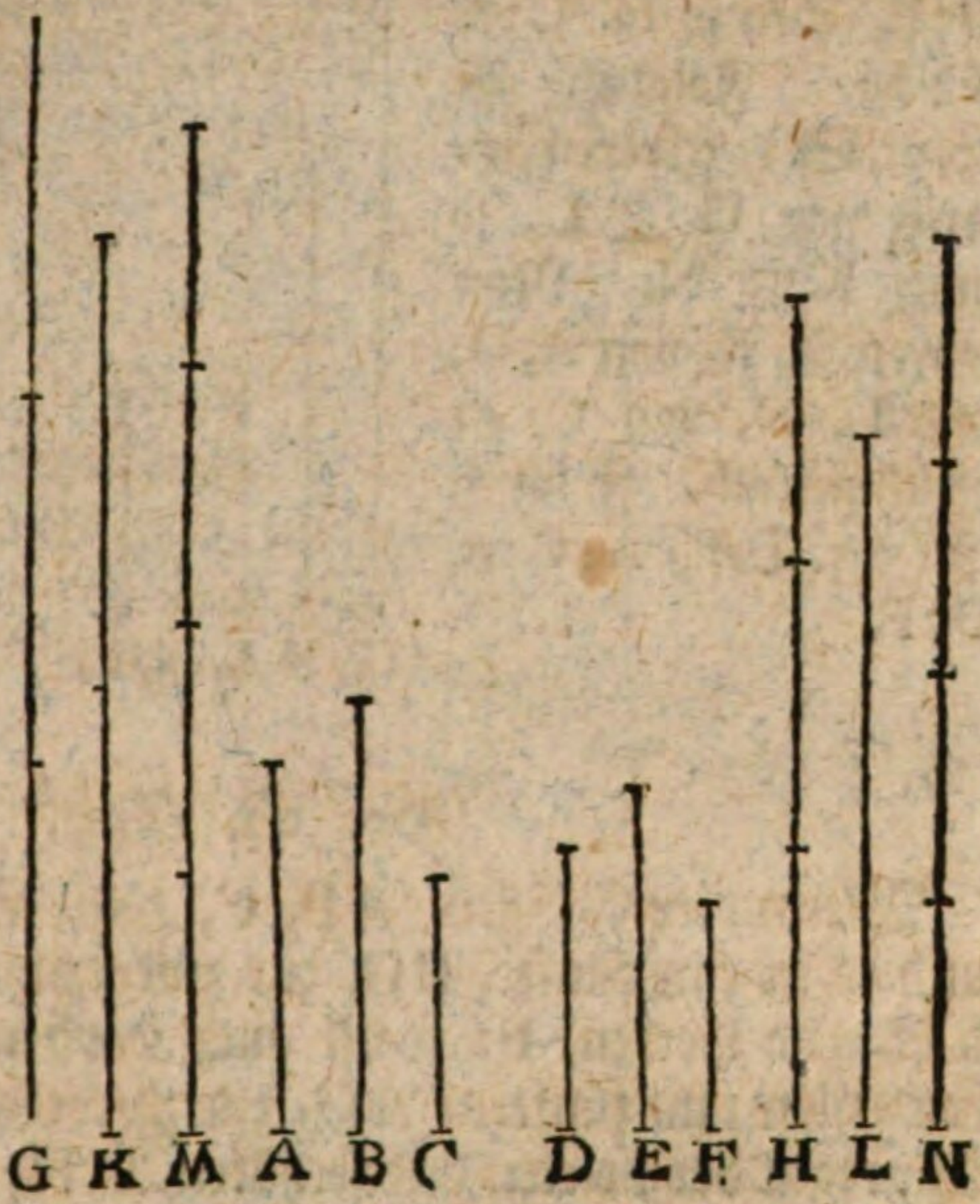
Es sey A > C, so ist (5, 8. S.) A : B > C : B. Nun ist (5, 20. Def.) A : B = E : F und umgekehrt C : B = E : D. Folglich ist E : F > E : D, folglich (5, 10. S.) F < D, das ist, D > F.

Zweyter Fall.

Es sey A = oder < C, so wird eben so bewiesen, daß D alsdenn auch = oder < F.

Der 22. Satz.

Wenn mehrere Grössen, A, B, C, mit eben so vielen andern, D, E, F, unzerstreut proportionirt sind: so sind sie auch gleichförmig proportionirt.



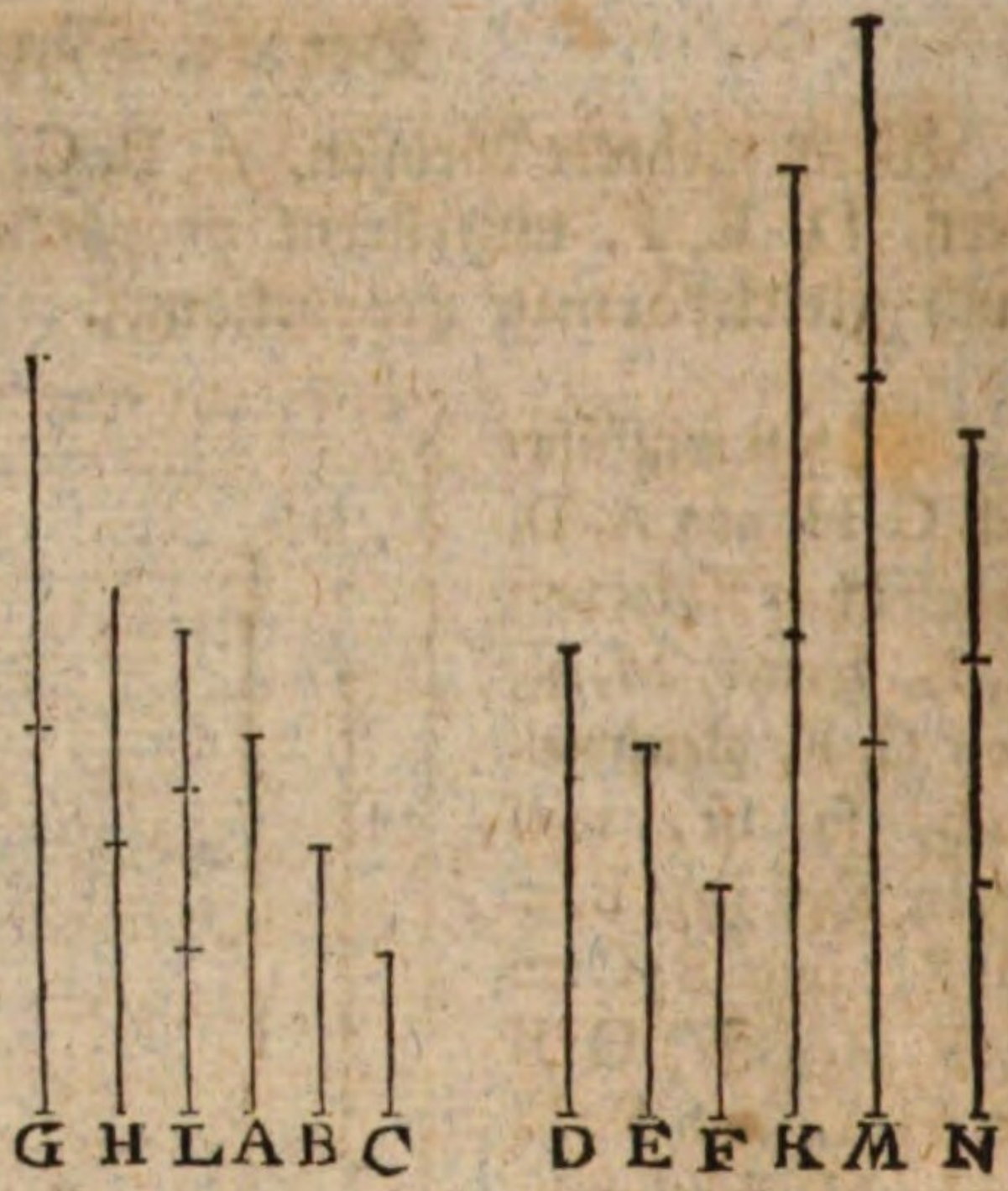
Es seyen willkührlich G, H, von A, D, desgleichen K, L, von B, E, ferner, M, N, von C, F, gleichvielfach, so ist, weil (5, 19. Def.) A:B = D:E, und B:C = E:F, (5, 4. S.) G:K = H:L, und K:M = L:N, folglich ist (5, 20. S.) gleichförmig wie G ⋛ M, so auch H ⋛ N. Nun sind G, H, von A, D, und M, N, von C, F, gleichvielfach. Folglich (5, 5. Def.) ist A:C = D:F.

Der 23. Satz.

Wenn drey Grössen, A, B, C, mit eben so vielen andern, D, E, F, zerstreut proportionirt sind: so sind sie auch gleichförmig proportionirt.

Es seyen von A, B, D, die Gleichvielfachen, G, H, K, und von C, E, F, willkührlich andre Gleichvielfache, L, M, N, so ist (5, 15. S.) A:B = G:H, und E:F = M:N. Nun ist

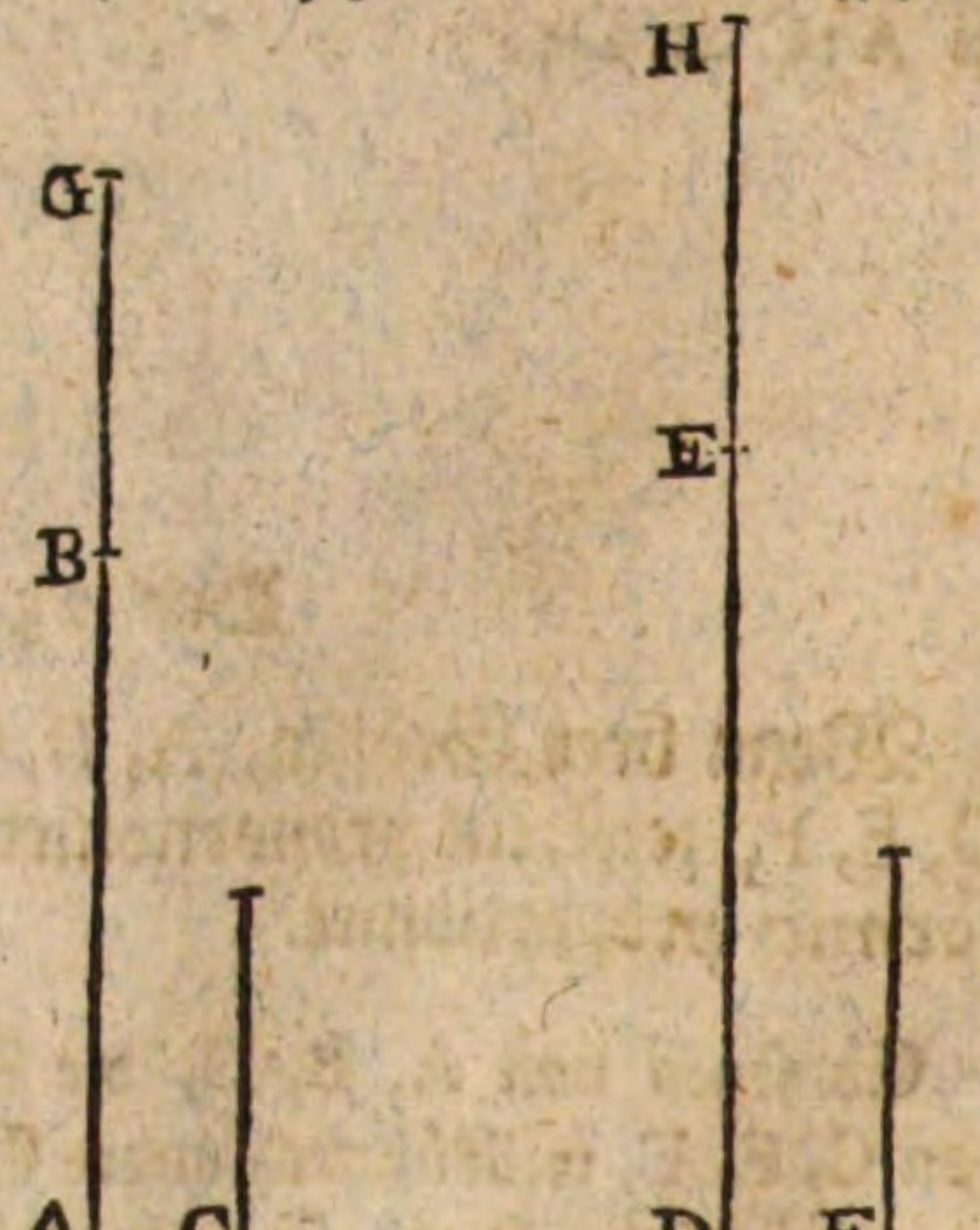
(5, 20. Def.) A : B = E : F. Folglich ist (5, 11. S.) G : H = M : N. Nun ist, weil (5, 20. Def.) B : C = D : E, eben so H : L = K : M. Folglich ist (5, 21. S.) **gleichförmig** wie G ∠ L, so auch K ∠ N. Nun waren G, K, von A, D, und L, N, von C, F, gleichvielfach. Folglich ist (5, 5. Def.) A : C = D : F.



Der 24. Satz.

Wenn vier Grössen, AB, C, DE, F, proportionirt sind, und es ist eine fünfte, BG, zur zweyten, C, wie eine sechste, EH, zur vierten, F: so ist auch **verbunden** das Aggregat der ersten und fünften, AG, zur zweyten Grösse, C, wie das Aggregat der dritten und sechsten, DH, zur vierten Grösse, F.

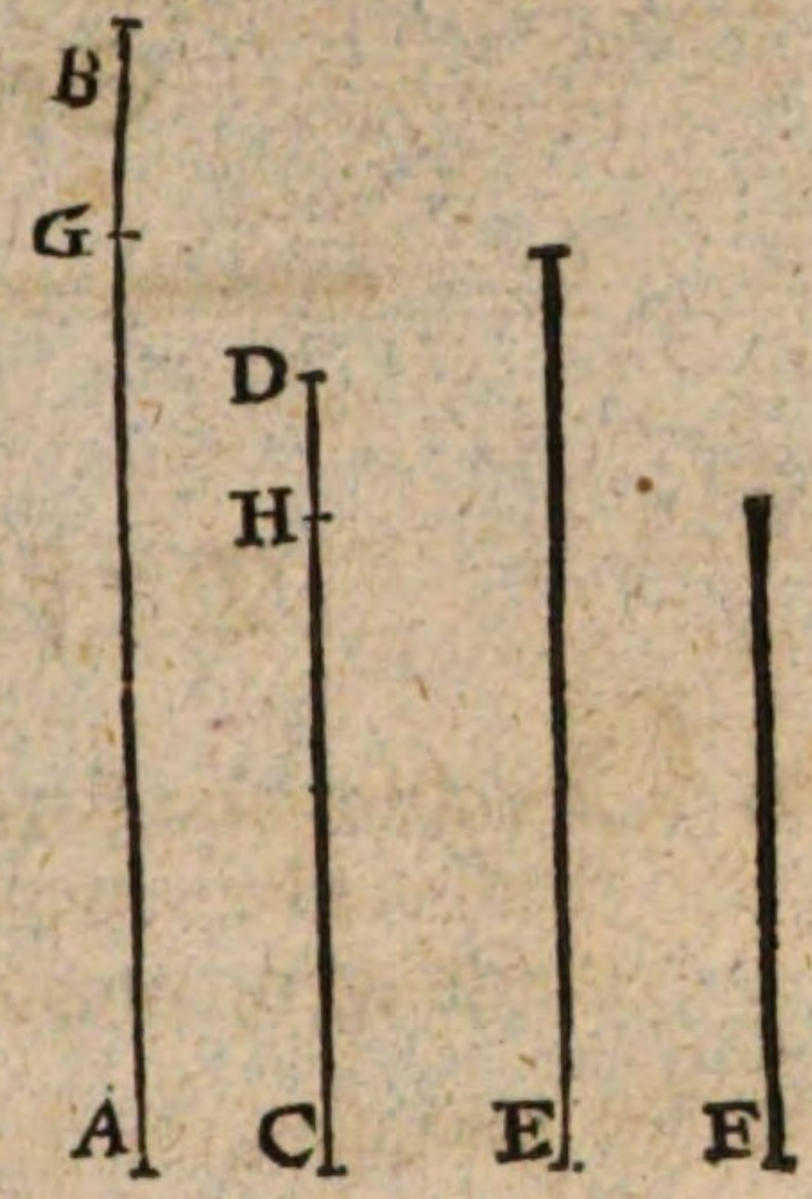
Da BG : C = EH : F, so ist (5, 4. Zus.) **umgekehrt** C : BG = F : EH. Nun ist angenommen AB : C = DE : F. Folglich ist (5, 22. S.) **gleichförmig**, AB : BG = DE : EH, folglich (5, 18. S.) AG : BG = DH : EH. Nun ist angenommen BG : C = EH : F. Folglich ist (5, 22. S.) **gleichförmig**, AG : C = DH : F.



Der

Der 25. Satz.

Wenn vier Grössen, AB, CD, E, F, proportionirt sind: so ist das Aggregat der grösten und kleinsten, AB, F, grösser, als das Aggregat der beyden übrigen, CD, E.



Da AB die gröste, und F die kleinste, so ist AB > E, und CD > F. Mache daher AG = E und CH = F. Nun ist AB : CD = E : F. Folglich AB : CD = AG : CH, folglich (5, 19. S.) AB : CD = GB : HD. Nun ist AB > CD. Folglich ist auch GB > HD. Nun war AG = E, und F = CH, daher (1, 2. Ax.) AG + F = CH + E. Folglich ist, wenn dies zu GB, HD, hinzukommt, (1, 4. Ax.) GB + AG + F > HD + CH + E, das ist, AB + F > CD + E.

Euklids Elemente

Sechstes Buch.

Definitionen.

1. Geradliniche Figuren sind änlich, wenn sie einander gleichwinklich, und die Seiten, welche gleiche Winkel einschliessen, proportionirt sind.

2. In geradlinichen Figuren sind die Seiten in umgekehrter Verhältniß, wenn eine Seite der ersten Figur zu einer Seite der zweyten sich verhält, wie eine andre Seite der zweyten zu einer andern Seite der ersten.

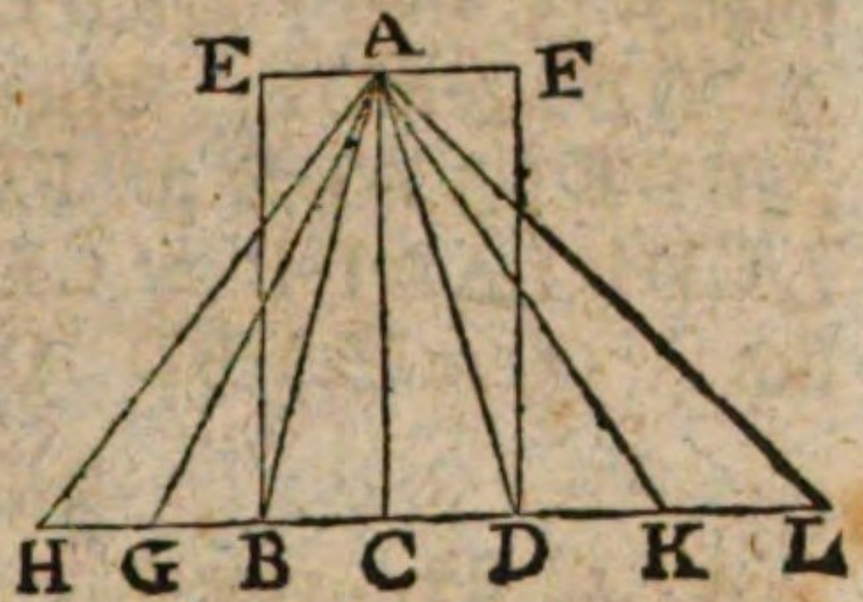
3. Eine gerade Linie ist nach stetiger Proportion geschnitten, wenn die ganze Linie zum grössern Abschnitt sich verhält, wie der grössre Abschnitt zum kleinern.

4. Die Höhe einer jeden Figur ist der von der Spitze auf die Basis gefällte Perpendikel.

5. Wenn zwey oder mehrere Verhältnisse so beschaffen sind, daß immer das Hinterglied einer vorgehenden, das Forderglied der nächstfolgenden ist: so ist die Verhältniß des Forderglieds der ersten zum Hinterglied der letzten aus allen diesen Verhältnissen, oder solchen, die ihnen gleich sind, zusammengesetzt.

Der 1. Satz.

Triangel, ABC, ACD, wie auch Parallelogramme, EC, CF, von einerley Höhe, verhalten sich, wie ihre Grundlinien, BC, CD.



Verlängre BD, an beyden Seiten, nach H, L. Mache BG, GH, und so viel du wilst, der BC; desgleichen DK, KL, und so viel du wilst, der CD, gleich. Ziehe AG, AH, AK, AL.

Erster Theil.

Da CB, BG, GH, gleich, so sind (1, 38. S.) die Triangel AGH, AGB, ABC, gleich, folglich sind HC, △AHC von BC, △ABC, und aus eben dem Grunde, LC, △ALC, von CD, △ACD, gleichvielfach. Nun ist (1, 38. S.) wie HC ≷ LC, so auch △AHC ≷ △ALC. Folglich ist (5, 5. Def.) BC : CD = △ABC : △ACD.

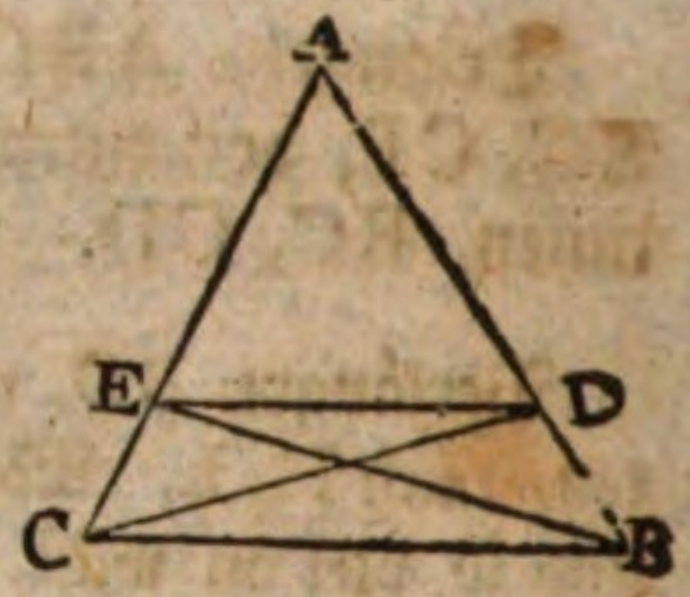
Zweyter Theil.

Da (1, 41. S.) EC = 2 △ABC, und CF = 2 △ACD, so ist (5, 15. S.) △ABC : △ACD = EC : CF. Nun war BC : CD = △ABC : △ACD. Folglich ist (5, 11. S.) BC : CD = EC : CF.

Der 2. Satz.

Wenn in einem Triangel, ABC, eine gerade Linie, DE, einer seiner Seiten, BC, parallel ist: so schneidet sie die beyden andern Seiten, AB, AC, proportionirt. Und wenn eine gerade Linie, DE, zwey Seiten eines Triangels, AB, AC, proportionirt schneidet: so ist sie der dritten Seite, BC, parallel.

Erster Theil.



Ziehe BE, CD, so ist, weil DE die gemeine Grundlinie, und DE, BC, parallel, (1, 37. S.) △BDE = △CDE, folglich (5, 7. S.) △BDE : △ADE = △CDE : △ADE. Nun ist (6, 1. S.) △BDE : △ADE = BD : DA, und △CDE : △ADE = CE : EA. Folglich ist (5, 11. S.) BD : DA = CE : EA.

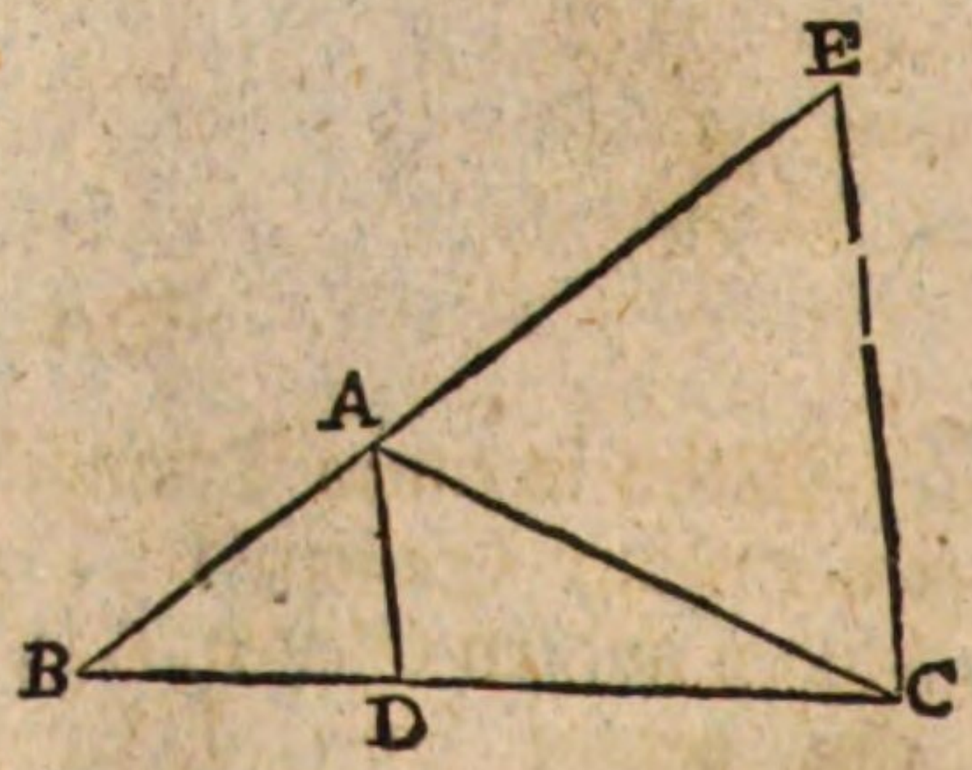
Zweyter Theil.

Es sey BD : DA = CE : EA. Nun ist (6, 1. S.) BD : DA = △BDE : △ADE, und CE : EA = △CDE : △ADE. Folglich (5, 11. S.) △BDE : △ADE = △CDE : △ADE, folglich (5, 9. S.) △BDE = △CDE. Nun ist die Grundlinie DE gemein. Folglich (1, 39. S.) sind DE, BC, parallel.

Der 3. Satz.

Wenn in einem Triangel, ABC, eine gerade Linie, AD, einen seiner Winkel, BAC, halbirt: so schneidet sie die Gegenseite solches Winkels, BC, den beyden andern Seiten, BA, AC, proportionirt. Und wenn sie die eine Seite, BC, den beyden übrigen Seiten, BA, AC, proportionirt schneidet, so halbirt sie den Gegenwinkel solcher Seite, BAC.

Erster Theil.



Ziehe (1, 31. S.) durch C der AD die CE parallel, und verlängre BA bis E, so ist (1, 29. S.) ACE = ÇAD, und CEA = DAB. Nun ist angenommen CAD = DAB. Folglich ist ACE = CEA, folglich (1, 6. S.) AE = AC. Nun ist, weil AD, CE, im △BEC, parallel, (6, 2. S.) BD : DC = BA : AE. Folglich ist (5, 7. S.) BD : DC = BA : AC.

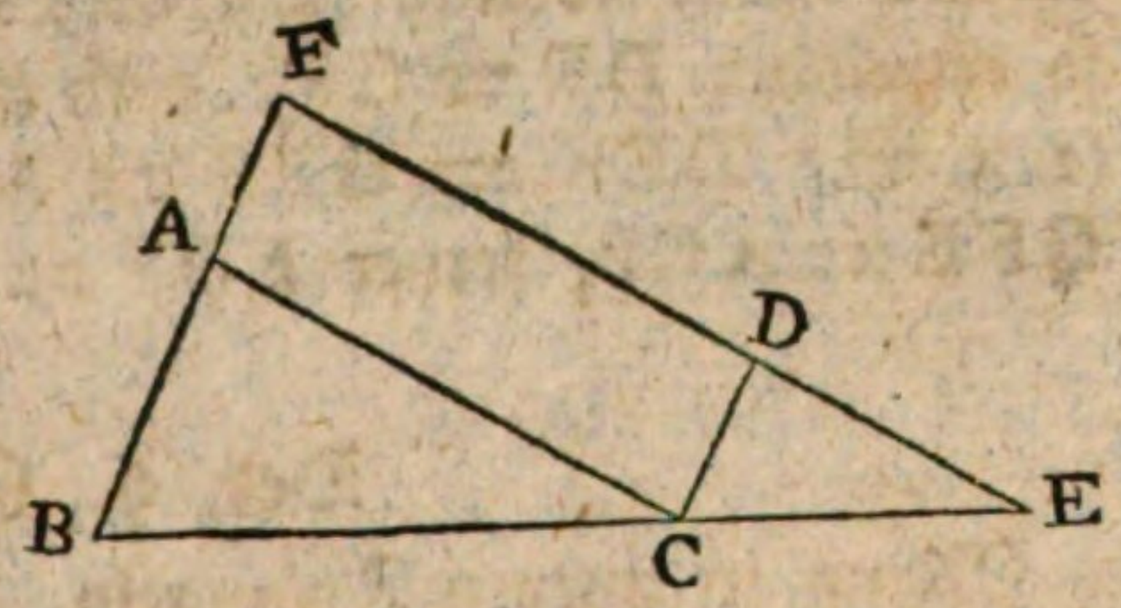
Zweyter Theil.

Es sey BD : DC = BA : AC. Nun ist, weil AD, CE, im △BEC parallel, (6, 2. S.) BD : DC = BA : AE. Folglich ist (5, 11. S.) BA : AE = BA : AC, folglich (5, 9. S.) AE = AC, folglich (1, 5. S.) AEC = ACE. Nun ist (1, 29. S.) AEC = BAD, und ACE = DAC. Folglich ist BAD = DAC.

Der 4. Satz.

In gleichwinklichen Triangeln, ABC, DCE, sind die Seiten, von welchen gleiche Winkel eingeschlossen werden, proportionirt, und die, so gleichen Winkeln gegenüberliegen, homolog.

Es sey in den gleichwinklichen Triangeln, ABC, DCE, der Winkel, BAC = CDE, ABC = DCE, ACB = DEC. Bringe CE mit BC in Eine gerade Linie.



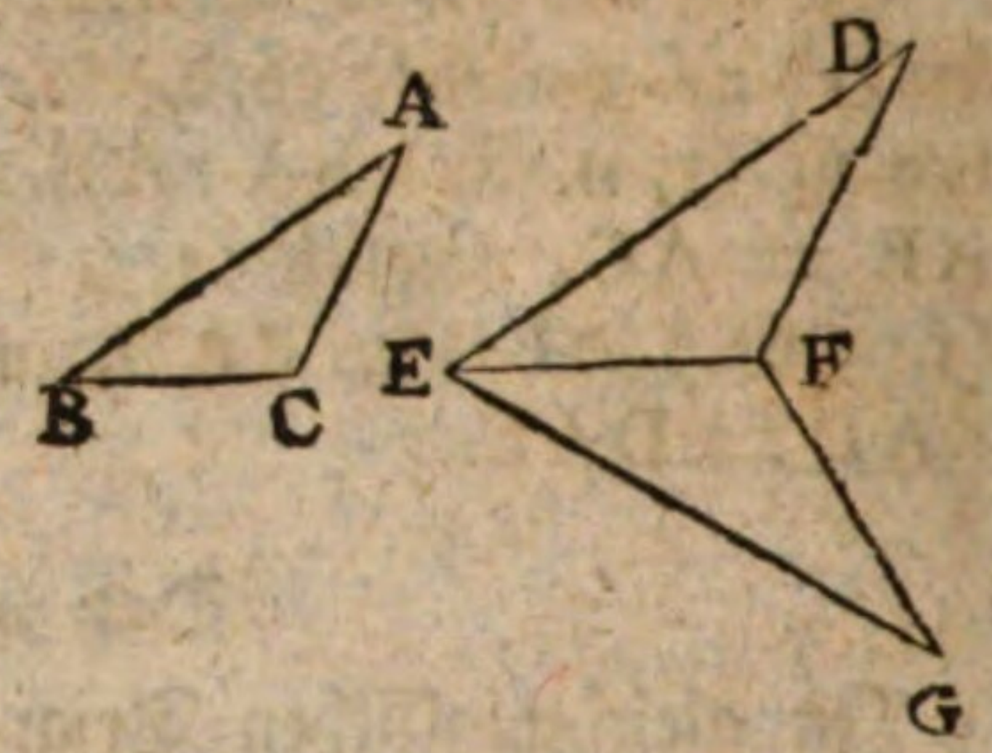
Da (1, 17. S.) ABC + ACB < 2 R, und angenommen ACB = DEC, so ist ABC + DEC < 2 R. Folglich (1, 11. Ax.) treffen BA, ED, an dieser Seite verlängert, zusammen. Dies geschehe in F.

Da DCE = ABC, und ACB = DEC, so ist (1, 28. S.) BF der CD, und AC der FE parallel, demnach ACDF ein Parallelogramm, folglich (1, 34. S.) FA = CD, und AC = DF. Nun ist, weil AC der FE, und BF der CD parallel, (6, 2. S.) BA : AF = BC : CE, und BC : CE = FD : DE. Folglich ist (5, 7. S.) BA : CD = BC : CE, und BC : CE = AC : DE, folglich (5, 16. S.) verwechselt BA : BC = CD : CE, und BC : AC = CE : DE, folglich auch (5, 22. S.) gleichförmig BA : AC = CD : DE.

Der 5. Satz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, die Seiten proportionirt sind: so sind die Triangel gleichwinklich, und die

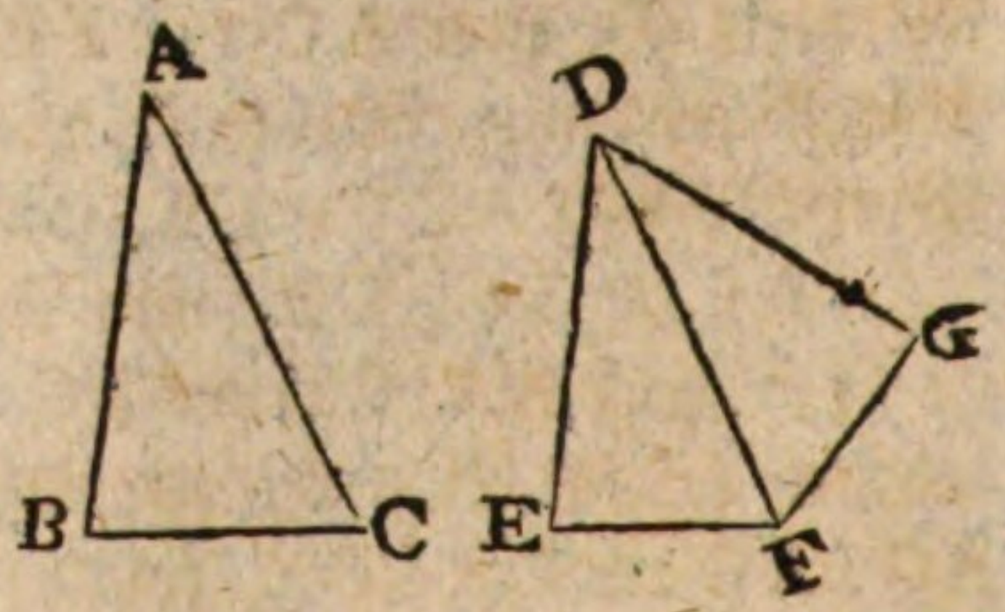
die Winkel, so homologen Seiten gegenüberliegen, einander gleich.



Es sey in diesen Triangeln, AB:BC = DE:EF, BC:CA = EF:FD, BA:AC = ED:DF. An FE setze (1, 23. S.) FEG = ABC, und an EF, EFG = BCA, so ist (1, 32. S.) EGF = BAC. Demnach sind die Triangel, ABC, GEF, gleichwinklich, folglich ist (6, 4. S.) AB:BC = GE:EF. Nun ist angenommen AB:BC = DE:EF. Folglich ist (5, 11. S.) DE:EF = GE:EF, folglich (5, 9. S.) DE = GE. Nun ist eben so erweislich DF = GF, auch ist EF gemein. Folglich ist (1, 8. S.) DEF = GEF = ABC, desgleichen DFE = GFE = ACB, ferner EDF = EGF = BAC.

Der 6. Satz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, ein Winkel, BAC, einem Winkel, EDF, gleich ist, und die Seiten, von denen die gleichen Winkel eingeschlossen werden, BA, AC; ED, DF, proportionirt sind: so sind die Triangel gleichwinklich, und die Winkel, so homologen Seiten gegenüberliegen, einander gleich.



Setze (1, 23. S.) an FD, FDG = BAC = EDF, und an DF, DFG = ACB, so ist auch (1, 32. S.) DGF = ABC. Demnach sind die Triangel, ABC, DGF, gleichwinklich, folglich (6, 4. S.) BA:AC = GD:DF. Nun ist angenommen, BA:AC = ED:DF. Folglich ist (5, 11. S.) ED:DF = GD:DF, folglich (5, 9. S.) ED = GD. Nun ist auch DF gemein, und EDF = GDF. Folglich (1, 4. S.) DFE = DFG = ACB, und DEF = DGF = ABC.

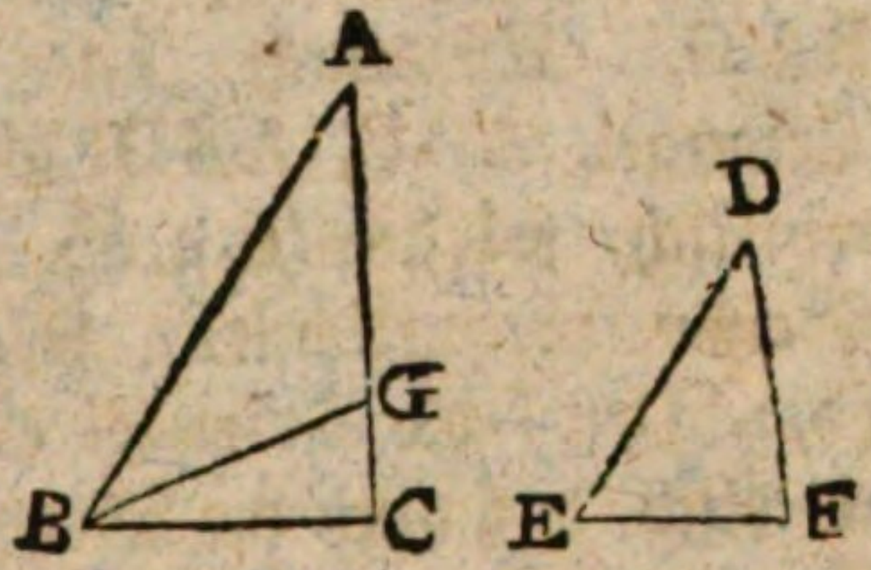
Der

Der 7. Satz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, ein Winkel, BAC, einem Winkel, EDF, gleich ist, und die Seiten, von denen andre Winkel, ABC, DEF, eingeschlossen werden, proportionirt sind, auch von den noch übrigen Winkeln, ACB, DFE, jeder zugleich entweder kleiner, oder nicht kleiner als ein rechter ist: so sind die Triangel gleichwinklich, und die Winkel, so von den proportionirten Seiten eingeschlossen werden, ABC, DEF, einander gleich.

Erster Fall.

Es sey von den Winkeln, ACB, DFE, jeder kleiner als ein rechter. Wären ABC, DEF, nicht einander gleich, so wär einer, etwa ABC, grösser. Es sey daher (1, 23. S.) ABG = DEF, so ist, weil A = D, (1, 32. S.) auch AGB = DFE. Demnach sind die Triangel, ABG, DFE, gleichwinklich, folglich ist (6, 4. S.) AB : BG = DE : EF. Nun war angenommen AB : BC = DE : EF. Folglich ist (5, 11. S.) AB : BC = AB : BG, folglich (5, 9. S.) BC = BG, folglich (1, 5. S.) BCG = BGC. Nun ist angenommen BCG < R. Folglich ist BGC < R, folglich (1, 13. S.) sein Nebenwinkel, AGB > R. Nun ist erwiesen, AGB = DFE. Folglich wäre DFE > R, welches dem Angenommnen DFE < R. wiederspricht. Demnach ist ABC = DEF. Nun war A = D. Folglich ist auch C = F, und die Triangel sind gleichwinklich.



Zweyter Fall.

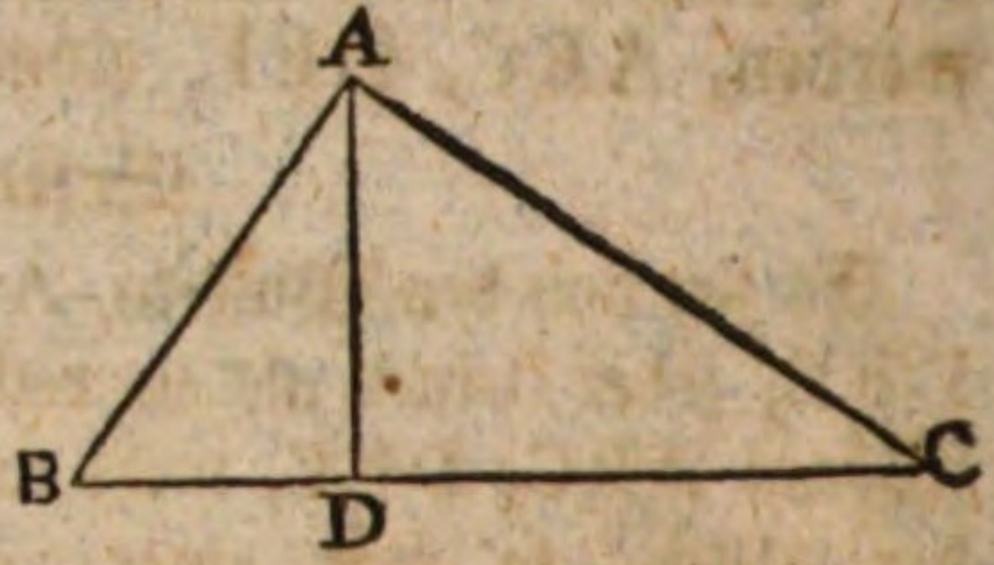
Es sey von den Winkeln, ACB, DFE, jeder nicht kleiner, als ein rechter, so wird auf eben die Art bewiesen, wenn ABC, DEF, nicht einander gleich, sondern ABC > DEF, daß BCG = BGC. Nun ist BCG nicht kleiner, als ein rechter. Folglich wär auch BGC nicht kleiner, als ein rechter. Demnach wären im △ BGC die genannten beyden Winkel nicht kleiner, als zwey rechte, welches (1, 17. S.) unmöglich. Demnach ist ABC = DEF, und es war A = D, folglich (1, 32. S.) auch C = F, und die Triangel sind gleichwinklich.

Der

Der 8. Satz.

Wenn in einem rechtwinklichen Triangel, ABC, vom rechten Winkel, A, zu dessen Gegenseite, BC, ein Perpendikel, AD, geht: so sind die Triangel an beyden Seiten des Perpendikels, ABD, ADC, dem ganzen Triangel, ABC, sowohl, als auch einander selbst änlich.

Erster Theil.



Da BAC, ADB, rechte Winkel, und ABC, gemein, so ist auch (1, 32. S.) ACB = BAD. Demnach sind die Triangel, ABC, ABD, gleichwinklich, folglich (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt, folglich (6, 1. Def.) die Triangel einander änlich. Und eben so ist erweislich, daß auch die Triangel, ADC, einander änlich. Demnach sind die Triangel, ABD, ADC, dem △ ABC, änlich.

Zweyter Theil.

Da bey D rechte Winkel, und nach Obigen BAD = ACB, so ist auch (1, 32. S.) ABD = DAC. Demnach sind die Triangel, ABD, ADC, gleichwinklich, folglich (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt, folglich (6, 1. Def.) die Triangel einander änlich.

Zusatz.

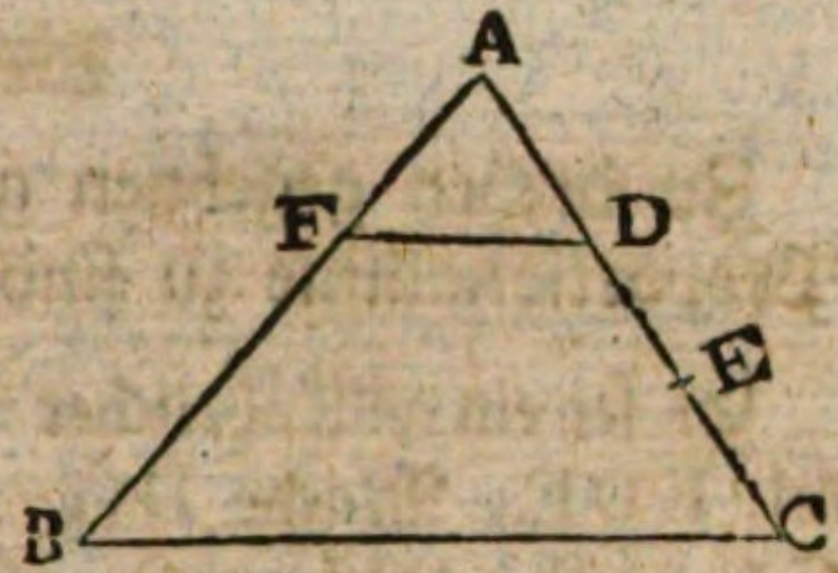
Hieraus erhellet zugleich, daß in einem rechtwinklichen △ ABC, der Perpendikel, AD, vom rechten Winkel, A, zu dessen Gegenseite, BC, die mittlere Proportionallinie zu den Abschnitten der Gegenseite, BD, DC, sey, nämlich BD : AD = AD : DC; ingleichen, daß zu der Gegenseite, BC, und jedem ihrer Abschnitte, BD, DC, die an solchem Abschnitte liegende Seite des Triangels, BA, CA, die mittlere Proportionallinie sey, nämlich BC : BA = BA : BD, und BC : CA = CA : DC.

Der 9. Satz.

Von einer gegebnen geraden Linie, AB, einen bestimmten Theil abzuschneiden.

Es

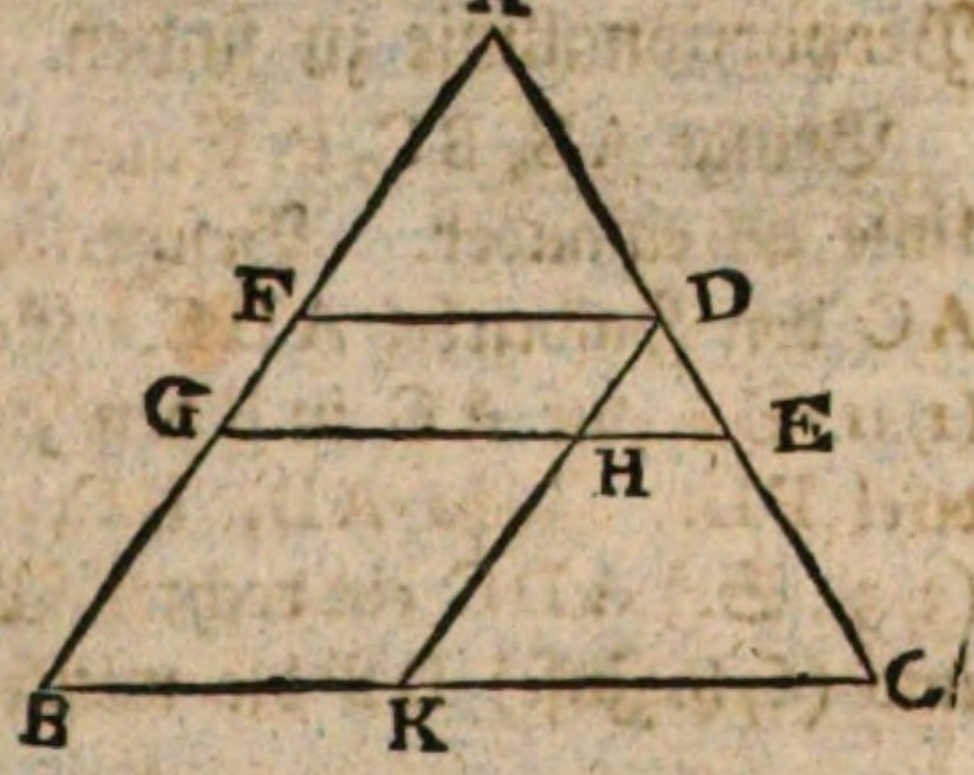
Es sey der dritte Theil bestimmt. Ziehe AC unter willkührlichem Winkel mit AB. Auf AC nimm willkührlich einen Punkt, D, und mache DE, sowohl, als EC = AD. Ziehe BC, und (1, 31. S.) durch D der BC die DF parallel, so ist im △ ABC, (6, 2. S.) CD : DA = BF : FA. Nun ist CD = 2 DA, folglich auch BF = 2 FA, folglich BA = 3 AF.



Der 10. Satz.

Eine gegebne gerade Linie, AB, nach Aenlichkeit einer andern gegebnen, AC, zu schneiden.

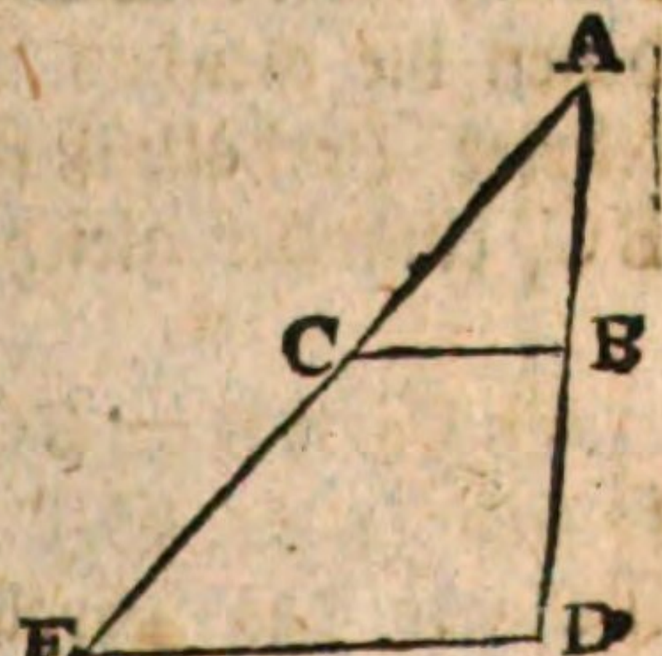
Es sey die andre, AC, willkührlich in D, E, geschnitten. Lege sie unter willkührlichem Winkel an AB. Ziehe BC, und (1, 31. S.) durch D, E, der BC, die DF, EG, und durch D, der AB, die DHK, parallel, so sind FH, HB, Parallelogramme, folglich (1, 34. S.) DH = FG, und HK = GB. Nun ist im △ DKC, weil KC, HE, parallel, (6, 2. S.) CE : ED = KH : HD. Folglich ist CE : ED = BG : GF. Auch ist, im △ AGE, weil GE, FD, parallel, (6, 2. S.) ED : DA = GF : FA.



Der 11. Satz.

Zu zweyen gegebnen geraden Linien, AB, AC, die dritte Proportionallinie zu finden.

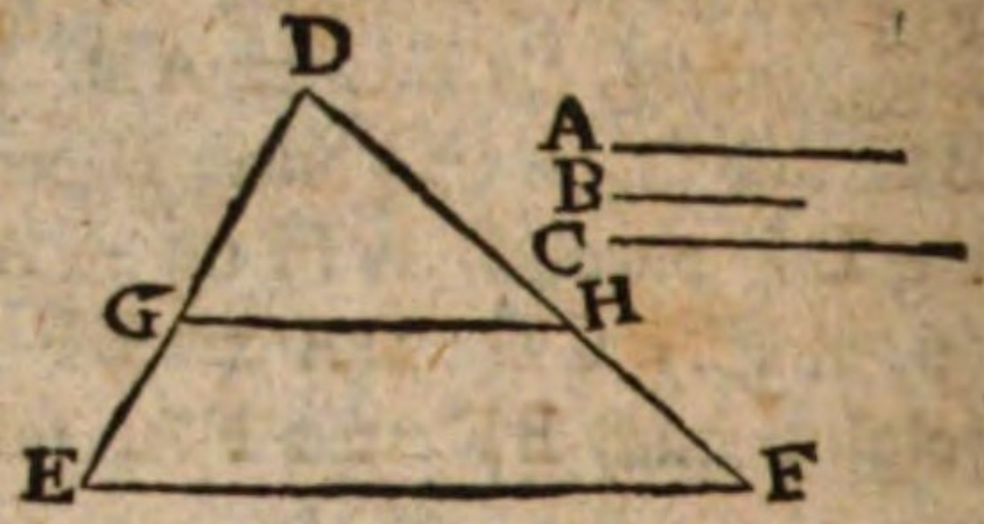
Bringe AB, AC, unter willkührlichem Winkel an einander, und verlängre sie nach D, E. Mache BD = AC. Ziehe BC, und (1, 31. S.) durch D der BC die DE parallel, so ist (6, 2. S.) AB : BD = AC : CE. Nun ist BD = AC. Folglich ist AB : AC = AC : CE.



Der

Der 12. Satz.

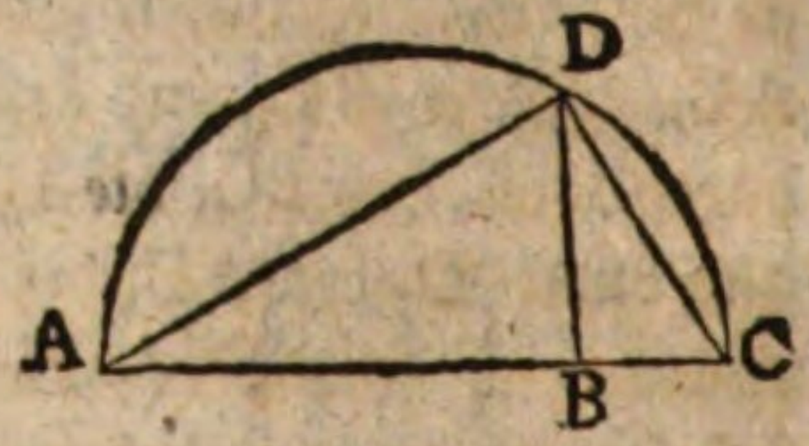
Zu dreyen gegebnen geraden Linien, A, B, C, die vierte Proportionallinie zu finden.



Es sey ein willkührlicher Winkel, EDF. Mache DG = A, GE = B, DH = C. Ziehe GH, und (1, 31. S.) durch E der GH die EF parallel, so ist (6, 2. S.) DG : GE = DH : HF, das ist, A : B = C : HF.

Der 13. Satz.

Zu zweyen gegebnen geraden Linien, AB, BC, die mittlere Proportionallinie zu finden.



Bringe AB, BC, in Einer geraden Linie an einander. Beschreibe über AC den Halbcirkel ADC. Errichte (1, 11. S.) auf AC in B den Perpendikel BD. Ziehe AD, DC, so ist (3, 31. S.) ADC ein rechter Winkel, und (6, 8. Zus.) DB die mittlere Proportionallinie zu AB, BC.

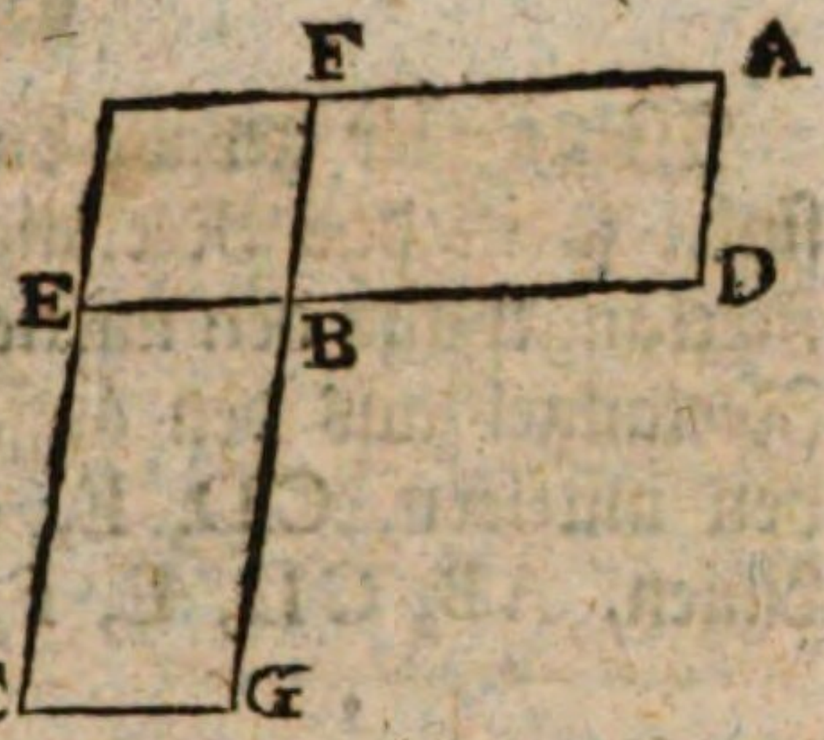
Der 14. Satz.

Wenn zwey Parallelogramme, AB, BC, einander gleich sind, und ein Winkel, FBD, einem Winkel, EBG, gleich ist: so sind die Seiten, von denen die gleichen Winkel eingeschlossen werden, in umgekehrter Verhältniß. Wiederum, wenn in zweyen Parallelogrammen, AB, BC, ein Winkel, FBD, einem Winkel, EBG, gleich ist, und die Seiten, von denen die gleichen Winkel eingeschlossen werden, in umgekehrter Verhältniß sind: so sind die Parallelogramme, AB, BC, einander gleich.

Erster Theil.

Es sey AB = BC. Bringe DB, BE, in Eine gerade Linie, so sind (1, 14. S.) auch FB, BG, in Einer geraden Linie. Vollende das Parallelogramm FE, so ist, weil AB = BC, (5, 7. S.)

(5, 7. S.) AB : FE = BC : FE.
Nun ist (6, 1. S.) AB : FE = DB : BE, und BC : FE = GB : BF.
Folglich ist (5, 11. S.) DB : BE = GB : BF.



Zweyter Theil.

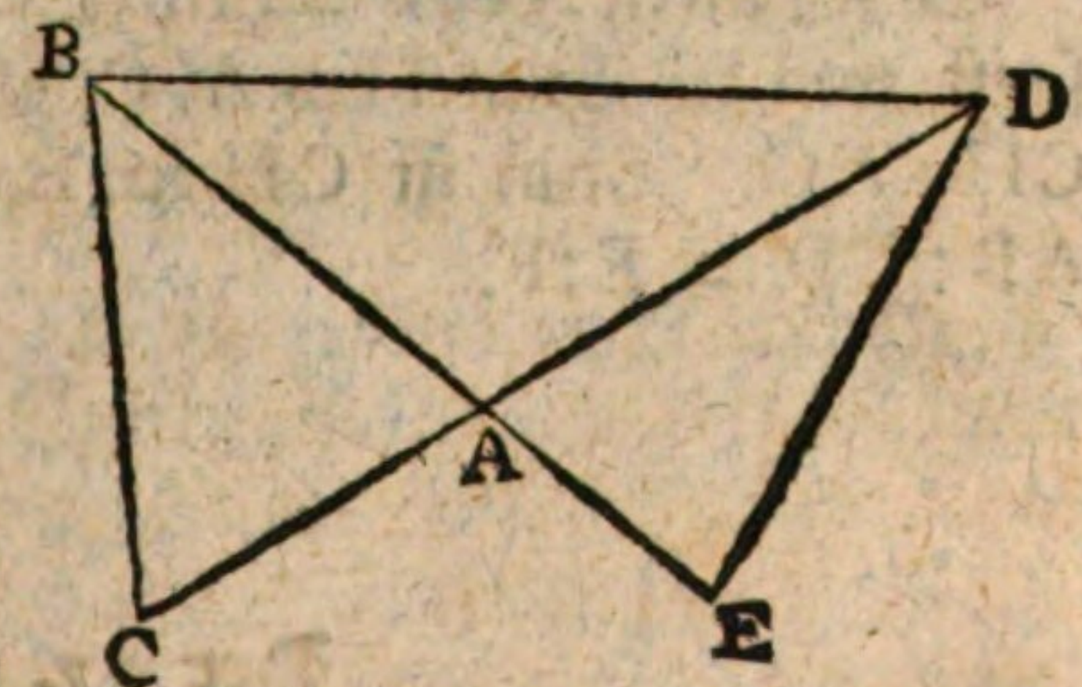
Es sey DB : BE = GB : BF.
Nun ist (6, 1. S.) DB : BE = AB : FE, und GB : BF = BC : FE. Folglich ist (5, 11. S.) AB : FE = BC : FE, folglich (5, 9. S.) AB = BC.

Der 15. Satz.

Wenn zwey Triangel, ABC, ADE, einander gleich sind, und ein Winkel, BAC, einem Winkel, DAE, gleich ist: so sind die Seiten, von denen die gleichen Winkel eingeschlossen werden, in umgekehrter Verhältniß. Wiederum, wenn in zweyen Triangeln, ABC, ADE, ein Winkel, BAC, einem Winkel, DAE, gleich ist, und die Seiten, von denen die gleichen Winkel eingeschlossen werden, in umgekehrter Verhältniß sind: so sind die Triangel, ABC, ADE, einander gleich.

Erster Theil.

Es sey △ABC = △ADE. Bringe CA, AD, in Eine gerade Linie, so sind (1, 14. S.) auch EA, AB, in Einer geraden Linie. Ziehe BD, so ist, weil △ABC = △ADE, (5, 7. S.) △ABC : △BAD = △ADE : △BAD. Nun ist (6, 1. S.) △ABC : △BAD = CA : AD, und △ADE : △BAD = EA : AB. Folglich ist (5, 11. S.) CA : AD = EA : AB.



Zweyter Theil.

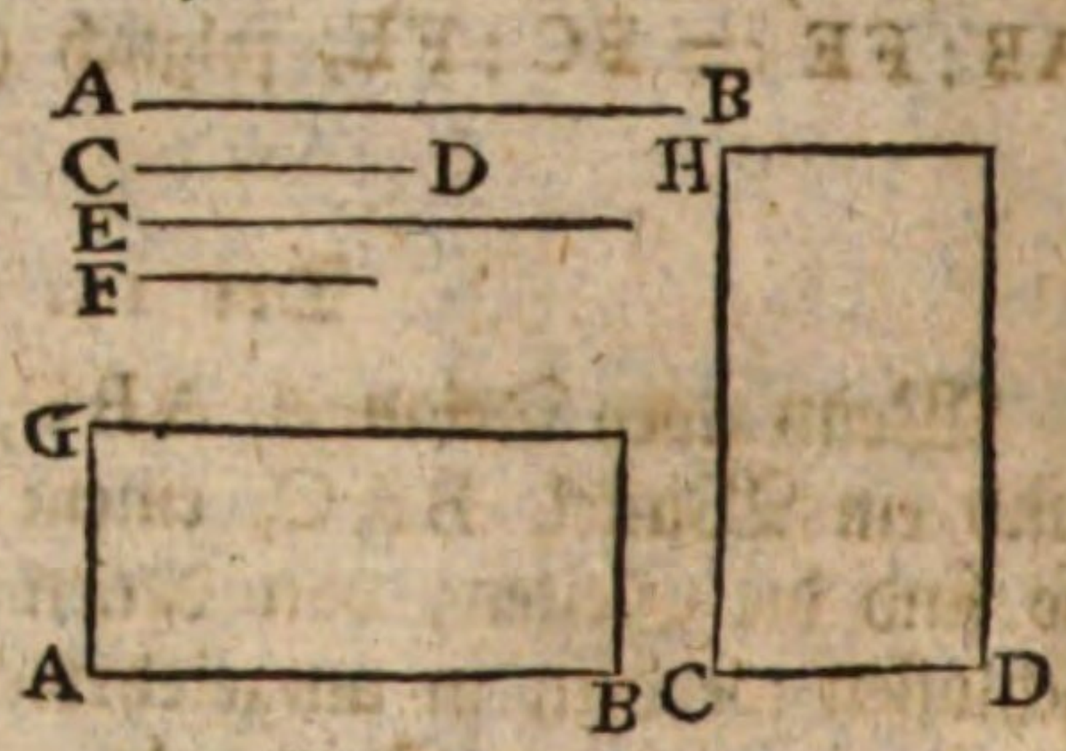
Es sey CA : AD = EA : AB. Nun ist (6, 1. S.) CA : AD = △ABC : △BAD, und EA : AB = △ADE : △BAD. Folglich (5, 11. S.) △ABC : △BAD = △ADE : △BAD, folglich (5, 9. S.) △ABC = △ADE.

Der

Der 16. Satz.

Wenn vier gerade Linien, AB, CD, E, F, proportionirt sind: so ist das Rectangel aus den äussersten, AB, F, dem Rectangel aus den mittlern, CD, E, gleich. Und wenn das Rectangel aus den äussersten, AB, F, dem Rectangel aus den mittlern, CD, E, gleich ist: so sind die vier geraden Linien, AB, CD, E, F, proportionirt.

Erster Theil.



Es sey AB : CD = E : F. Errichte (1, 11. S.) auf AB, CD, in A, C, die Perpendikel, AG, CH. Mache AG = F, und CH = E. Vollende die Parallelogramme BG, DH, so ist, weil AB : CD = E : F, (5, 7. S.) AB : CD = CH : AG. Nun sind die Winkel bey A, C, einander gleich. Folglich (6, 14. S.) BG = DH, das ist, Rect. AB, F = Rect. CD, E.

Zweyter Theil.

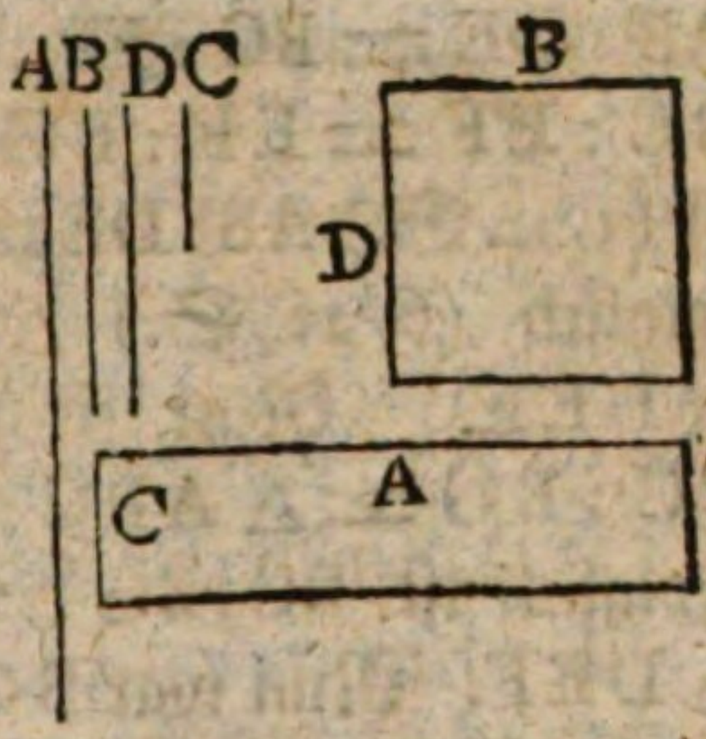
Es sey Rect. AB, F = Rect. CD, E, das ist, BG = DH, so ist, weil die Winkel bey A, C, gleich, (6, 14. S.) AB : CD = CH : AG. Nun ist CH = E, und AG = F. Folglich ist AB : CD = E : F.

Der 17. Satz.

Wenn drey gerade Linien, A, B, C, proportionirt sind: so ist das Rectangel aus den äussersten, A, C, dem Quadrat der mittelsten, B, gleich. Und wenn das Rectangel aus den äussersten, A, C, dem Quadrat der mittelsten, B, gleich ist: so sind die drey geraden Linien, A, B, C, proportionirt.

Erster Theil.

Es sey D = B, so ist, weil A:B = B:C, auch A:B = D:C, folglich (6, 16. S.) Rect. A, C = Rect. B, D = Rect. B, B = □ B.



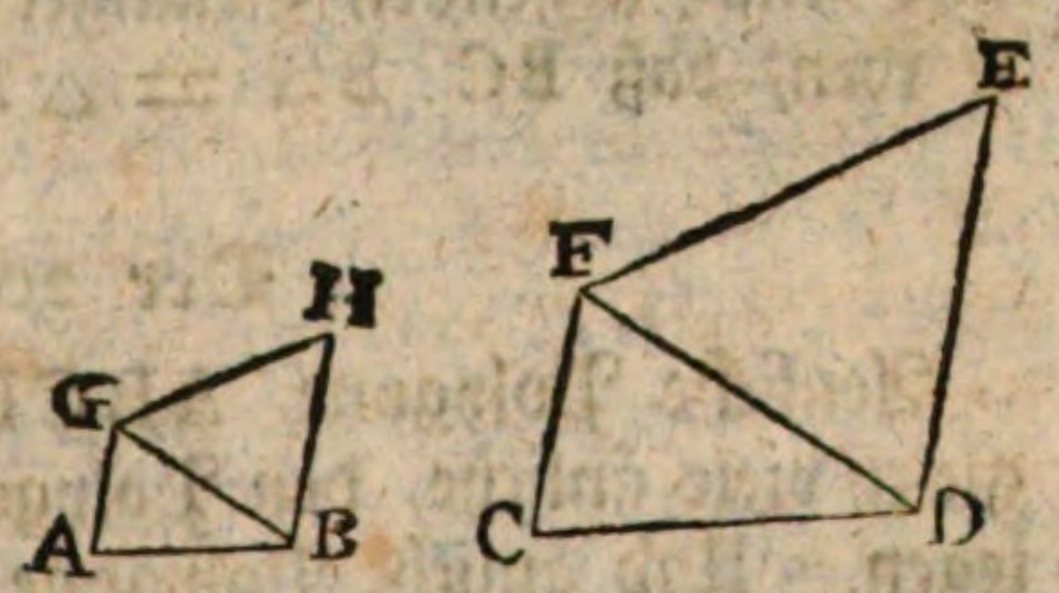
Zweyter Theil.

Da Rect. A, C = □ B = Rect. B, D, so ist (6, 16. S.) A:B = D:C, das ist, A:B = B:C.

Der 18. Satz.

Auf einer gegebnen geraden Linie, AB, eine geradliniche Figur, einer andern gegebnen geradlinichen Figur, CE, ähnlich und ähnlich liegend, zu beschreiben.

Mache (1, 23. S.) BAG = DCF, ABG = CDF; BGH = DFE, GBH = FDE, so ist (1, 32. S.) AGB = CFD und GHB = FED, folglich (6, 4. S.) die Seiten, von denen gleiche Winkel eingeschlossen werden, proportionirt, folglich (6, 1. Def.) AH ~ CE.

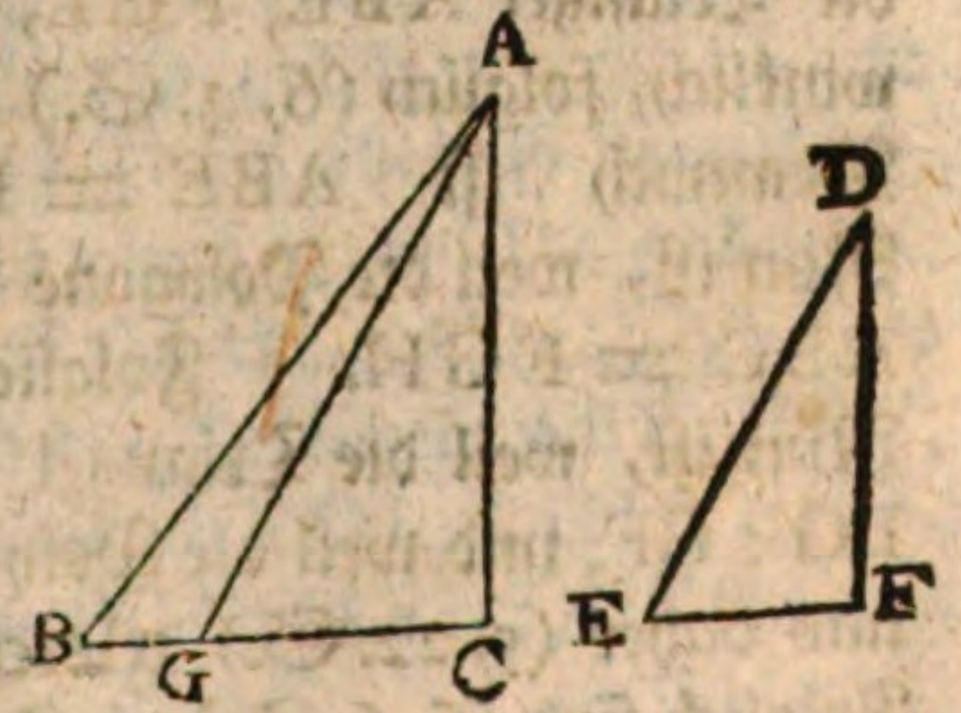


Der 19. Satz.

Aehnliche Triangel, ABC, DEF, sind in zwiefach höherer Verhältniß ihrer homologen Seiten, BC, EF.

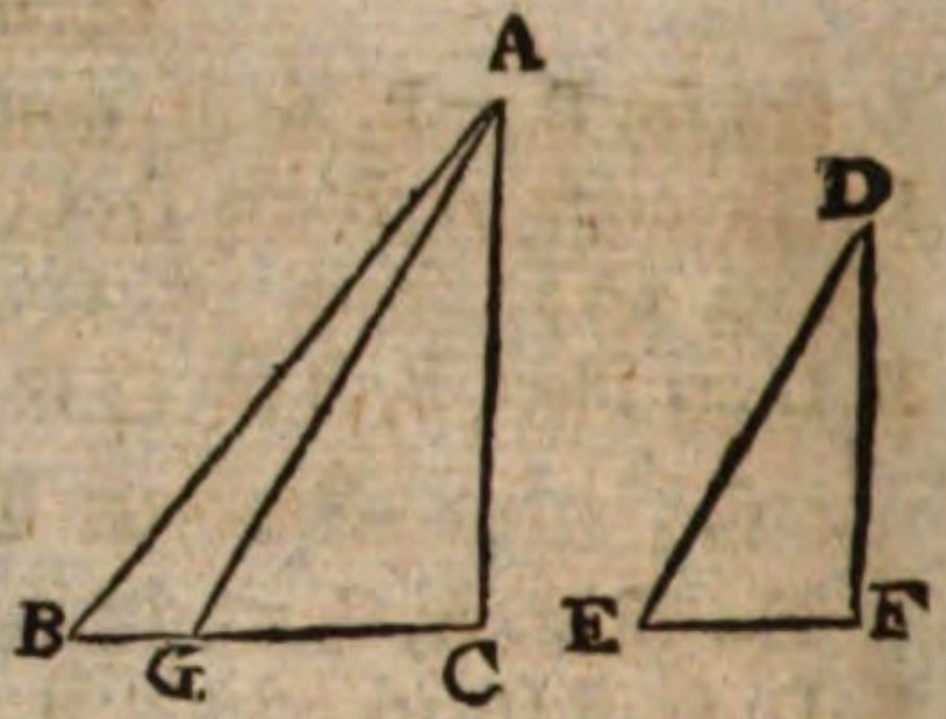
Nimm (6, 11. S.) zu BC, EF, die dritte Proportionallinie BG, so daß BC:EF = EF:BG, folglich (5, 10. Def.) BC:BG = (BC:EF). Ziehe AG.

Da die Triangel ähnlich, und die Winkel bey B, E, gleich, so ist (6, 1. Def.) AB:BC = DE:EF,



folglich

folglich (5, 16. S.) verwechselt AB : DE = BC : EF. Nun war BC : EF = EF : BG. Folglich ist (5, 11. S.) AB : DE = EF : BG, folglich (6, 15. S.) △ ABG = △ DEF. Nun ist (6, 1. S.) BC : BG = △ ABC : △ ABG. Folglich ist BC : BG = △ ABC : △ DEF. Nun war BC : BG = (BC : EF)². Folglich ist (5, 11. S.) △ ABC : △ DEF = (BC : EF)².



Zusatz.

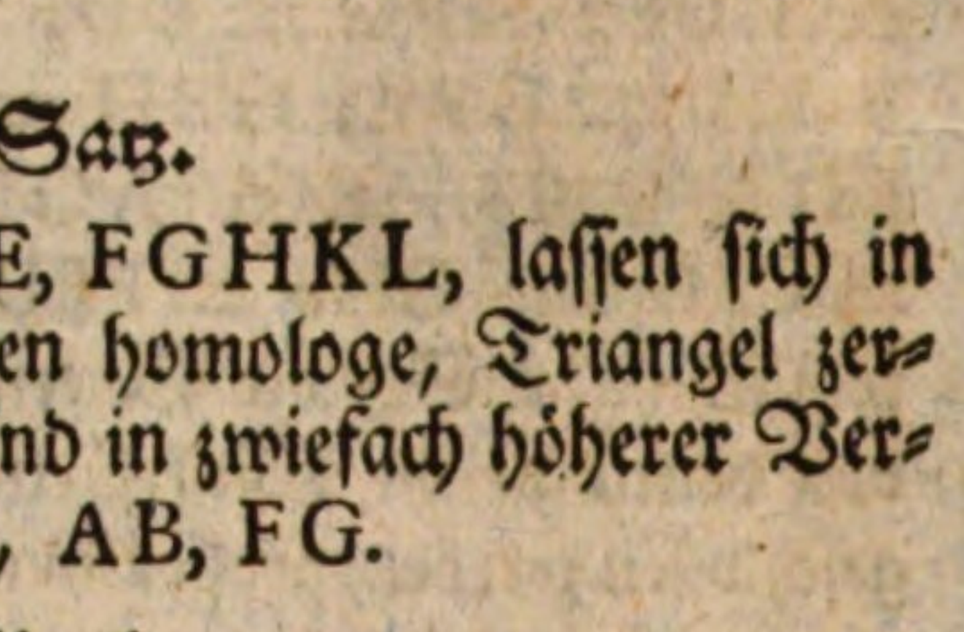
Hieraus erhellet, wenn drey gerade Linien, BC, EF, BG, proportionirt sind, daß alsdenn die erste zur dritten sich verhalte, wie der Triangel auf der ersten zu dem ihm ähnlichen und ähnlich liegenden Triangel auf der zweyten; weil bewiesen worden, daß BC : BG = △ ABC : △ DEF.

Der 20. Satz.

Aenliche Polygone, ABCDE, FGHKL, lassen sich in gleich viele ähnliche, den Polygonen homologe, Triangel zerlegen. Und ähnliche Polygone sind in zwiefach höherer Verhältniß ihrer homologen Seiten, AB, FG.

Erster Theil.

Ziehe BE, EC; GL, LH. Da die Polygone ähnlich, so ist (6, 1. Def.) BAE = GFL, und BA : AE = GF : FL, folglich sind (6, 6. S.) die Triangel ABE, FGL, gleichwinklich, folglich (6, 4. S.) ähnlich. Demnach ist ABE = FGL. Nun ist, weil die Polygone ähnlich, ABC = FGH. Folglich ist (1, 3. Ax.) EBC = LGH. Nun ist, weil die Triangel ABE, FGL, ähnlich, EB : BA = LG : GF, und weil die Polygone ähnlich, AB : BC = FG : GH, und daher (5, 22. S.) gleichförmig EB : BC = LG : GH. Folglich sind (6, 6. S.) die Triangel BCE, GHL, gleichwinklich, folglich



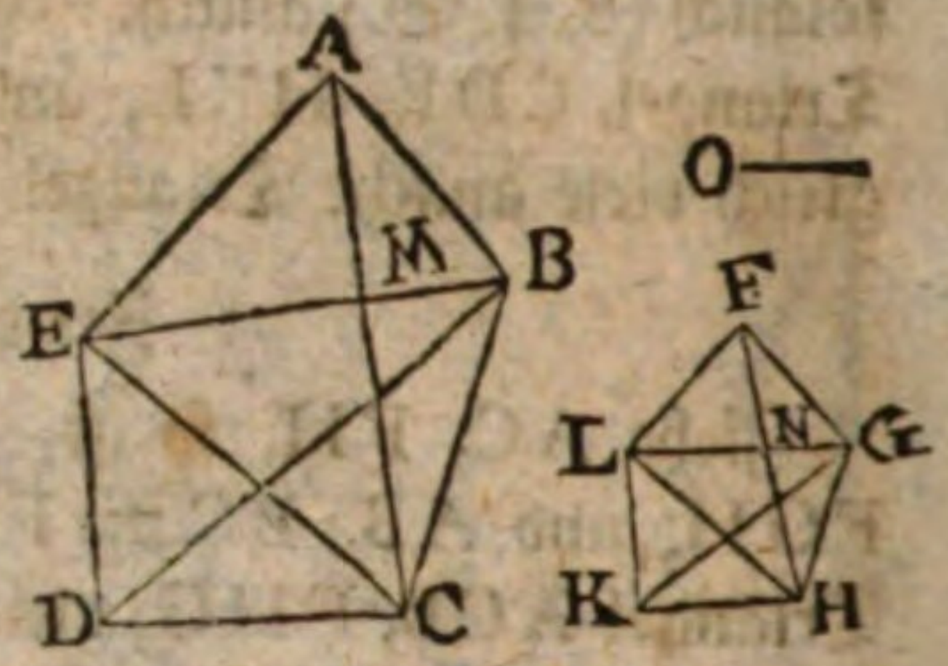
folglich (6, 4. S.) änlich. Eben so ist erweislich, daß auch die Triangel CDE, HKL, änlich. Demnach sind die Polygone in gleich viele änliche Triangel zerlegt.

Zweyter Theil.

Ziehe AC, FH, so ist, weil die Polygone änlich, ABC = FGH, und AB : BC = FG : GH, folglich sind (6, 6. S.) die Triangel ACB, FHG, gleichwinklich, das ist, BAC = GFH, und BCA = GHF. Demnach ist in den Triangeln AMB, FNG, A = F, und es war nach Obigen B = G, folglich ist (1, 32. S.) M = N. Demnach sind die Triangel gleichwinklich. Eben so ist erweislich, daß die Triangel CMB, HNG, gleichwinklich. Folglich ist (6, 4. S.) AM : MB = FN : NG, und BM : MC = GN : NH, folglich (5, 22. S.) gleichförmig AM : MC = FN : NH. Nun ist (6, 1. S.) AM : MC = △BAM : △BMC = △EAM : △EMC, und daher (5, 12. S.) AM : MC = △ABE : △BEC. Auch ist eben so erweislich, FN : NH = △FGL : △GLH. Folglich ist (5, 11. S.) △ABE : △BEC = △FGL : △GLH, folglich (5, 16. S.) verwechselt △ABE : △FGL = △BEC : △GLH. Nun ist, wenn man BD, GK, ziehet, eben so erweislich, daß △BEC : △GLH = △ECD : △LHK. Folglich ist (5, 12. S.) △ABE : △FGL = ABCDE : FGHKL. Demnach sind diese änlichen Triangel, worin die Polygone zerlegt worden, den Polygonen homolog, das ist, diese Triangel sind proportionirt dergestalt, daß die Triangel des Polygons ABCDE, die Forderglieder, und die Triangel des Polygons FGHKL, die Hinterglieder in der Proportion sind.

Ein andrer Beweis. Da im ersten Stück bewiesen worden, daß die Triangel des einen Polygons den Triangeln des andern änlich, so ist (6, 19. S.) △ABE : △FGL = (BE : GL) = △EBC : △LGH, und eben so erweislich, △EBC : △LGH = (EC : LH)² = △ECD : △LHK. Folglich ist (5, 11. S.) △ABE : △FGL = △EBC : △LGH = △ECD : △LHK. Demnach die Triangel, ABE, EBC, ECD, die Forderglieder, und die Triangel, FGL, LGH, LHK, die Hinterglieder. Folglich (5, 12. S.) △ABE : △FGL = ABCDE : FGHKL.

Dritter Theil.



Da eben erwiesen worden, daß $\triangle ABE : \triangle FGL = ABCDE : FGHKL$, und (6, 19. S.) $\triangle ABE : \triangle FGL = (AB : FG)^2$, so ist auch $ABCDE : FGHKL = (AB : FG)^2$.

Erster Zusatz.

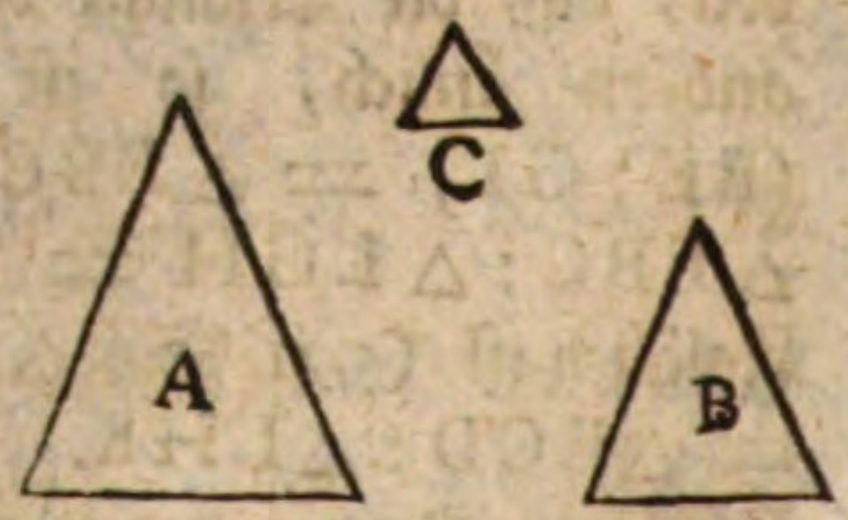
Eben so ist erweislich, daß auch ähnliche vierseitige Figuren in zwiefach höherer Verhältniß ihrer homologen Seiten sind. Nun ist (6, 19. S.) gleiches von den Triangeln erwiesen worden. Folglich sind überhaupt alle ähnliche geradliniche Figuren in zwiefach höherer Verhältniß ihrer homologen Seiten.

Zweyter Zusatz.

Nimmt man zu AB, FG, die dritte Proportionallinie, O, so ist AB zu O in zwiefach höherer Verhältniß der AB zu FG. Nun ist auch eine geradliniche Figur auf AB, zu einer ihr ähnlichen und ähnlich liegenden Figur auf FG, in zwiefach höherer Verhältniß der AB zu FG. Folglich, wenn drey gerade Linien, AB, FG, O, proportionirt sind, ist die erste, AB, zur dritten, O, wie eine geradliniche Figur auf der ersten, AB, zu einer ihr ähnlichen und ähnlich liegenden Figur auf der zweyten, FG.

Der 21. Satz.

Zwey geradliniche Figuren, A, B, welche Einer dritten, C, ähnlich, sind einander selbst ähnlich.



Da A, C, ähnlich, so sind sie (6, 1. Def.) gleichwinklich, und die gleiche Winkel einschliessende Seiten proportionirt. Nun sind auch B, C, ähnlich, und daher gleichwinklich und die gleiche Winkel einschliessenden Seiten proportionirt. Folglich sind auch A, B, (1, 1. Ax.) gleichwinklich, und (5, 11. S.) die gleiche Winkel einschliessenden Seiten proportionirt. Folglich sind (6, 1. Def.) A, B, ähnlich.

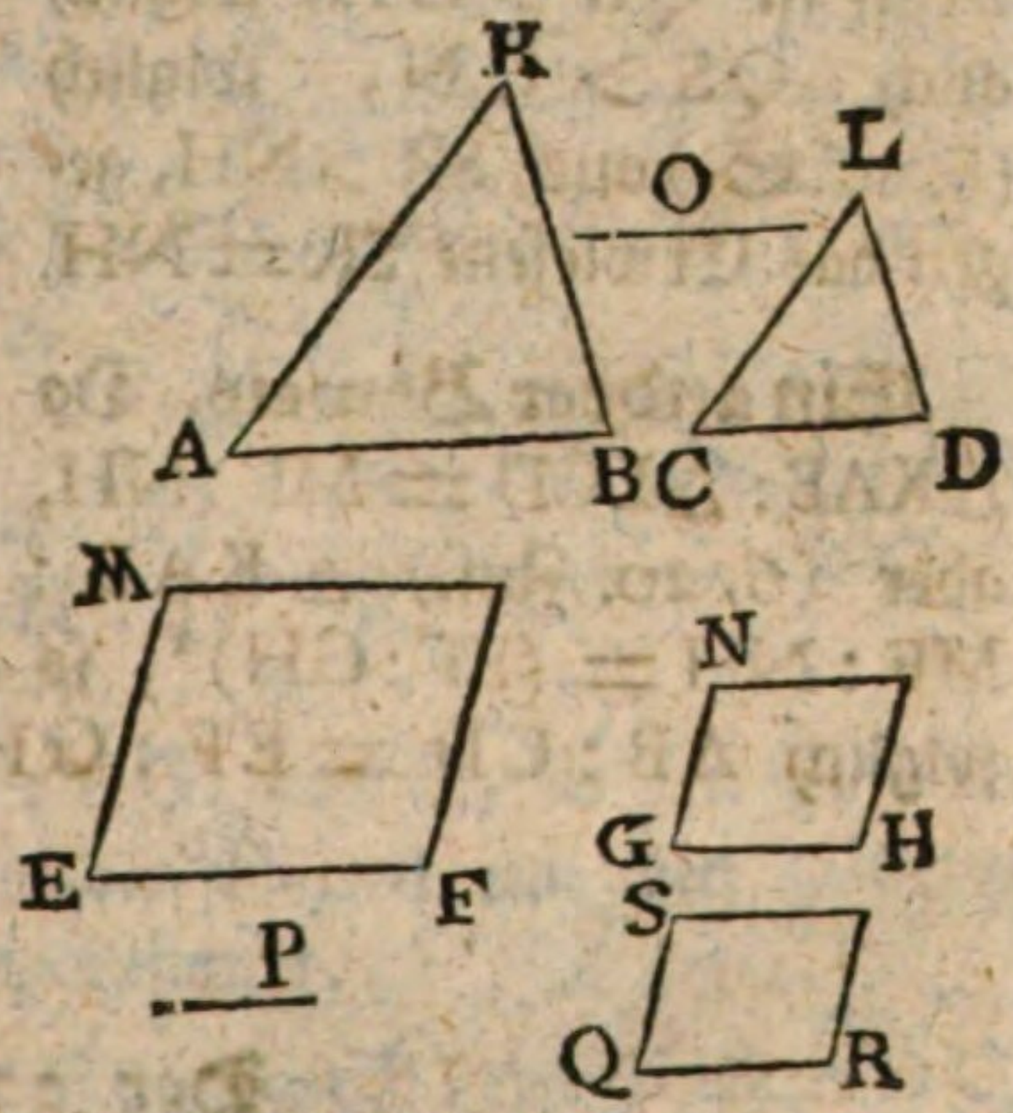
Der

Der 22. Satz.

Wenn vier gerade Linien, AB, CD, EF, GH, proportionirt sind: so sind die auf denselben beschriebnen ähnlichen und ähnlich liegenden geradlinichen Figuren, KAB, LCD, MF, NH, gleichfalls proportionirt. Und wenn die auf vier geraden Linien beschriebnen ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren, KAB, LCD, MF, NH, proportionirt sind: so sind die vier geraden Linien, AB, CD, EF, GH, gleichfalls proportionirt.

Erster Theil.

Es sey AB : CD = EF : GH. Macht man nun (6, 11. S.) AB : CD = CD : O, und EF : GH = GH : P, so ist (5, 11. S.) CD : O = GH : P. Nun war AB : CD = EF : GH. Folglich ist (5, 22. S.) gleichförmig AB : O = EF : P. Nun ist (6, 20. Zus.) AB : O = △KAB : △LCD, und EF : P = MF : NH. Folglich ist (5, 11. S.) △KAB : △LCD = MF : NH.

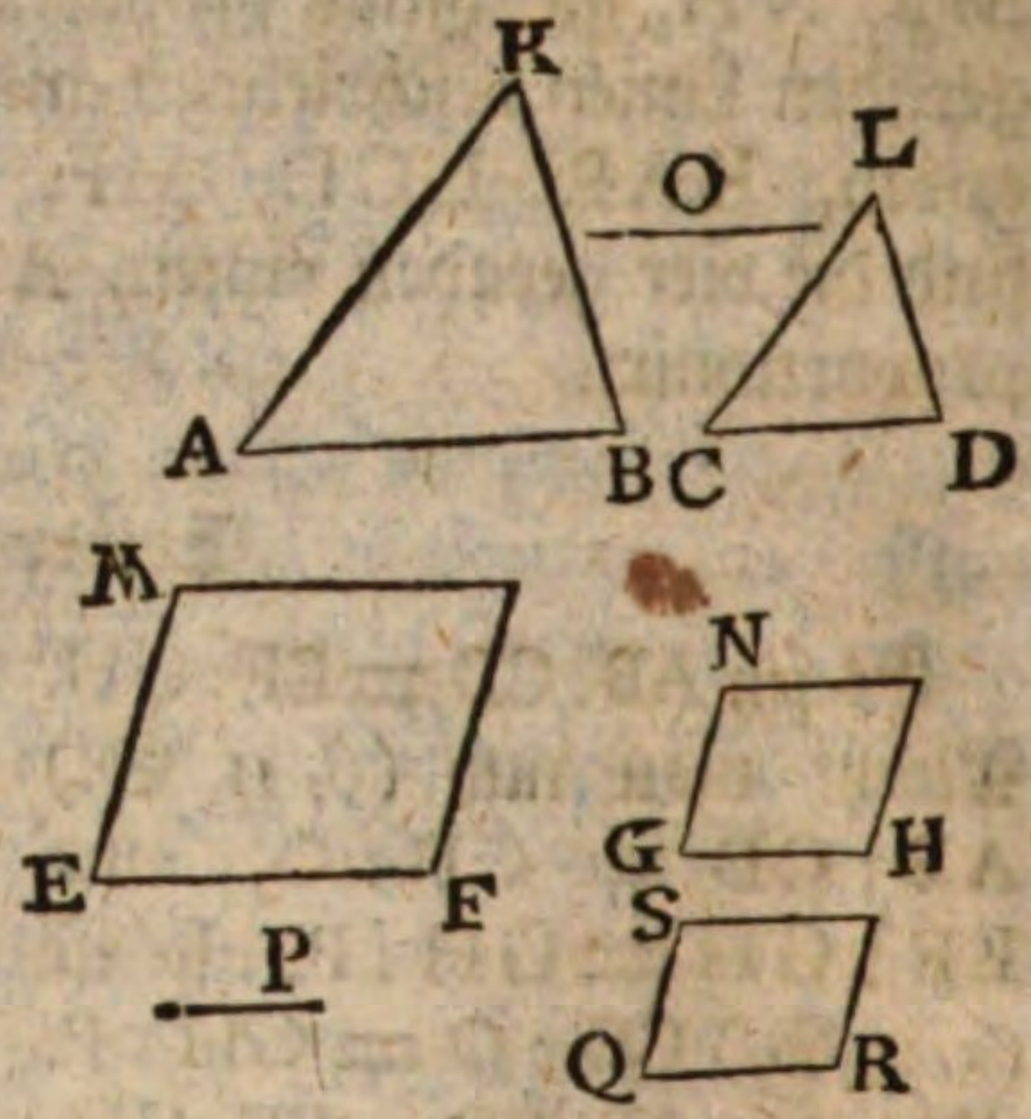


Zweyter Theil.

Es sey △KAB : △LCD = MF : NH. Mache (6, 12. S.) AB : CD = EF : QR. Beschreibe (6, 18. S.) auf QR eine der MF und der NH ähnliche und ähnlich liegende Figur, SR: so ist nach dem ersten Theile △KAB : △LCD = MF : SR. Nun ist angenommen △KAB : △LCD = MF : NH. Folglich (5, 11. S.) MF : SR = MF : NH, folglich (5, 9. S.) SR = NH. Nun ist, weil MF ∼ NH, und MF ∼ SR, (6, 21. S.) auch SR ∼ NH. Folglich ist (nachfolgender Lehnsatz) QR = GH. Nun war AB : CD = EF : QR. Folglich ist (5, 7. S.) AB : CD = EF : GH.

Lehnsatz.

Daß aber bey gleichen und änlichen geradlinichen Figuren, SR, NH, die homologen Seiten, QR, GH, gleich sind, wird folgendermassen bewiesen:

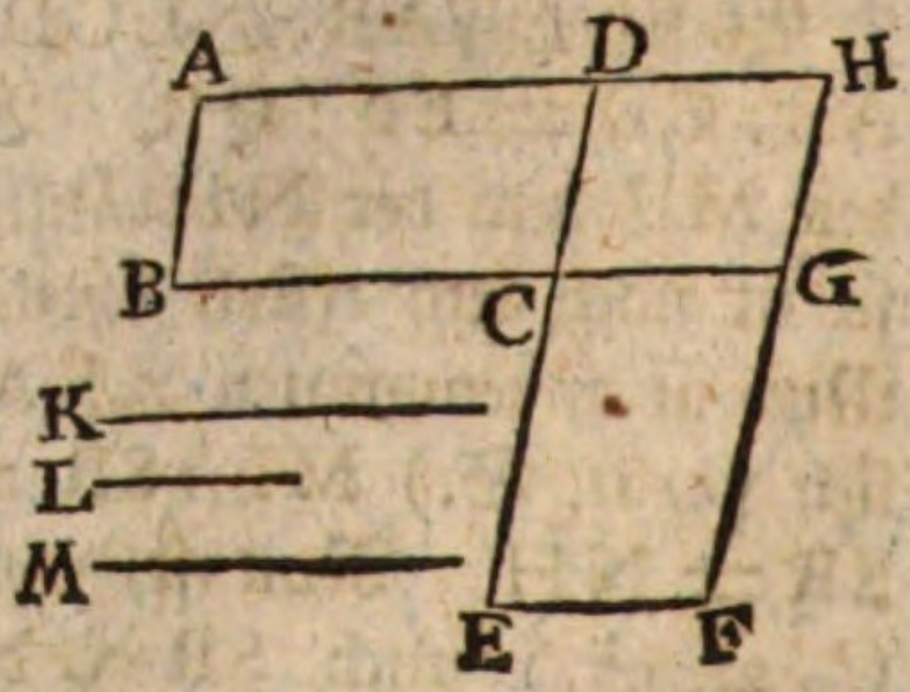


Gesetzt QR, GH, wären ungleich, so sey die eine, etwa QR, grösser. Da SR ∼ NH, so ist QR : QS = GH : GN, folglich (5, 16. S.) verwechselt QR : GH = QS : GN. Nun ist QR > GH, folglich auch QS > GN, folglich (6, 20. S.) auch SR > NH, gegen das Erwiesene SR = NH.

Ein andrer Beweis. Da △KAB : △LCD = MF : NH, aber (6, 20. Zus.) △KAB : △LCD = (AB : CD)² und MF : NH = (EF : GH)², so ist (AB : CD)² = (EF : GH)², folglich AB : CD = EF : GH.

Der 23. Satz.

Gleichwinkliche Parallelogramme, AC, CF, sind in zusammengesetzter Verhältniß ihrer Seiten, BC, CG; DC, CE.

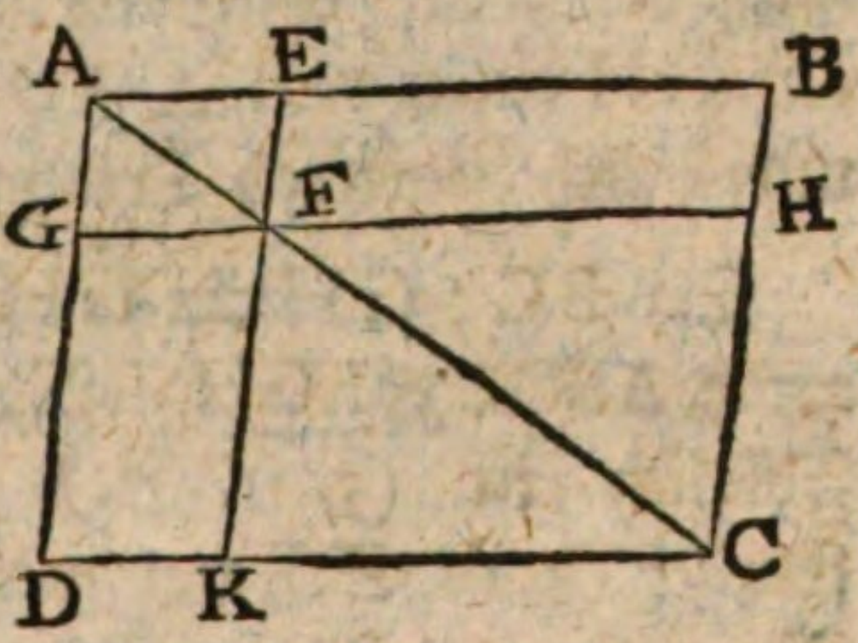


Bringe BC an CG in Eine gerade Linie, so sind, weil BCD = ECG, (1, 14. S.) auch DC, CE, in Einer geraden Linie. Vollende das Parallelogramm, DG. Nun sey eine gerade Linie, K. Mache (6, 12. S.) BC : CG = K : L, und DC : CE = L : M, so ist (6, 5. Def.) die Verhältniß K : M aus den Verhältnissen K : L, und L : M, oder den ihnen gleichen Verhältnissen, BC : CG, und DC : CE, zusammengesetzt.

gesetzt. Nun ist, weil (6, 1. S.) BC : CG = AC : CH, und DC : CE = CH : CF, (5, 11. S.) K : L = AC : CH, und L : M = CH : CF, und daher (5, 22. S.) gleichförmig K : M = AC : CF. Folglich ist auch die Verhältniß AC : CF aus den Verhältnissen, BC : CG, und DC : CE, zusammengesetzt.

Der 24. Satz.

In jedem Parallelogramm, ABCD, sind die um die Diagonale, AC, herumliegenden Parallelogramme, EG, HK, dem ganzen sowohl, als auch einander selbst änlich.

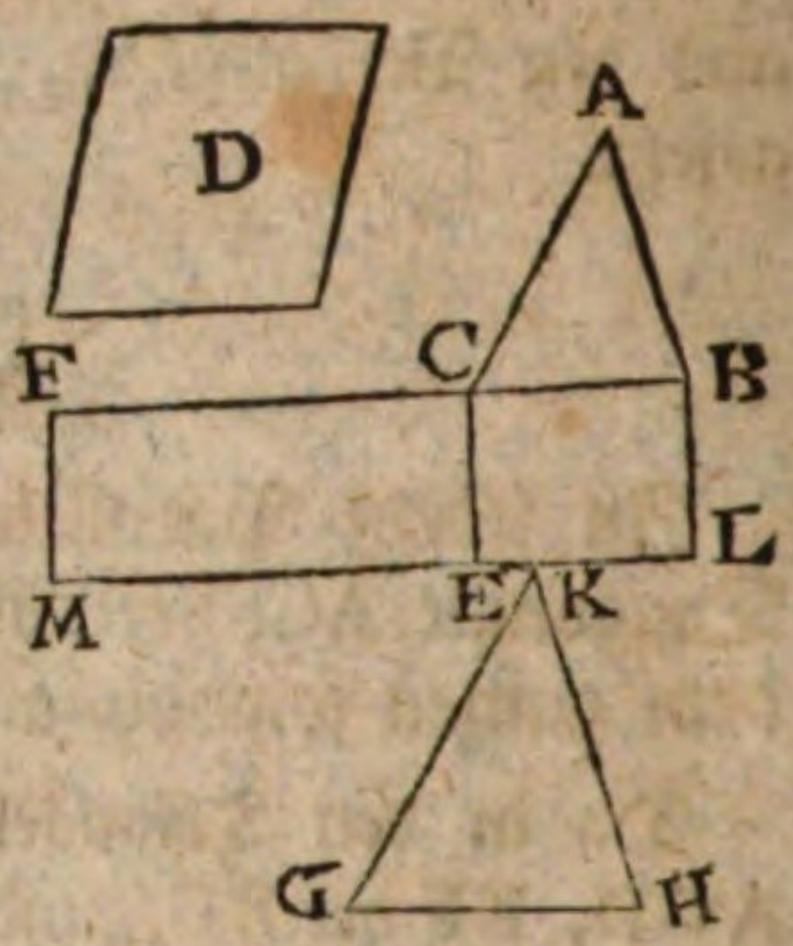


Da in den Triangeln, ABC, ACD, EF der BC, und GF der DC, parallel, so ist (6, 2 S.) BE : EA = CF : FA, und CF : FA = DG : GA, folglich (5, 11. S.) BE : EA = DG : GA, folglich (5, 18. S.) verbunden BA : AE = DA : AG, folglich (5, 16. S.) verwechselt BA : AD = EA : AG, das ist, in den Parallelogrammen, ABCD, EG, sind die Seiten um den gemeinschaftlichen Winkel, BAD, proportionirt.

Da GF der DC parallel, so ist (1, 29. S.) AGF = ADC, und GFA = DCA, auch ist DAC gemein. Demnach sind die Triangel, ADC, AGF, gleichwinklich. Nun ist eben so erweislich, daß die Triangel, ACB, AFE, gleichwinklich. Folglich sind die Parallelogramme, ABCD, EG, gleichwinklich, auch ist (6, 4. S.) AD : DC = AG : GF, und CB : BA = FE : EA, desgleichen DC : CA = GF : FA, und AC : CB = AF : FE, folglich (5, 22. S.) gleichförmig DC : CB = GF : FE. Nun war auch nach Obigen BA : AD = EA : AG. Demnach sind in den gleichwinklichen Parallelogrammen, ABCD, EG, die Seiten, von denen gleiche Winkel eingeschlossen werden, proportionirt, folglich (6, 1. Def.) die Parallelogramme änlich. Nun ist eben so erweislich, daß auch KH ∼ ABCD. Folglich ist (6, 21. S.) auch EG ∼ KH.

Der 25. Satz.

Eine geradliniche Figur zu beschreiben, die einer gegebnen, ABC, ähnlich, und einer andern gegebnen, D, gleich sey.

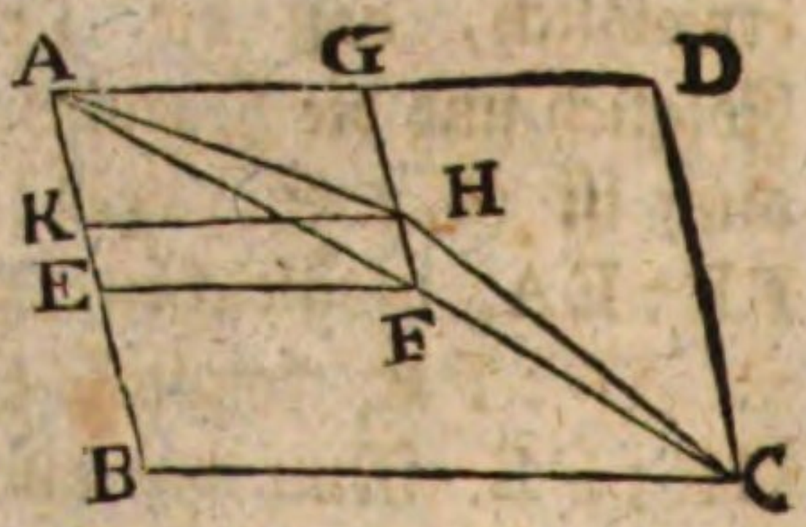


Beschreibe (1, 44. S.) auf BC ein Parallelogramm, $BE = \triangle ABC$, und (1, 45. S.) auf CE, unter dem Winkel, CBL, ein Parallelogramm, $CM = D$, so sind (1, 14. S.) BC, CF, desgleichen LE, EM, in Einer geraden Linie. Nimm (6, 13. S.) zu BC, CF, die mittlere Proportionallinie, GH, und beschreibe (6, 18. S.) auf GH einen dem $\triangle ABC$ ähnlichen und ähnlich liegenden Triangel KGH.

Da $BC : GH = GH : CF$, so ist (6, 20. Zus.) $BC : CF = \triangle ABC : \triangle KGH$. Nun ist (6, 1. S.) $BC : CF = BE : CM$. Folglich ist (5, 11. S.) $\triangle ABC : \triangle KGH = BE : CM$, folglich (5, 16. S.) verwechselt $\triangle ABC : BE = \triangle KGH : CM$. Nun ist $\triangle ABC = BE$. Folglich $\triangle KGH = CM = D$.

Der 26. Satz.

Wenn von einem Parallelogramm, ABCD, ein demselben ähnliches und ähnlich liegendes Parallelogramm, AEFG, unter einem gemeinschaftlichen Winkel, DAB, abgeschnitten wird: so liegen beyde um einerley Diagonale.



Gesetzt sie liegen nicht beyde um einerley Diagonale, das ist, die Diagonale des Parallelogramms ABCD, gienge nicht durch F, so gehe sie durch einen andern Punkt, etwa durch H, wie AHC. Ziehe durch H der AD, BC, die HK parallel, so ist (6, 24. S.) $ABCD \sim GK$, folglich (6, 1. Def.) $DA : AB = GA : AK$. Nun ist, weil $ABCD \sim EG$, (6, 1. Def.) $DA : AB = GA : AE$. Folglich (5, 11. S.) $GA : AK = GA : AE$, folglich (5, 9. S.) $AK = AE$, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Der

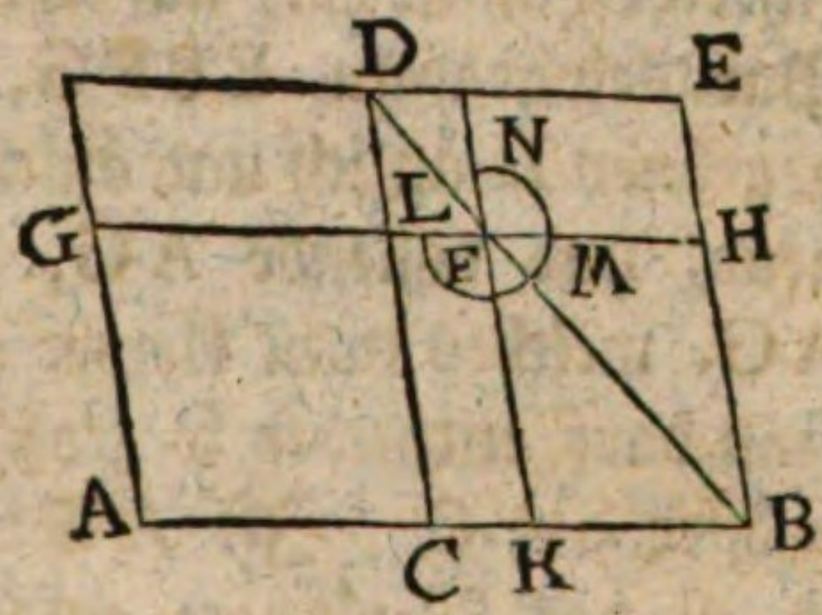
Der 27. Satz.

Ein Parallelogramm auf der Hälfte einer gegebnen geraden Linie, AB, ist grösser, als ein jedes andres Parallelogramm auf einem beliebigen Abschnitte derselben Linie, dessen Ergänzung auf dem übrigen Abschnitte, dem Parallelogramm auf der Hälfte, ähnlich ist und ähnlich liegt.

Es, sey die gegebne gerade Linie, AB, in C halbirt, so ist der Abschnitt, auf dem das andre Parallelogramm soll beschrieben werden, entweder grösser, oder kleiner, als die Hälfte, AC.

Erster Fall.

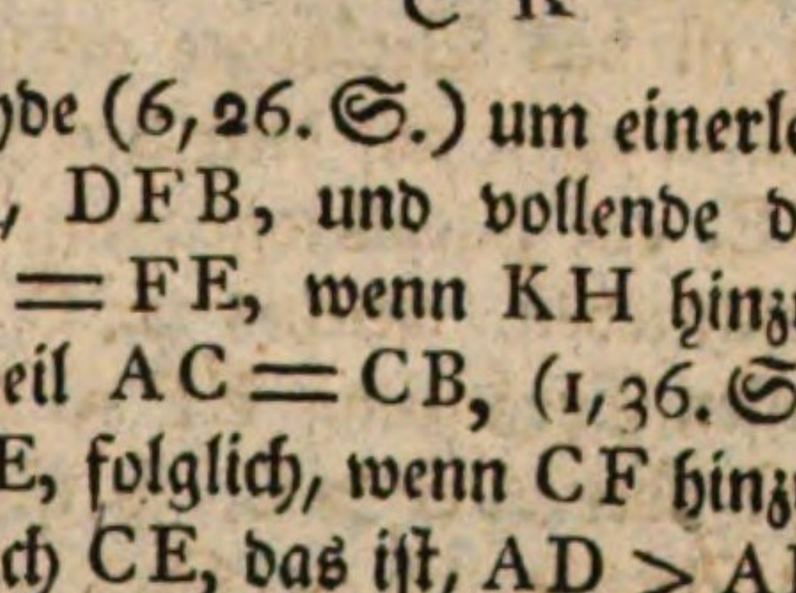
Es sey solcher Abschnitt AK > AC. Beschreibe auf AC das Parallelogramm, AD, dessen Ergänzung, CE, und auf AK, ein andres Parallelogramm, AF, dessen Ergänzung KH ∼ CE ∼ AD, so ist zu beweisen, daß AD > AF.



Da CE, KH, ähnlich, so liegen beyde (6, 26. S.) um einerley Diagonale. Ziehe diese Diagonale, DFB, und vollende die Figur, so ist, weil (1, 43. S.) CF = FE, wenn KH hinzukommt, CH = KE. Nun ist, weil AC = CB, (1, 36. S.) CH = CG. Folglich ist CG = KE, folglich, wenn CF hinzukommt, AF = Gnom. LMN, folglich CE, das ist, AD > AF.

Zweyter Fall.

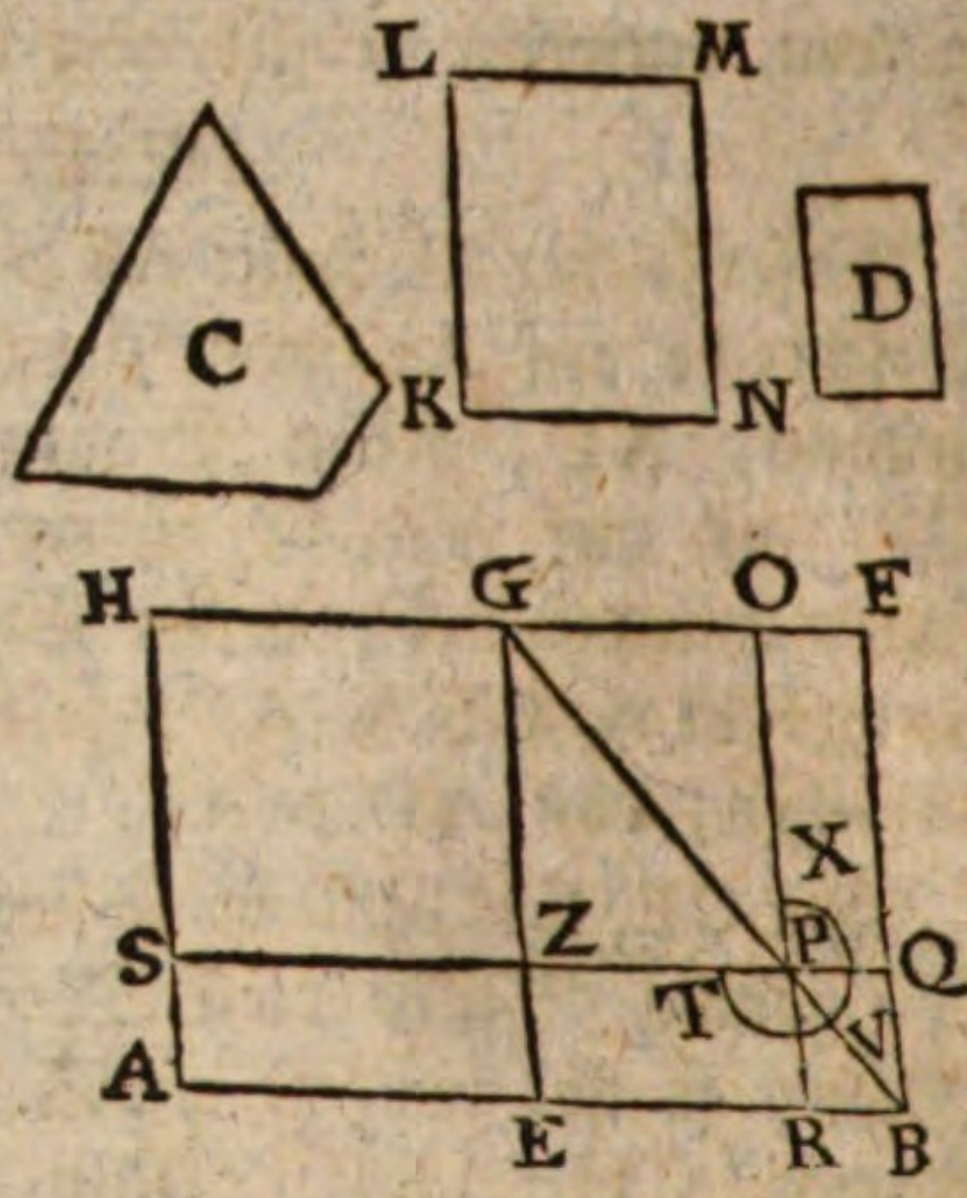
Es sey solcher Abschnitt, AD < AC. Beschreibe auf AC das Parallelogramm AL, dessen Ergänzung CM, und auf AD ein andres Parallelogramm AE, dessen Ergänzung DF ∼ CM ∼ AL, so ist zu beweisen, daß AL > AE.



Da DF, CM, ähnlich, so liegen beyde (6, 26. S.) um einerley Diagonale. Ziehe diese Diagonale ELB, und vollende die Figur, so ist, weil FG = GH, (1, 36. S.) LF = LH, folglich LF > EK. Nun ist (1, 43. S.) LF = LD, folglich LD > EK, folglich, wenn DK hinzukommt, AL > AE.

Der 28. Satz.

Ein Parallelogramm auf einem Abschnitt einer gegebnen geraden Linie, AB, zu beschreiben, so daß es einer gegebnen geradlinichen Figur, C, die nicht grösser als das Parallelogramm auf der Hälfte der Linie, gleich sey; und daß seine Ergänzung auf dem übrigen Abschnitte, einem gegebnen, der Ergänzung des Parallelogramms auf der Hälfte der Linie, ähnlichen Parallelogramm, D, ähnlich sey.



Es sey die gegebne gerade Linie, AB, in E, halbirt. Beschreibe (6, 18. S.) auf BE das Parallelogramm EBFG, dem gegebnen D ähnlich und ähnlich liegend, und vollende AG, so ist AG, welches nicht kleiner als C seyn darf, entweder so groß, oder grösser als C. Ist AG = C, so ist das Verlangte geschehen. Denn es ist auf dem Abschnitte, AE, ein Parallelogramm, AG, beschrieben, welches = C, und dessen Ergänzung EF ∼ D ist. Ist aber AG > C, so ist, weil AG = EF, auch EF > C. Beschreibe (6, 25. S.) ein Parallelogramm KLMN, dem Ueberschuß der EF über die C gleich, (das ist, EF = C + KLMN) und dem gegebnen Parallelogramm, D, ähnlich und ähnlich liegend, welches daher auch dem Parallelogramm, EF, ähnlich ist, so daß LK der GE, und LM der GF homolog, das ist, LK : LM = GE : GF. Nun ist EF = C + KM, und daher EF > KM. Folglich ist (6, 20. Zus.) GE > LK, und GF > LM. Mache GZ = LK, und GO = LM. Vollende ZO, so ist ZO ≅ KM. Nun ist KM ∼ EF, folglich ZO ∼ EF, folglich (6, 26. S.) liegen beyde um einerley Diagonale. Ziehe diese Diagonale BPG, und vollende die Figur.

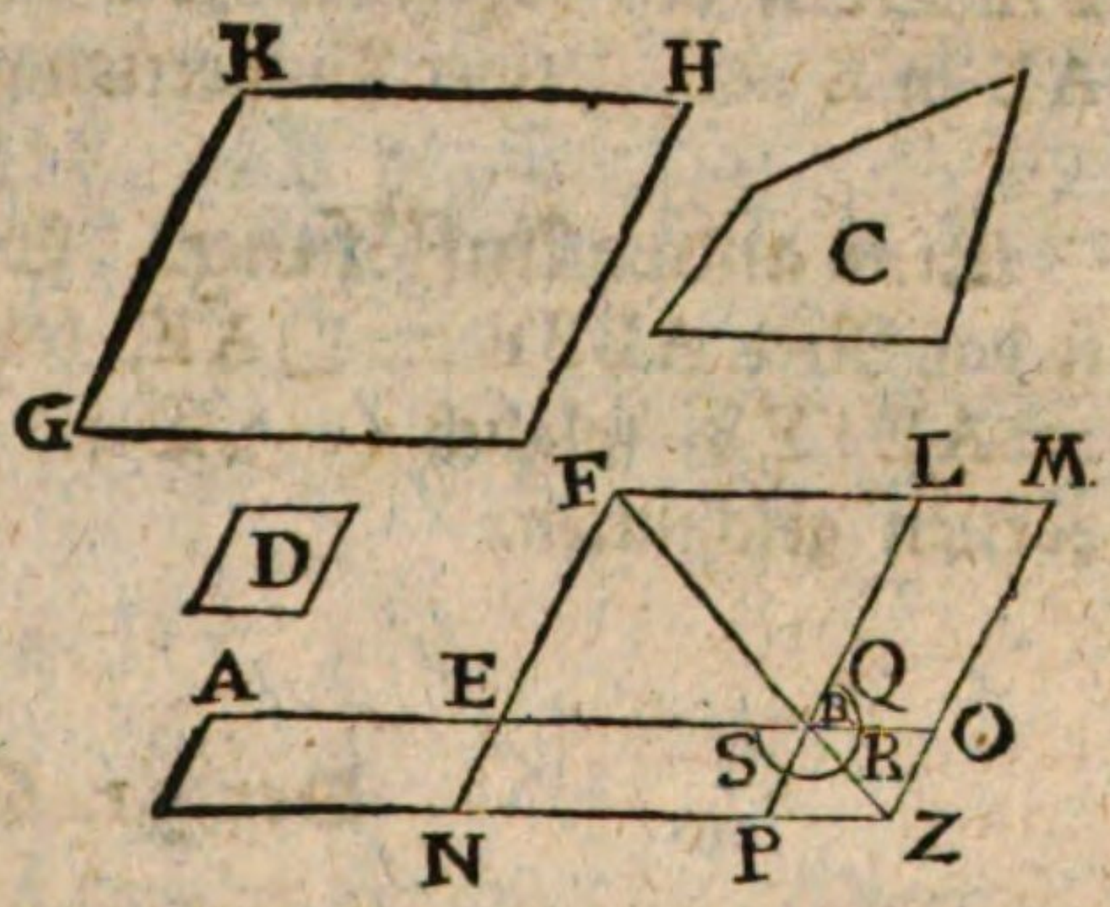
Da EF = C + KM, und ZO = KM, so ist EF = C + ZO, folglich Gnom. TVX = C. Nun ist, weil (1, 34. S.) OQ = ZR, und daher, wenn QR hinzukommt, FR = EQ = ES,

und

und daher, wenn ZR hinzukommt, Gnom. TVX = SR. Folglich ist SR = C. Demnach ist auf dem Abschnitt, AR, ein Parallelogramm, SR, beschrieben, welches = C, und dessen Ergänzung, QR, (6, 24. S.) ∼ OZ ∼ D ist.

Der 29. Satz.

Ein Parallelogramm auf einer gegebnen geraden Linie, AB, zu beschreiben, so daß es nebst seiner, einem gegebnen Parallelogramm, D, ähnlichen Ergänzung auf der in gleicher Richtung angesetzten Linie, einer gegebnen geradlinichen Figur, C, gleich sey.



Es sey AB in E halbirt. Beschreibe (6, 18. S.) auf EB das Parallelogramm EL ∼ D und (6, 25. S.) ein Parallelogramm GH, welches = EL + C, und welches ∼ D, folglich auch ∼ EL, und es sey KH : KG = FL : FE. Nun ist GH > EL. Folglich ist KH > FL, und KG > FE. Verlängre FL, FE nach M, N, und mache FM = KH, und FN = KG. Vollende MN, so ist MN ≅ GH. Nun ist GH ∼ EL, folglich auch MN ∼ EL, folglich (6, 26. S.) liegen beyde um einerley Diagonale. Ziehe diese Diagonale, FBZ, und vollende die Figur.

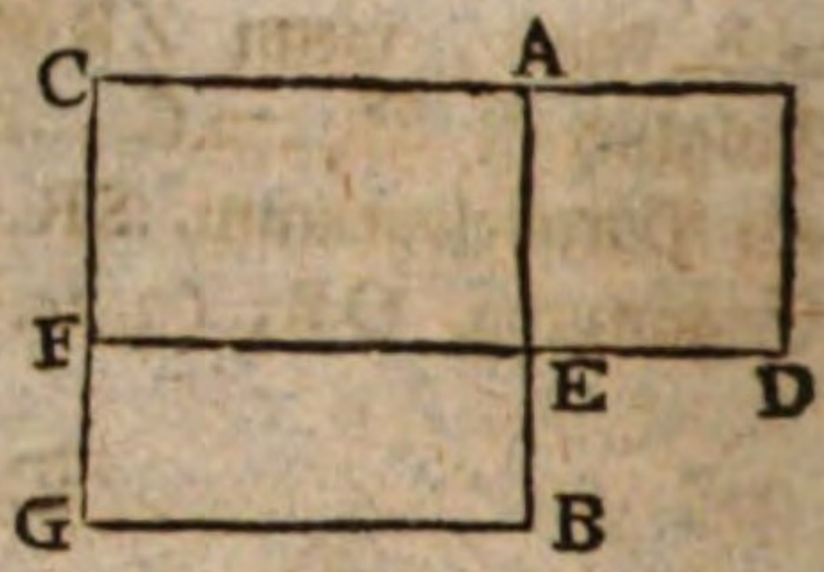
Da GH = EL + C, und GH = MN, so ist MN = EL + C, folglich Gnom. QRS = C. Nun ist (weil EA = EB) AN = NB = (1, 43. S.) LO, und daher, wenn NO hinzukommt, AZ = Gnom. QRS. Folglich ist AZ = C. Demnach ist auf AB ein Parallelogramm, AP, beschrieben, welches nebst seiner der D ähnlichen Ergänzung, PO, der C gleich ist.

Der 30. Satz.

Eine gegebne begrenzte gerade Linie, AB, nach stetiger Proportion zu schneiden.

Mache

Mache (1, 46. S.) von AB das Quadrat, BC, und beschreibe (6,29.S.) auf AC ein Parallelogramm, CE, welches nebst seiner der BC änlichen Ergänzung, AD, der BC gleich sey, so ist, weil BC ein Quadrat, auch AD ein Quadrat. Da CD = CB, so ist, wenn man CE wegnimmt, AD = BF. Nun sind AD, BF, auch gleichwinklich. Folglich ist (6,14. S.) FE : ED = AE : EB. Nun ist (1, 34. S.) FE = AC = AB, und ED = AE. Folglich ist BA : AE = AE : EB. Nun ist BA > AE, und daher auch AE > EB. Folglich ist (6,3. Def.) AB in E nach stetiger Proportion geschnitten.

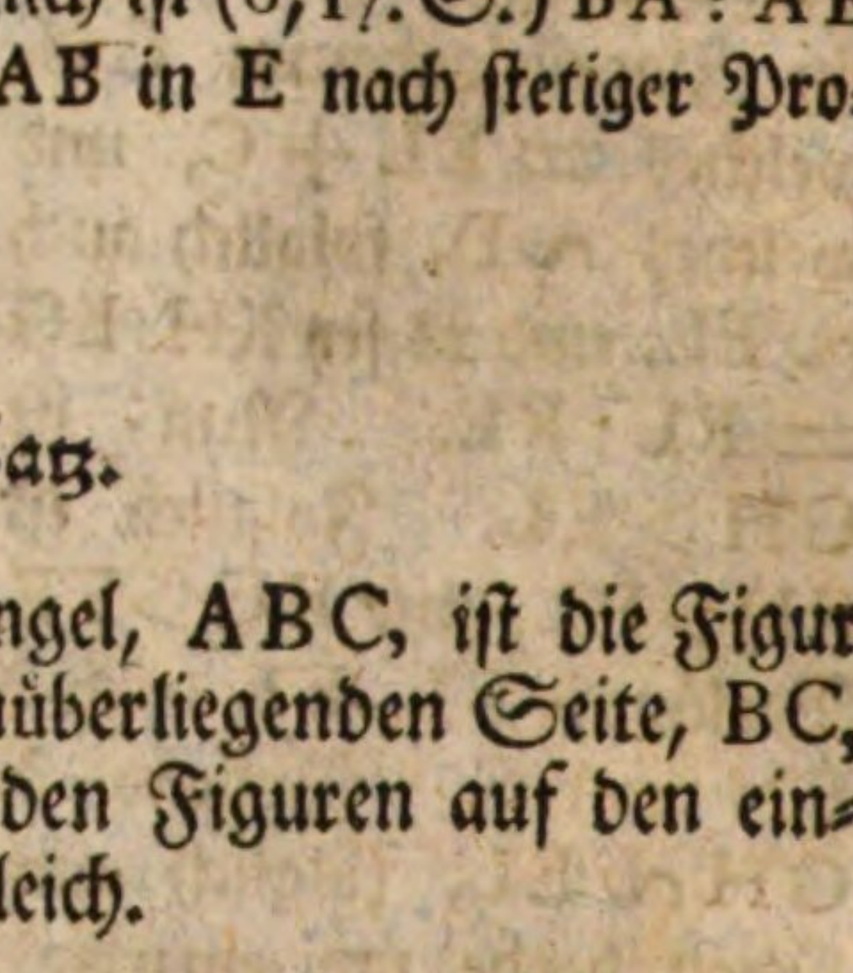


Eine andre Auflösung. Schneide (2, 11. S.) AB in E so daß Rect. ABBE = □AE, folglich ist (6, 17. S.) BA : AE = AE : EB, folglich (6, 3. Def.) AB in E nach stetiger Proportion geschnitten.

Der 31. Satz.

In jedem rechtwinklichen Triangel, ABC, ist die Figur auf der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, BC, den ihr änlichen und änlich liegenden Figuren auf den einschliessenden Seiten, BA, AC, gleich.

Aus A fälle auf BC den Perpendikel AD, so entstehen (6, 8. S.) änliche Triangel. Demnach ist △ABC ∼ △ABD, folglich CB : BA = AB : BD, folglich (6, 20. Zus.) CB : BD = E : F. Nun ist eben so erweislich CB : CD = E : G. Folglich ist (5, 24. S.) CB : BD + CD = E : F + G. Nun ist CB = BD + CD. Folglich ist auch E = F + G.

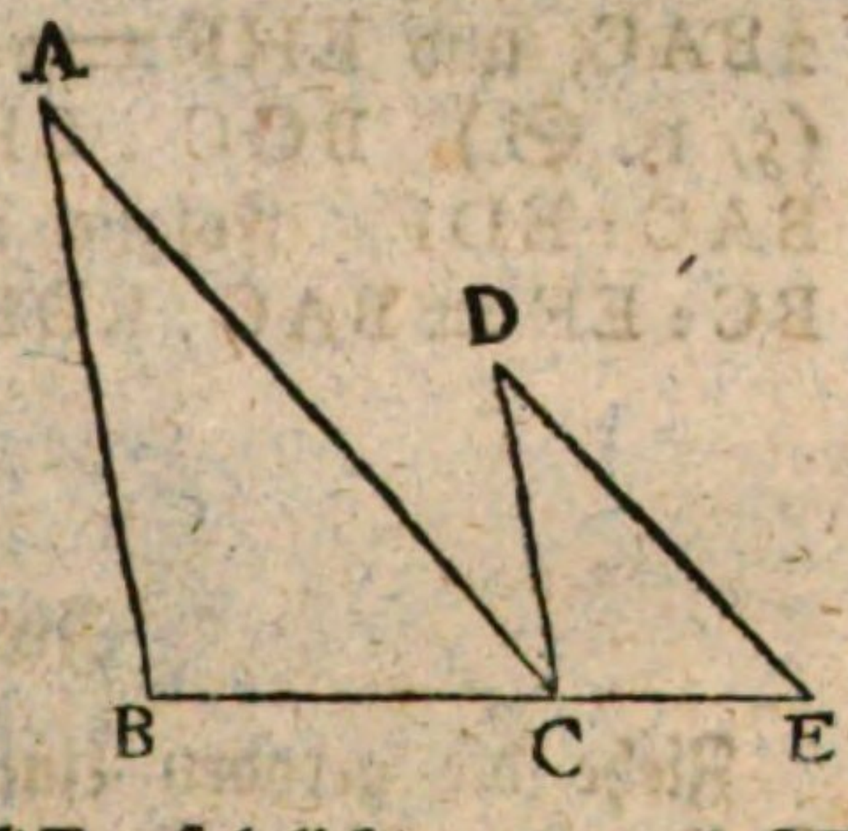


Ein

Ein andrer Beweis. Da die Figuren änlich, so ist (6, 22. S.) E:F = (BC:AB)². Nun ist (6, 20. Zus.) □BC:□AB = (BC:AB)². Folglich ist (5, 11. S.) E:F = □BC:□AB. Nun ist eben so erweislich E:G = □BC:□AC. Folglich ist (5, 24. S.) E:F+G = □BC:□AB+□AC. Nun ist (1, 47. S.) □BC = □AB+□AC. Folglich ist auch E = F+G.

Der 32. Satz.

Wenn zwey Triangel, ABC, DCE, bey denen zwey Seiten, BA, AC, mit zweyen Seiten, CD, DE, proportionirt, so aneinander gebracht werden, daß ihre homologen Seiten, AB, CD; AC, DE, auch parallel sind: so liegt die dritte Seite, BC, mit der dritten Seite, CE, in Einer geraden Linie.



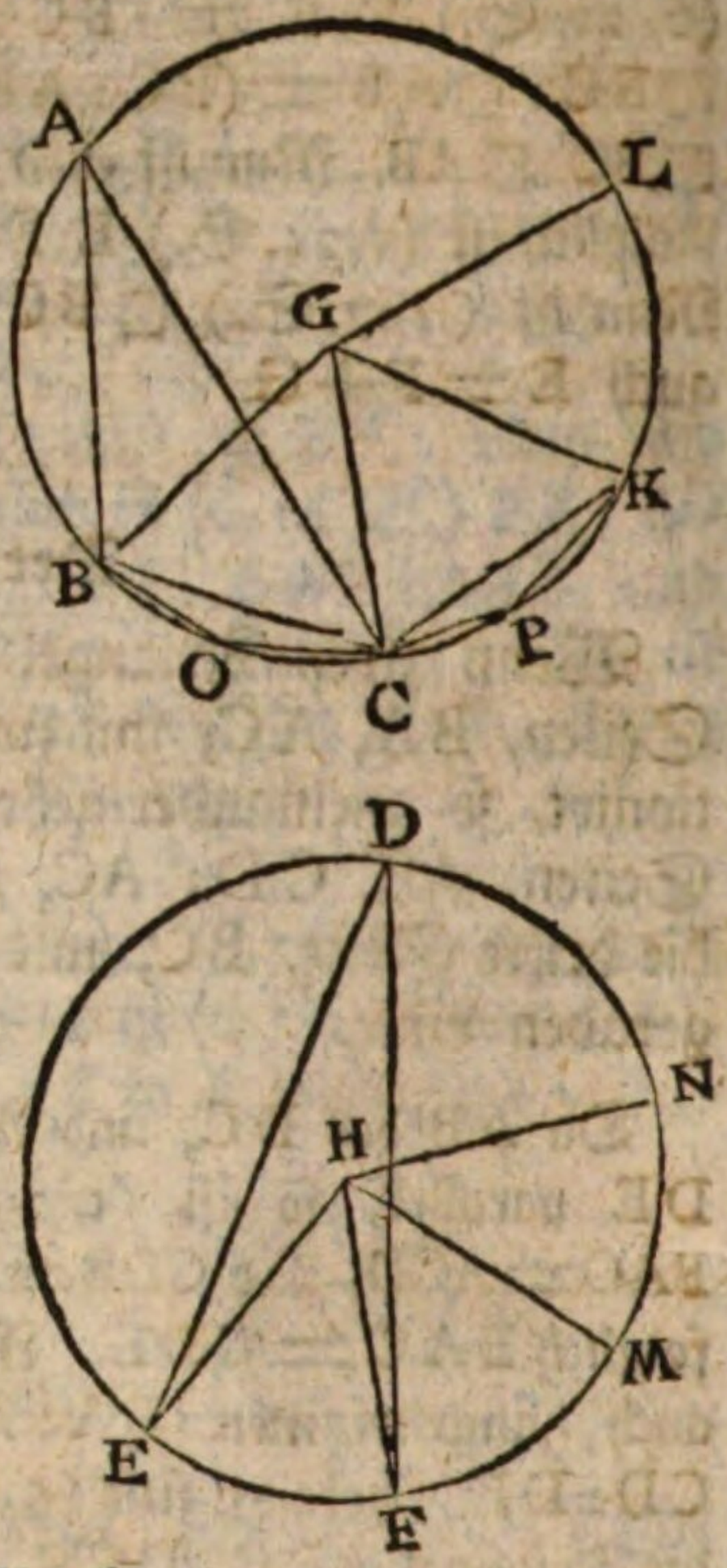
Da AB der DC, und AC der DE parallel, so ist (1, 29. S.) BAC = ACD, und CDE = ACD, folglich BAC = CDE. Nun ist auch angenommen BA:AC = CD:DE. Folglich sind (6, 6. S.) die Triangel ABC, DCE, gleichwinklich. Demnach ABC = DCE. Nun war auch BAC = ACD. Folglich ist ABC+BAC = ACE, folglich, wenn ACB hinzukommt, ABC+BAC+ACB = ACE+ACB. Nun ist (1, 32. S.) ABC+BAC+ACB = 2 R. Folglich ist auch ACE+ACB = 2 R, folglich (1, 14. S.) BCE Eine gerade Linie.

Der 33. Satz.

In gleichen Cirkeln, ABC, DEF, haben sowohl die Centriwinkel, BGC, EHF, als auch die Peripheriewinkel, BAC, EDF, und eben so auch die Ausschnitte, GBC, HEF, einerley Verhältniß mit den Cirkelbogen, BC, EF, auf denen sie stehen.

Erster Theil.

Nimm in beliebiger Anzahl die Cirkelbogen CK, KL, dem BC gleich, und FM, MN, dem EF gleich. Ziehe GK, GL; HM, HN, so sind (3, 27. S.) die Centriwinkel, die auf den gleichen Bogen stehen, einander gleich. Folglich sind BL, BGL, von BC, BGC, und eben so EN, EHN, von EF, EHF, gleichvielfach, und es ist (3, 27. S.) wie BL ∠ EN, eben so BGL ∠ EHN. Folglich (5, 5. Def.) BC : EF = BGC : EHF. Nun ist, weil (3, 20. S.) BGC = 2BAC, und EHF = 2EDF, (5, 15. S.) BGC : EHF = BAC : EDF. Folglich ist auch BC : EF = BAC : EDF.



Zweyter Theil.

Ziehe die geraden Linien, BC, CK. Zwischen B, C, und C, K, nimm in der Peripherie willkührlich die Punkte O, P, und ziehe BO, OC, CP, PK.

Da (1, 15. S.) GB, GC, GK, einander gleich, auch die von ihnen eingeschlossene Winkel bey G einander gleich, so ist (1, 4. S.) △GCB = △GKC, auch BC = CK.

Da die Bogen BC, CK, gleich, so sind auch ihre Reste von der ganzen Peripherie gleich. Folglich stehen die Winkel, BOC, CPK, auf gleichen Bogen, und sind daher (3, 27. S.) einander gleich, folglich sind (3, 11. Def.) die Segmente, BOC, CPK, einander ähnlich. Nun waren ihre Grundlinien, BC, CK, einander gleich. Folglich sind (3, 24. S.) die Segmente, BOC, CPK,

einander

einander auch gleich. Nun waren die Triangel, GBC, GCK, einander gleich. Folglich sind die Ausschnitte, GBC, GCK, einander gleich. Nun ist eben so erweislich, daß die Ausschnitte, GCK, GKL, einander gleich. Folglich sind alle drey Ausschnitte einander gleich. Folglich sind BL, GBL, von BC, GBC, und aus eben den Gründen, EN, HEN, von EF, HEF, gleichvielfach. Auch ist wie BL ≷ EN eben so auch GBL ≷ HEN. Folglich ist (5, 5. Def.) BC : EF = GBC : HEF.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß (5, 11. S.) auch die Cirkelausschnitte, GBC, HEF, sich wie die Winkel, BGC, EHF, verhalten.

Euklids Elemente

Siebentes Buch.

Definitionen.

1. Die **Einheit** ist, nach welcher jedes Ding Eins heißt.
2. Eine **Zahl** aber ist die aus Einheiten bestehende Vielheit.
3. Eine kleinere Zahl ist ein **Theil** der grössern, wenn die grössere sich von ihr genau messen läßt.
4. Eine kleinere Zahl ist ein **vielfacher Theil** der grössern, wenn die grössere sich von ihr nicht genau messen läßt.
5. Eine grössere Zahl ist ein **Vielfaches** der kleinern, wenn sie sich von der kleinern genau messen läßt.
6. Eine **gerade Zahl** ist, welche sich halbiren läßt.
7. Eine **ungerade Zahl** aber ist, welche sich nicht halbiren läßt; oder welche von einer geraden Zahl um Eins unterschieden ist.
8. **Grademalgerade** ist die Zahl, welche von einer geraden Zahl nach einer geraden Zahl gemessen wird.
9. **Grademalungerade** aber ist die, so von einer geraden Zahl nach einer ungeraden Zahl gemessen wird.
10. **Ungrademalungerade** ist die Zahl, welche von einer ungeraden Zahl nach einer ungeraden Zahl gemessen wird.
11. Eine **Primzahl** ist, welche sich nur von der Einheit genau messen läßt.
12. Zahlen, welche nur die Einheit zum gemeinschaftlichen Maase haben, sind **Primzahlen zu einander**, (relative Primzahlen.)

13. Eine

13. Eine zusammengesetzte Zahl ist, welche sich von irgend einer Zahl genau messen läßt.
14. Zahlen, welche irgend eine Zahl zum gemeinschaftlichen Maase haben, sind zusammengesetzte Zahlen zu einander, (relativ zusammengesetzte Zahlen.)
15. Eine Zahl vervielfältigt (multiplicirt) eine andre, wenn die andre so vielmal zu sich selbst gesetzt wird, als die erste Einheiten enthält.
16. Wenn zwey Zahlen einander vervielfältigen, so heißt die daraus entstehende Zahl, oder das Product, eine Flächenzahl; die Zahlen aber, welche einander vervielfältigt haben, heissen ihre Seiten. (Factoren.)
17. Wenn drey Zahlen einander vervielfältigen, so heißt die daraus entstehende Zahl, oder das Product, eine Körperzahl; die Zahlen aber, welche einander vervielfältigt haben, heissen ihre Seiten. (Factoren.)
18. Eine Quadratzahl ist, deren beyde Seiten einander gleich sind.
19. Eine Kubikzahl ist, deren drey Seiten einander gleich sind.
20. Zahlen sind proportionirt, wenn die erste von der zweyten, und die dritte von der vierten, entweder einerley Theil, oder einerley vielfacher Theil sind.
21. Flächenzahlen, wie auch Körperzahlen, welche proportionirte Seiten haben, sind änlich.
22. Eine vollständige Zahl heißt die, so der Summe ihrer Theile gleich ist.

Der 1. Satz.

Wenn zwey ungleiche Zahlen, AB, CD, vorhanden sind, und man nimmt immer die kleinere von der grössern weg, ohne daß vom Rest die nächstvorgehende Zahl eher genau gemessen werde, als bis derselbe zur Einheit geworden: so sind die zuerst gedachten Zahlen, AB, CD, Primzahlen zu einander.

Wären AB, CD, nicht Primzahlen zu einander, so würden sie von irgend einer Zahl, etwa von E, gemessen. Nun lasse AB, von CD gemessen, den Rest AF < CD, und CD, von AF gemessen, den Rest CG < AF, und AF, von CG gemessen, den Rest AH = 1.

A 1 H 2 F 15 B

C 2 G 3 D

E

E mißt die CD, und CD die BF, folglich mißt E die BF; aber auch die ganze AB, folglich auch den Rest AF. Dieser Rest aber mißt die DG, folglich mißt auch E die DG; aber auch die ganze CD, folglich auch den Rest CG. Dieser Rest aber mißt die FH, folglich mißt auch E die FH; aber auch die ganze AF, folglich auch den Rest AH, das ist, die Einheit, welches unmöglich, weil E > 1.

Der 2. Satz.

Es sind zwey Zahlen gegeben, die nicht Primzahlen zu einander sind: man soll ihr gröstes gemeinschaftliches Maaß finden.

Erster Fall.

Es seyen, A, B, die beyden gegebnen Zahlen, so daß die grössere, A, von der kleinern, B, genau gemessen werde. Nun mißt B auch sich selbst, folglich ist B ein gemeinschaftliches Maaß von A und B; aber auch das gröste, weil offenbar keine grössere Zahl, als B, die B messen kann.

A 8 B 4

Zweyter

Zweyter Fall.

Es seyen AB, CD, die beyden gegebnen Zahlen, so daß die grössere, AB, von der kleinern, CD, nicht genau gemessen werde. Nimm immer die kleinere von der grössern weg, bis ein Rest kommt, welcher die nächstvorgehende Zahl genau mißt. Dieser Rest ist das gröste gemeinschaftliche Maaß der beyden gegebnen Zahlen.

A 4 E 6 B
C 2 F 4 D
1
G —

1.) Daß dieser Rest grösser als die Einheit, folglich eine Zahl sey, siehet man daher, weil sonst (7, 1. S.) AB, CD, Primzahlen zu einander wären, gegen das Angenommene.

2.) Daß dieser Rest das gemeinschaftliche Maaß von AB, CD, sey, wird so gezeigt: Es lasse AB, von CD gemessen, den Rest AE < CD, und CD, von AE gemessen, den Rest CF, welcher die nächstvorgehende Zahl AE genau messe. CF mißt AE, und AE die DF, folglich mißt CF die DF; aber auch sich selbst, folglich die ganze CD. Nun mißt CD die BE. Folglich mißt auch CF die BE; aber auch die EA, folglich die ganze AB. Demnach ist der Rest CF ein gemeinschaftliches Maaß von AB, CD.

3.) Daß dieser Rest CF aber auch das gröste gemeinschaftliche Maaß sey, beweißt man also: Es sey ein andres, G > CF. G mißt die CD, und CD die BE, folglich mißt G die BE; aber auch die ganze AB, folglich auch den Rest AE. Nun mißt AE die DF. Folglich mißt G die DF; aber auch die ganze CD, folglich den Rest CF, welches unmöglich, weil G > CF.

Zusatz.

Hieraus erhellet: wenn zwey Zahlen von einer dritten gemessen werden, daß auch das gröste gemeinschaftliche Maaß der beyden Zahlen von dieser dritten Zahl müsse gemessen werden.

Der 3. Satz.

Es sind drey Zahlen, A, B, C, gegeben, die nicht Primzahlen zu einander sind: man soll ihr grösstes gemeinschaftliches Maaß finden.

Nimm (7, 2. S.) von A, B, das gröste gemeinschaftliche Maaß D, so mißt dieses entweder auch die C, oder nicht.

Erster Fall.

Wenn D auch die C mißt, so ist sie ein gemeinschaftliches Maaß von A, B, C; aber auch das gröste. Denn wäre ein andres E > D, so würde E, weil sie A, B, mißt, (7, 2. Zus.) auch D messen, welches unmöglich, weil E > D.

A 8 B 6 C 4

D 2 E —

Zweyter Fall.

Wenn D nicht auch die C mißt, so nimm (7, 2. S.) von C, D, das gröste gemeinschaftliche Maaß E, so ist dieses das verlangte.

A 18 B 12 C 4

D 6 E 2 F —

1.) Daß sich zu C, D, ein gemeinschaftliches Maaß finden lasse, oder daß C, D, nicht Primzahlen zu einander sind, siehet man daher, weil A, B, C, nicht Primzahlen zu einander sind, folglich von irgend einer Zahl gemessen werden. Diese Zahl mißt demnach A, B, folglich (7, 2. Zus.) auch ihr grösstes gemeinschaftliches Maaß D. Nun mißt sie auch die C. Folglich werden C, D, von einer Zahl gemessen, und sind also nicht Primzahlen zu einander.

2.) Daß E die A, B, C, messe, beweißt man also: E mißt D, und D mißt A, B, folglich mißt E die A, B. Nun mißt E auch die C, folglich alle drey Zahlen A, B, C.

3.) Daß E das gröste gemeinschaftliche Maaß dieser drey Zahlen sey, erhellet daraus: Wär ein andres, F > E, so würde es A, B, folglich (7, 2. Zus.) auch D messen. Nun mißt es auch C, folglich (7, 2. Zus.) auch E, welches unmöglich, weil F > E.

Zusatz.

Zusatz.

Hieraus erhellet, wenn drey Zahlen von einer Zahl gemessen werden, daß auch ihr grösstes gemeinschaftliches Maaß von solcher Zahl gemessen werde.

Anmerkung. Auf eben die Art wird auch das gröste gemeinschaftliche Maaß mehrerer gegebnen Zahlen gefunden.

Der 4. Satz.

Jede kleinere Zahl ist entweder ein Theil, oder ein vielfacher Theil, jeder grössern.

Erster Fall.

Wenn die beyden ungleichen Zahlen, A, B, Primzahlen zu einander sind, so ist jede Einheit der kleinern, B, ein Theil der A, folglich die B ein vielfacher Theil der A.

A 8 B 5

Zweyter Fall.

Sind die beyden ungleichen Zahlen nicht Primzahlen zu einander, so läßt sich entweder die grössere von der kleinern genau messen, oder nicht.

1.) Läßt sich die grössere A von der kleinern B genau messen, so ist B ein Theil der A.

A 8 B 4

2.) Läßt sich die grössere, A, von der kleinern, BC, nicht genau messen, so nimm (7, 2. S.) von A, BC, das gröste gemeinschaftliche Maaß D, und zerlege die BC in ihre der D gleiche Theile, BE, EF, FC. Nun mißt D die A, und ist folglich ein Theil der A. Aber D = BE = EF = FC. Folglich ist BE sowohl, als EF, und als FC, ein Theil der A, folglich ist BC ein vielfacher Theil der A.

A 8

B 2 E 2 F 2 C

D 2

Der 5. Satz.

Wenn eine Zahl, A, ein Theil von einer andern, BC, und eine dritte, D, eben derselbe Theil von einer vierten, EF, ist: so ist die Summe der ersten und dritten, A+D, von der Summe der zweyten und vierten, BC+EF, auch eben derselbe Theil.

A 3

B 3 G 3 C

D 4

E 4 H 4 F

Es ist D von EF ein solcher Theil, als es A von BC ist. Folglich, so viel der A gleiche Zahlen in BC sind, eben so viel der D gleiche Zahlen sind in EF. Zerlege daher BC in die der A gleiche, BG, GC, und eben so EF in die der D gleiche, EH, HF; so werden der letzten so viel als der ersten seyn. Nun ist BG = A und EH = D. Folglich ist BG + EH = A + D. Aus eben dem Grunde ist auch GC + HF = A + D. So viel also der A gleiche Zahlen in BC sind, so viel der A+D gleiche Zahlen sind in BC + EF. Folglich ist A+D von BC + EF ein eben solcher Theil, als es A von BC ist.

Der 6. Satz.

Wenn eine Zahl, AB, ein vielfacher Theil von einer andern, C, und eine dritte, DE, eben derselbe vielfache Theil von einer vierten, F, ist: so ist die Summe der ersten und dritten, AB + DE, von der Summe der zweyten und vierten, C+F, auch eben derselbe vielfache Theil.

A 3 G 3 B

C 9

D 4 H 4 E

F 12

Es ist DE von F eben der vielfache Theil, als es AB von C ist. Folglich, so viel Theile der C in AB, eben so viel solcher Theile der F sind in DE. Zerlege daher AB in die Theile der C, das ist, in AG, GB, und eben so DE in die Theile der F, das ist, in DH, HE; so werden der letzten so viel als der ersten seyn. Da nun AG von C ein solcher Theil, als DH von F, so ist auch (7, 5. S.) AG + DH von C+F ein solcher Theil, als AG von C. Nun ist aus eben dem Grunde GB + HE

von

von C+F ein solcher Theil, als GB von C. Folglich ist AB+DE von C+F eben derselbe vielfache Theil, als AB von C ist.

Der 7. Satz.

Wenn eine Zahl, AB, ein Theil von einer andern, CD, und ein Stück der ersten, AE, eben derselbe Theil von einem Stück der andern, CF, ist: so ist der Rest der ersten, EB, vom Rest der andern, FD, auch eben derselbe Theil.

A 4 E 2 B

G 4 C 8 F 4 D

Es sey EB von CG ein solcher Theil, als AE von CF. Folglich ist (7, 5. S.) AB von FG ein solcher Theil, als AE von CF. Nun ist angenommen, daß AB von CD ein solcher Theil, als AE von CF. Folglich ist AB von CD ein solcher Theil, als AB von FG, folglich ist CD = FG, folglich (wenn man CF wegnimmt) ist FD = CG. Nun war EB von CG ein solcher Theil, als AE von CF. Folglich ist EB von FD ein solcher Theil, als AE von CF, das ist, als AB von CD.

Der 8. Satz.

Wenn eine Zahl, AB, ein vielfacher Theil von einer andern, CD, und ein Stück der ersten, AE, eben derselbe vielfache Theil von einem Stück der andern, CF, ist: so ist der Rest der ersten, EB, vom Rest der andern, FD, auch eben derselbe vielfache Theil.

A 6 L 6 E 4 B

C 18 F 6 D

G 6 M 2 K 6 N 2 H

Es sey eine Zahl GH = AB, so ist GH von CD ein solcher vielfacher Theil, als AE von CF. Zerlege GH in die Theile der CD, das ist, in GK, KH; und AE in die Theile der CF, das ist, in AL, LE; so werden der letzten so viel als der ersten seyn. Da GK von CD ein solcher Theil, als AL von CF, aber CD > CF; so

ist GK > AL. Mache daher GM = AL, so ist GM von CF ein solcher Theil, als GK von CD. Folglich ist (7, 7. S.) MK von FD ein solcher Theil, als GK von CD.

A 6 L 6 E 4 B

C 18 F 6 D

G 6 M 2 K 6 N 2 H

Da ferner KH von CD ein solcher Theil, als LE von CF, aber CD > CF, so ist KH > LE. Mache daher KN = LE, so ist KN von CF ein solcher Theil, als KH von CD. Folglich ist (7, 7. S.) NH von FD ein solcher Theil, als KH von CD. Nun war MK von FD ein solcher Theil, als GK von CD. Folglich ist MK + NH von FD ein solcher vielfacher Theil, als GK + KH von CD. Nun ist MK + NH = EB, und GK + KH = AB. Folglich ist EB von FD ein solcher vielfacher Theil, als AB von CD.

Der 9. Satz.

Wenn eine Zahl, A, von einer andern, BC, und eine dritte, D, von einer vierten, EF, einerley Theil ist: so ist verwechselt die erste, A, von der dritten, D, und die zweyte, BC, von der vierten, EF, auch entweder einerley Theil, oder einerley vielfacher Theil.

Es ist A von BC ein solcher Theil, als D von EF. Folglich, so viel der A gleiche Theile in BC, so viel sind der D gleiche Theile in EF. Zerlege daher BC in ihre der A gleiche Zahlen, das ist, in BG, GC, und EF in ihre der D gleiche Zahlen, das ist, in EH, HF; so sind der letzten so viel, als der ersten. Nun ist auch BG = GC, und EH = HF. Folglich ist BG von EH, und GC von HF, einerley Theil, oder vielfacher Theil. Folglich ist (7, 5. und 6. S.) BG von EH, und BG + GC von EH + HF; das ist, A von D, und BC von EF, einerley Theil, oder vielfacher Theil.

A 4

B 4 G 4 C

D 5

E 5 H 5 F

Der 10. Satz.

Wenn eine Zahl, AB, von einer andern, C, und eine dritte, DE, von einer vierten, F, einerley vielfacher Theil ist: so ist verwechselt die erste, AB, von der dritten, DE, und die zweyte, C, von der vierten, F, auch entweder einerley Theil, oder einerley vielfacher Theil.

Es ist AB von C, und DE von F, einerley vielfacher Theil. Folglich so viel Theile der C in AB, so viel Theile der F sind in DE. Zerlege daher AB in die Theile der C, das ist, in AG, GB, und DE in die Theile der F, das ist, in DH, HE, so sind der letzten so viel, als der ersten.

A 2 G 2 B

C 6

D 5 H 5 E

F 15

Da AG von C, und DH von F, einerley Theil, so ist auch (7, 9. S.) verwechselt AG von DH, und C von F, einerley Theil, oder vielfacher Theil. Eben so ist auch GB von HE, und C von F, einerley Theil, oder vielfacher Theil. Folglich ist (7, 5. und 6. S.) AB von DE, und AG von DH, oder C von F, einerley Theil, oder vielfacher Theil.

Der 11. Satz.

Wenn eine Zahl, AB, zu einer andern, CD, und ein Stück der ersten, AE, zu einem Stück der andern, CF, dieselbe Verhältniß hat: so hat der Rest der ersten, EB, zum Reste der andern, FD, auch dieselbe Verhältniß.

Da AB : CD = AE : CF, so ist (7, 20. Def.) AB von CD, und AE von CF, einerley Theil, oder vielfacher Theil. Folglich ist (7, 7. u. 8. S.) auch der Rest, EB, vom Reste, FD, einerley Theil, oder vielfacher Theil. Folglich ist (7, 20. Def.) AB : CD = EB : FD.

A 4 E 2 B

C 6 F 3 D

Der 12. Satz.

Wenn mehrere Zahlen, A, B, C, D, proportionirt sind: so verhalten sich, wie eins der Forderglieder, A, zu einem der Hinterglieder, B, so alle Forderglieder, A + C, zu allen Hintergliedern, B + D.

Da A : B = C : D, so ist (7, 20. Def.) A von B, und C von D, einerley Theil, oder vielfacher Theil. Folglich ist (7, 5. und 6. S.) A von B, und A + C von B + D, einerley Theil, oder vielfacher Theil. Folglich ist (7, 20. Def.) A : B = A + C : B + D.

A 2	C 4
B 3	D 6

Der 13. Satz.

Vier proportionirte Zahlen, A, B, C, D, sind auch verwechselt proportionirt.

Da A : B = C : D, so ist (7, 20. Def.) A von B, und C von D, einerley Theil, oder vielfacher Theil. Folglich ist (7, 9. und 10. S.) verwechselt A von C, und B von D, einerley Theil, oder vielfacher Theil. Folglich ist (7, 20. Def.) A : C = B : D.

A 2	C 6
B 3	D 9

Der 14. Satz.

Sind mehrere Zahlen, A, B, C, vorhanden, und abermal eben so viel andre, D, E, F, so daß je zwey und zwey in einerley Verhältniß sind: so sind solche auch gleichförmig in einerley Verhältniß.

Es ist nämlich A : B = D : E, auch B : C = E : F, und zu beweisen, daß alsdenn A : C = D : F.

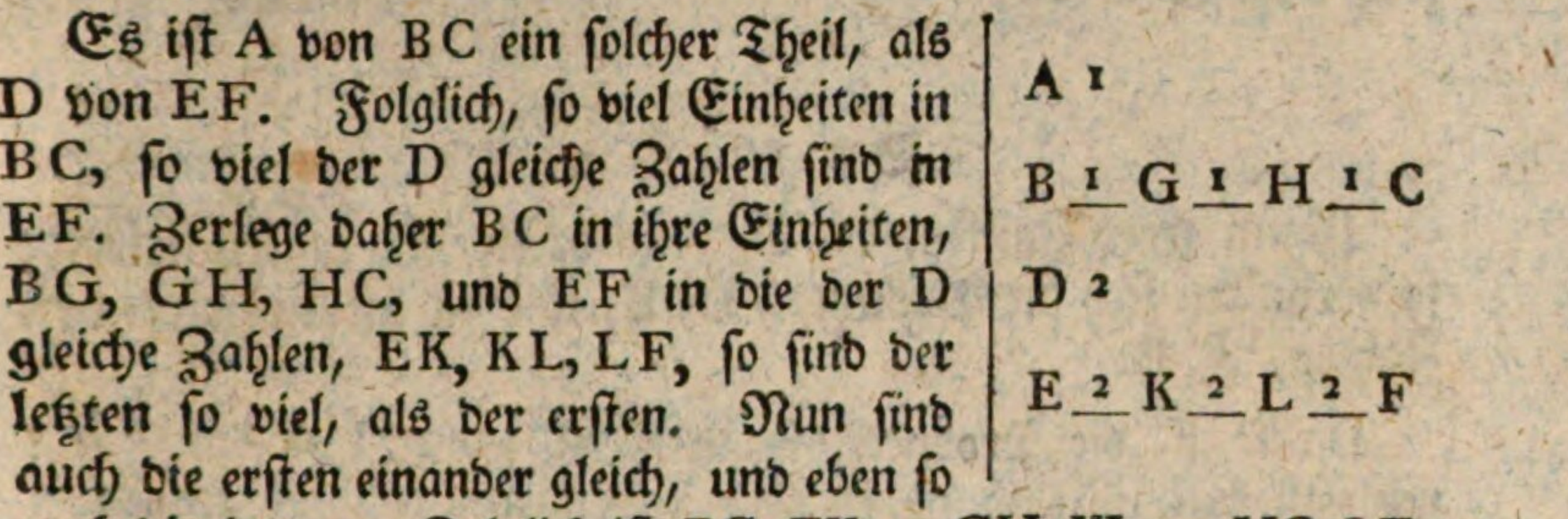
Da A : B = D : E, und B : C = E : F, so ist (7, 13. S.) verwechselt A : D = B : E, und B : E = C : F, folglich A : D = C ; F, folglich verwechselt, A : C = D : F.

A 9	D 6
B 6	E 4
C 4	F 2

Der

Der 15. Satz.

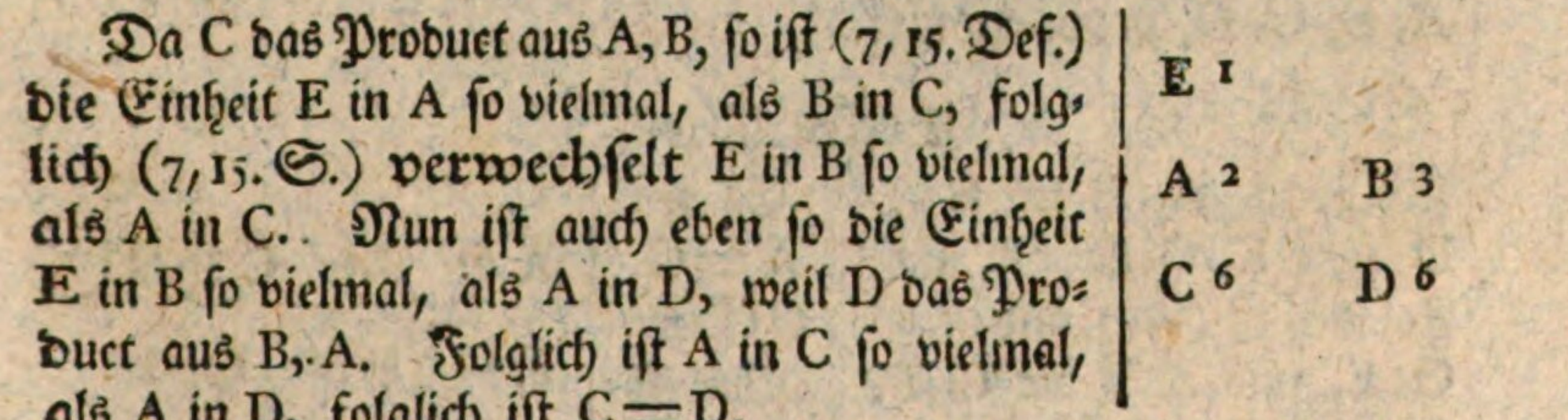
Wenn die Einheit, A, in einer Zahl, BC, so vielmal enthalten ist, als eine zweyte Zahl, D, in einer dritten, EF; so ist auch verwechselt die Einheit A, in der zweyten Zahl, D, so vielmal enthalten, als die erste, BC, in der dritten, EF.



Es ist A von BC ein solcher Theil, als D von EF. Folglich, so viel Einheiten in BC, so viel der D gleiche Zahlen sind in EF. Zerlege daher BC in ihre Einheiten, BG, GH, HC, und EF in die der D gleiche Zahlen, EK, KL, LF, so sind der letzten so viel, als der ersten. Nun sind auch die ersten einander gleich, und eben so auch die letzten. Folglich ist BG:EK = GH:KL = HC:LF, folglich (7, 12. S.) BG : EK = BC : EF. Nun ist BG = A, und EK = D. Folglich ist A:D = BC : EF. Folglich ist (7, 20. Def.) A in D so vielmal enthalten, als BC in EF.

Der 16. Satz.

Wenn zwey Zahlen, A, B, einander multipliciren; die erste nämlich die zweyte, und die zweyte die erste: so sind die Producte, C, D, einander gleich.



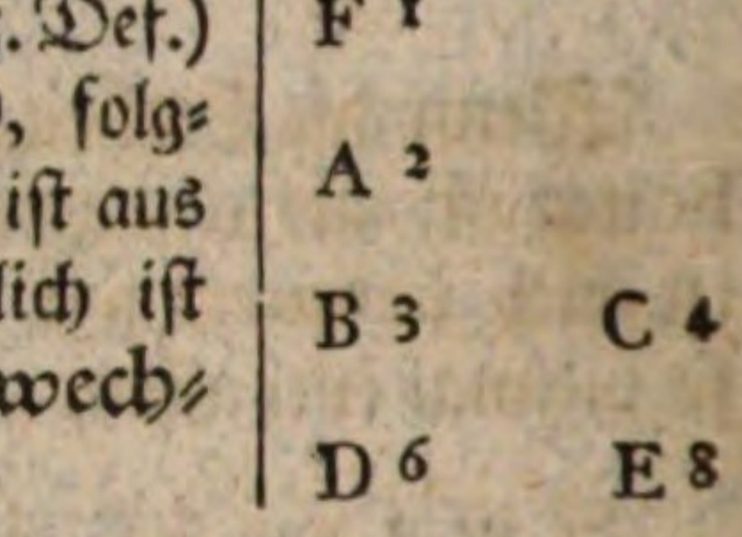
Da C das Product aus A, B, so ist (7, 15. Def.) die Einheit E in A so vielmal, als B in C, folglich (7, 15. S.) verwechselt E in B so vielmal, als A in C. Nun ist auch eben so die Einheit E in B so vielmal, als A in D, weil D das Product aus B, A. Folglich ist A in C so vielmal, als A in D, folglich ist C = D.

Der 17. Satz.

Wenn eine Zahl, A, zwey andre Zahlen, B, C, multiplicirt: so verhalten sich die Producte, D, E, wie die multiplicirten Zahlen, B, C.

Da

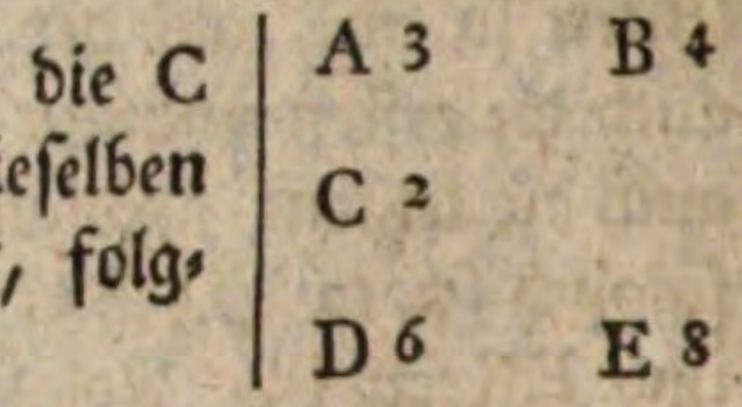
Da D das Product aus A, B, so ist (7, 15. Def.) die Einheit F in A so vielmal, als B in D, folglich (7, 20. Def.) F:A = B:D. Nun ist aus eben dem Grunde F:A = C:E. Folglich ist B:D = C:E, folglich (7, 13. S.) verwechselt B:C = D:E.



Der 18. Satz.

Wenn zwey Zahlen, A, B, eine dritte, C, multipliciren; so verhalten sich die Producte, D, E, wie die multiplicirenden Zahlen, A, B.

Da D, E, die Producte, wenn A, B, die C multipliciren, so sind (7, 16. S.) auch dieselben Producte, wenn C die A, B, multiplicirt, folglich ist (7, 17. S.) A:B = D:E.

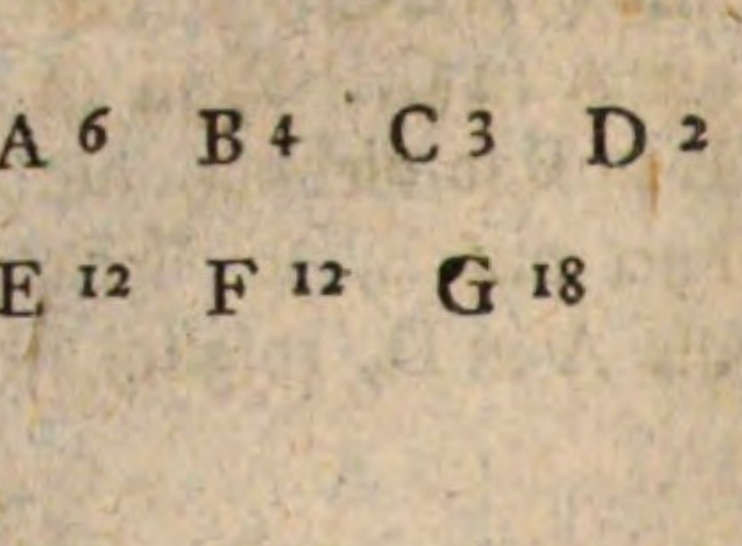


Der 19. Satz.

Wenn vier Zahlen, A, B, C, D, proportionirt sind: so ist das Product aus der ersten und vierten, E, dem Product aus der zweyten und dritten, F, gleich. Und wenn das Product aus der ersten und vierten, E, dem Product aus der zweyten und dritten, F, gleich ist: so sind solche vier Zahlen, A, B, C, D, proportionirt.

Erster Theil.

Wenn A:B = C:D. Es sey D.A = E, C.B = F, und C.A = G. Folglich ist (7, 17. und 18. S.) C:D = G:E, und A:B = G:F. Nun ist A:B = C:D. Folglich ist G:E = G:F, folglich E = F.



Zweyter Theil.

Wenn E = F. Es sey alles wie vorher, so ist auch, wie vorher, C:D = G:E, und A:B = G:F. Nun ist E = F. Folglich ist A:B = C:D.

Der

Der 20. Satz.

Wenn drey Zahlen, A, B, C, proportionirt sind: so ist das Product aus den äuserſten, A.C, der Quadratzahl der mittelſten, B^2, gleich. Und wenn das Product aus den äuserſten, A.C, der Quadratzahl der mittelſten, B^2, gleich ist: so sind solche drey Zahlen, A, B, C, proportionirt.

Erſter Theil.

Wenn A:B = B:C. Es sey B = D. Folglich ist A:B = D:C, folglich (7, 19. S.) A.C = B.D. Nun ist B = D. Folglich ist $A.C = B^2$.

A 9 B 6 C 4

D 6

Zweyter Theil.

Wenn $A.C = B^2$. Es sey $B^2 = B.D$. Folglich ist A.C = B.D, folglich (7, 19. S.) A:B = D:C. Nun ist D = B. Folglich ist A:B = B:C.

Der 21. Satz.

Wenn eine Verhältniß in den kleinſten Zahlen, AB, CD, gegeben ist: so sind dieſelben in andern Zahlen, welche eben dieſelbe Verhältniß haben, E, F, gleichvielmal enthalten; die gröſſere, AB, nämlich in der gröſſern, E, und die kleinere, CD, in der kleinern, F.

Es ist (7, 4. S.) AB von E entweder ein Theil, oder ein vielfacher Theil. Wäre das letztre, so ist (7, 20. Def.) AB von E ein solcher vielfacher Theil, als CD von F. Geſetzt es wären AG, GB, die Theile der E in AB, und CH, HD, die Theile der F in CD, so müſten der letzten so viel, als der erſten seyn, auch wären die erſten einander gleich, und so auch die letzten, folglich AG:CH = GB:HD, folglich (7, 12. S.) AG:CH = AB:CD, folglich wären noch kleinere Zahlen AG, CH, in der gegebnen Verhältniß, welches unmöglich, weil AB, CD, die kleinſten sind. Demnach ist AB nicht ein vielfacher Theil, sondern ein Theil von E, folglich (7, 20. Def.) AB von E ein solcher Theil, als CD von F, das ist, AB in E so vielmal enthalten, als CD in F.

A 3 G 2 B

C 2 H 1 D

E 10

F 6

Der 22. Satz.

Sind drey Zahlen, A, B, C, vorhanden, und eben so viel andre, D, E, F, so daß je zwey und zwey in einerley Verhältniß sind, aber in zerstreuter Proportion: so sind solche auch gleichförmig in einerley Verhältniß.

Es ist nämlich A:B = E:F, auch B:C = D:E, und zu beweisen, daß alsdenn A:C = D:E.

Da A:B = E:F, und B:C = D:E, so ist (7, 19. S.) A.F = B.E, und B.E = C.D, folglich A.F = C.D, folglich (7, 19. S.) A:C = D:F.

A 6 D 12
B 4 E 9
C 3 F 6

Der 23. Satz.

Wenn eine Verhältniß in Zahlen, A, B, gegeben ist, welche Primzahlen zu einander sind: so ist sie in den kleinsten Zahlen gegeben.

Wären A, B, nicht die kleinsten in der gegebnen Verhältniß, so seyen es andre, C, D. Da C:D = A:B, so ist (7, 21. S.) C in A, und D in B, gleichvielmal enthalten. So vielmal dies nun ist, so viel Einheiten seyen in E. Wird daher A von C, und B von D, nach der Zahl E gemessen, so wird auch umgekehrt A von E nach der Zahl C, und B von E nach der Zahl D gemessen. Demnach würden A, B, von Einer Zahl E gemessen, welches unmöglich, weil A, B, Primzahlen zu einander sind.

A 5 B 4
C — D —
E —

Der 24. Satz.

Wenn eine Verhältniß in den kleinsten Zahlen, A, B, gegeben ist: so sind solche Primzahlen zu einander.

Wären A, B, nicht Primzahlen zu einander, so würden sie von irgend einer Zahl, etwa C, gemessen. So vielmal nun C in A enthalten ist, so viel Einheiten seyen in D, desgleichen so

vielmal

vielmal C in B enthalten, so viel Einheiten seyen in E. Folglich ist D.C = A, und E.C = B, folglich ist (7, 17. und 18. S.) D:E = A:B, welches unmöglich, weil A, B, schon die kleinsten Zahlen in der gegebnen Verhältniß sind, und also in derselben Verhältniß nicht noch kleinere, D, E, seyn können.

A 6	B 5
C —	
D —	E —

Der 25. Satz.

Wenn zwey Zahlen, A, B, Primzahlen zu einander sind, so ist die Zahl, C, von welcher die eine, A, gemessen wird, auch eine Primzahl zu der andern, B.

Wären B, C, nicht Primzahlen zu einander, so würden sie von irgend einer Zahl, etwa D, gemessen. Da D die C, und C die A mißt, so mißt auch D die A. Nun mißt sie auch die B, folglich A und B, welches (7, 12. Def.) unmöglich, weil A, B, Primzahlen zu einander sind.

A 6	B 4
C 3	D —

Der 26. Satz.

Wenn zwey Zahlen, A, B, Primzahlen zu einer dritten, C, sind: so ist auch das Product aus ihnen, D, eine Primzahl zu dieser dritten, C.

Wären C, D, nicht Primzahlen zu einander, so würden sie von irgend einer Zahl E gemessen. Nun sind A, C, Primzahlen zu einander, folglich (7, 25. S.) auch E, A. So vielmal nun E in D enthalten, so viel Einheiten seyen in F, folglich ist F.E = D. Nun ist A.B = D. Folglich ist A.B = F.E, folglich (7, 19. S.) E:A = B:F. Nun sind E, A, Primzahlen zu einander, und daher (7, 23. S.) die kleinsten in solcher Verhältniß. Folglich (7, 21. S.) mißt E die B, aber auch die C, folglich B und C, welches unmöglich, weil B, C, Primzahlen zu einander sind.

A 2	B 3
C 5	D 6
E —	F —

Der

Der 27. Satz.

Wenn zwey Zahlen, A, B, Primzahlen zu einander sind: so ist die Quadratzahl, C, der einen, A, auch eine Primzahl zu der andern, B.

Es sey $D = A$. Nun sind A, B, Primzahlen zu einander, folglich auch D, B, folglich sind A, D, Primzahlen zu B, folglich ist (7, 26. S.) A.D, das ist, C, eine Primzahl zu B.

A^2	B 3
D^2	C 4

Der 28. Satz.

Wenn zwey Zahlen, A, B, zu zweyen andern Zahlen, C, D, nämlich beyde erste zu jeder der beyden andern, Primzahlen sind: so sind auch, das Product aus den beyden ersten, E, und das Product aus den beyden andern, F, Primzahlen zu einander.

Da A, B, zu C, Primzahlen, so ist (7, 26. S.) $A.B = E$, eine Primzahl zu C, und aus gleichem Grunde E eine Primzahl zu D. Demnach sind C, D, Primzahlen zu E, folglich ist (7, 26. S.) $C.D = F$, eine Primzahl zu E.

A 3	B 5
E 15	
C 2	D 4
F 8	

Der 29. Satz.

Wenn zwey Zahlen, A, B, Primzahlen zu einander sind, und jede sich selbst multiplicirt: so sind die Producte, C, D, Primzahlen zu einander. Und wenn die zuerstgedachten Zahlen, A, B, diese Producte, C, D, wieder multipliciren: so sind die neuen Producte, E, F, auch Primzahlen zu einander. Und dies immer so fort.

Da A, B, Primzahlen zu einander, aber $A^2 = C$, so sind (7, 27. S.) C, B, Primzahlen zu einander, folglich, da $B^2 = D$, sind (7, 27. S.) A, D, sowohl, als C, D, Primzahlen zu einander. Demnach sind A, C, zu B, D, Primzahlen, folglich sind (7, 28. S.) A.C, B.D, das ist, E, F, Primzahlen zu einander.

A 2	B 3
C 4	D 9
E 8	F 27

Der

Der 30. Satz.

Wenn zwey Zahlen, AB, BC, Primzahlen zu einander sind: so ist auch ihre Summe, AC, eine Primzahl zu jeder von ihnen. Und wenn die Summe zweyer Zahlen, AC, zu einer von ihnen, AB, eine Primzahl ist: so sind die beyden Zahlen, AB, BC, Primzahlen zu einander.

Erster Theil.

Wären AC, AB, nicht Primzahlen zu einander, so würden sie von irgend einer Zahl, etwa D, gemessen. Folglich mißt D auch den Rest, BC, aber auch AB, folglich AB, BC, welches unmöglich, weil AB, BC, Primzahlen zu einander sind.

A 5 B 4 C

D —

Zweyter Theil.

Wären AB, BC, nicht Primzahlen zu einander, so würden sie von irgend einer Zahl, etwa D, gemessen. Folglich mißt D auch AC, aber auch AB, folglich AC, AB, welches unmöglich, weil AC, AB, Primzahlen zu einander sind.

Der 31. Satz.

Jede Primzahl, A, ist zu jeder Zahl, B, welche sich von ihr nicht messen läßt, eine Primzahl.

Wären A, B, nicht Primzahlen zu einander, so würden sie von irgend einer Zahl, C, gemessen. Nun wird B von C, aber nicht von A gemessen, folglich sind A, C, verschiedne Zahlen, folglich kann A, als eine Primzahl, von C nicht gemessen werden.

A 3 B 5

C —

Der 32. Satz.

Wenn das Product, C, aus zweyen Zahlen, A, B, von einer Primzahl, D, sich messen läßt: so läßt sich von derselben auch eine der beyden Zahlen messen.

Mißt D nicht die A, so sind (7, 31. S.) A, D, Primzahlen zu einander. So vielmal nun D in C enthalten, so viele Einheiten seyen in E. Demnach ist D.E = C, und es war A.B = C. Folglich ist A.B = D.E, folglich (7, 19. S.) D:A = B:E. Nun sind D, A, Primzahlen zu einander, folglich (7, 23. S.) die kleinsten in solcher Verhältniß, folglich (7, 21. S.) mißt D die B. Eben so wird bewiesen, wenn D nicht die B mißt, daß sie alsdenn die A messe.

A 2 B 6
C 12
D 3 E 4

Der 33. Satz.

Jede zusammengesetzte Zahl, A, läßt sich von irgend einer Primzahl messen.

Da A zusammengesetzt, so wird sie von irgend einer Zahl, B, gemessen. Ist B eine Primzahl, so ist der Satz klar. Ist aber B zusammengesetzt, so wird sie von irgend einer Zahl C gemessen, welche folglich auch die A mißt. Ist nun C eine Primzahl, so ist der Satz klar. Ist C aber zusammengesetzt, so gehen die vorigen Schlüsse weiter, bis man auf eine Primzahl kommt, welche die ihr vorgehende, und folglich auch die A, mißt. Denn käme man auf keine Primzahl, so würde die A von unendlich vielen Zahlen gemessen, von denen die folgende immer kleiner als die vorgehende wäre, welches (7, 2. Def.) bey Zahlen unmöglich ist.

A 8
B 4 C 2

Ein andrer Beweis. Es sey B die kleinste unter den Zahlen, von welchen A sich messen läßt, so ist B eine Primzahl. Denn wäre sie keine Primzahl, so würde sie von irgend einer Zahl, C, gemessen, so daß also C < B. Nun mißt B die A, und C die B, folglich mißt C die A, welches unmöglich, da B schon die kleinste ist.

A 9
B 3 C —

Der 34. Satz.

Jede Zahl, A, ist entweder eine Primzahl, oder läßt sich von irgend einer Primzahl messen.

Denn

Denn A ist entweder eine Primzahl, oder eine zusammengesetzte Zahl, und läßt sich, im zweyten Fall, (7, 33. S.) von irgend einer Primzahl messen. | A

Der 35. Satz.

Es sind mehrere Zahlen, A, B, C, gegeben: man soll ihre Verhältniß in den kleinsten Zahlen finden.

Sind A, B, C, Primzahlen zu einander, so sind sie (7, 23. S.) die kleinsten Zahlen in solcher Verhältniß. Sind sie es aber nicht, so nimm (7, 3. S.) ihr gröstes gemeinschaftliches Maaß, D. So vielmal nun D in jeder der Zahlen, A, B, C, enthalten, so viel Einheiten seyen in jeder der Zahlen, E, F, G. Demnach werden die erstern von den letztern nach einerley Zahl D gemessen, und sind also (7, 18. S.) die letztern, E, F, G, in derselben Verhältniß, wie die erstern, A, B, C. Daß sie aber auch die kleinsten in solcher Verhältniß sind, wird so bewiesen: Wären sie es nicht, so seyen noch kleinere, H, K, L, von denen daher (7, 21. S.) A, B, C, nach einerley Zahl, M, gemessen werden müssen. Folglich mißt M die A, B, C, und es ist M.H = A. Nun ist auch aus eben dem Grunde D.E = A. Folglich ist M.H = D.E, folglich (7, 19. S.) E:H = M:D. Nun ist E > H. Folglich ist M > D, welches unmöglich, weil D schon das gröste gemeinschaftliche Maaß von A, B, C, ist.

A 6	B 8	C 10
	D 2	
E 3	F 4	G 5
H —	K —	L —
	M —	

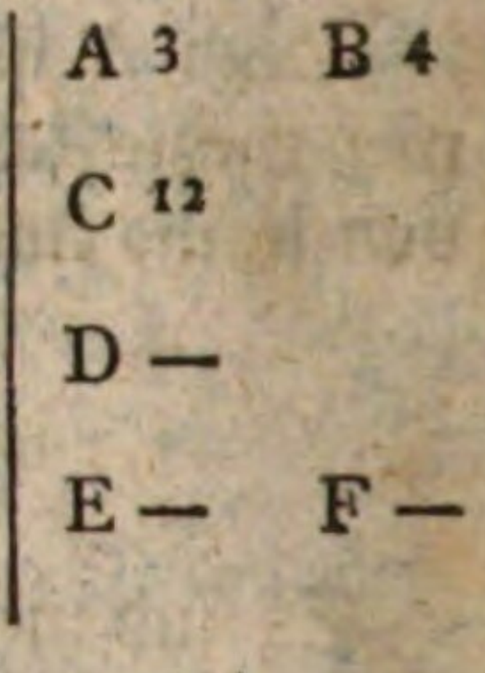
Der 36. Satz.

Es sind zwey Zahlen, A, B, gegeben: man soll die kleinste ihnen meßbare Zahl finden.

Erster Fall.

Wenn A, B, Primzahlen zu einander sind. Es sey A.B = C, folglich läßt sich C von A und B messen. Sie ist aber auch die

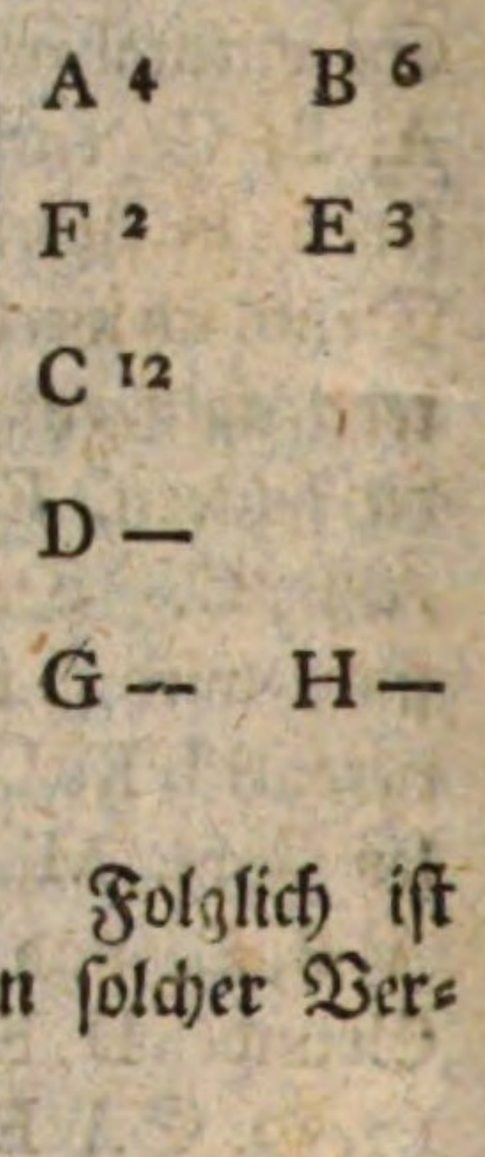
kleinste Zahl. Denn wäre eine kleinere D, so werde sie von A und B nach den Zahlen, E, F, gemessen, folglich wäre A.E = D, und B.F = D, folglich A.E = B.F, folglich (7, 19. S.) A:B = F:E. Nun sind A, B, Primzahlen zu einander, folglich (7, 23. S.) die kleinsten in solcher Verhältniß, folglich (7, 21. S.) mißt B die E.



Es war A.B = C, und A.E = D, folglich ist (7, 18. S.) B:E = C:D. Nun mißt B die E. Folglich mißt C die D, welches unmöglich, weil C > D.

Zweyter Fall.

Wenn A, B, nicht Primzahlen zu einander sind. Nimm (7, 35. S.) die kleinsten in solcher Verhältniß, F, E, folglich ist (7, 19. S.) A.E = B.F = C, folglich läßt C von A und B sich messen. Sie ist aber auch die kleinste Zahl. Denn wär eine kleinere, D, so werde sie von A und B nach den Zahlen, G, H, gemessen, folglich wäre A.G = D, und B.H = D, folglich A.G = B.H, folglich (7, 19. S.) A:B = H:G. Nun war A:B = F:E. Folglich ist F:E = H:G. Nun sind E, E, die kleinsten in solcher Verhältniß. Folglich (7, 21. S.) mißt E die G.



Es war A.E = C, und A.G = D, folglich ist (7, 17. S.) E:G = C:D. Nun mißt E die G. Folglich (7, 20. Def.) mißt C die D, welches unmöglich, weil C > D.

Der 37. Satz.

Eine Zahl, AB, welche von zweyen andern, C, D, gemessen wird, läßt sich auch von der solchen beyden meßbaren kleinsten Zahl, E, messen.

Lieſſe

Liesse sich AB von E nicht messen, so messe E die AF und lasse zum Rest FB < E. Nun messen C, D, die E, und E mißt die AF. Folglich messen C, D, die AF, aber auch die ganze AB, folglich auch den Rest, FB < E, welches unmöglich, weil E schon die kleinste ihnen meßbare Zahl ist.

A 6 F B
C 2 D 3
E 6

Der 38. Satz.

Es sind drey Zahlen, A, B, C, gegeben: man soll die kleinste ihnen meßbare Zahl finden.

Suche (7, 36. S.) die den beyden Zahlen, A, B, meßbare kleinste Zahl, D, so wird solche von C entweder auch gemessen, oder nicht gemessen.

Erster Fall.

Wird D von C gemessen, so ist sie allen dreyen meßbar; aber auch die kleinste. Denn wäre eine kleinere, E, so würde solche von A, B, folglich (7, 37. S.) auch von D gemessen, welches unmöglich, weil D > E.

A 3 B 4 C 6
D 12 E —

Zweyter Fall.

Wird D von C nicht gemessen, so nimm (7, 36. S.) die den beyden, D, C, meßbare kleinste Zahl, E. Da E von D, und D von A, B, gemessen wird, so wird E von A, B, gemessen, aber auch von C, folglich ist E den dreyen, A, B, C, meßbar. Sie ist aber auch die kleinste. Denn wär eine kleinere F, so würde solche von A, B, folglich (7, 37. S.) auch von D gemessen, nun aber auch von C, folglich (7, 37. S.) auch von E, welches unmöglich, weil E > F.

A 2 B 3 C 4
D 6
E 12 F —

Der 39. Satz.

Wird eine Zahl, A, von einer andern, B, gemessen: so hat sie einen der messenden Zahl gleichnamigen Theil, C.

So vielmal B in A enthalten, so viel Einheiten seyen in C. Nun ist die Einheit D in C auch so vielmal enthalten, als in C Einheiten sind. Folglich ist D in C so vielmal, als B in A, folglich (7, 15. S.) **verwechselt**, D in B so vielmal, als C in A. Nun ist D ein der B gleichnamiger Theil von B. Folglich ist auch C ein der B gleichnamiger Theil von A.

A 12	B 3
C 4	D 1

Der 40. Satz.

Jede Zahl, A, wird von der, jedem ihrer Theile, B, gleichnamigen Zahl, C, gemessen.

Da B ein der C gleichnamiger Theil von A, und die Einheit D auch ein der C gleichnamiger Theil von C ist, so ist D in C so vielmal, als B in A, folglich (7, 15. S.) **verwechselt** D in B so vielmal, als C in A, folglich wird A von C gemessen.

A 12	B 2
C 6	D 1

Der 41. Satz.

Eine Zahl zu finden, welche unter allen Zahlen, so die gegebnen Theile, A, B, C, haben, die kleinste sey.

Es seyen die Zahlen, D, E, F, den gegebnen Theilen, A, B, C, gleichnamig. Auch sey G die solchen Zahlen, D, E, F, meßbare kleinste Zahl. Da G von D, E, F, gemessen wird, so hat sie (7, 39. S.) solchen messenden Zahlen gleichnamige Theile. Diese sind A, B, C. Folglich hat G die gegebnen Theile, A, B, C. Sie ist aber auch die kleinste. Denn wär eine kleinere, H, welche die Theile A, B, C, hätte, so würde (7, 40. S.) solche von Zahlen, die ihren Theilen gleichnamig sind, das ist, von D, E, F, gemessen, welches unmöglich, weil $H < G$, und G schon die den Zahlen D, E, F, meßbare kleinste Zahl ist.

A $\frac{1}{2}$	D 2
B $\frac{1}{3}$	E 3
C $\frac{1}{4}$	F 4
G 12	H —

Euklids Elemente

Achtes Buch.

Der 1. Satz.

Mehrere ſtetig proportionirte Zahlen, A, B, C, D, deren äuſerſte Glieder A, D, Primzahlen zu einander, ſind die kleinſten Zahlen in ſolcher Verhältniß.

Wären ſie nicht die kleinſten, ſo ſeyen kleinere, E, F, G, H, folglich wäre (7, 14. S.) gleichförmig A:D = E:H. Nun ſind A, D, Primzahlen zu einander, folglich die kleinſten in ſolcher Verhältniß, folglich (7, 21. S.) mißt A die E, welches unmöglich, weil A > E.

A 8	B 12	C 18	D 27
E —	F —	G —	H —

Der 2. Satz.

Es iſt eine Verhältniß in den kleinſten Zahlen, A, B, gegeben: man ſoll mehrere ſtetig proportionirte kleinſte Zahlen in ſolcher Verhältniß finden.

Es ſey $A^2 = C$, $A.B = D$, $B^2 = E$. Folglich iſt (7, 17. S.) A:B = C:D, und A:B = D:E, folglich C:D = D:E. Demnach ſind C, D, E, drey ſtetig proportionirte Zahlen in der Verhältniß A:B.

A 2	B 3		
C 4	D 6	E 9	
F 8	G 12	H 18	K 27

Ferner werde jede der Zahlen, C, D, E, von A multiplicirt, und es seyen die Producte, F, G, H, auch sey E.B = K. Folglich ist (7, 17. und 18. S.) C:D = F:G, D:E = G:H, A:B = H:K.

A 2	B 3		
C 4	D 6	E 9	
F 8	G 12	H 18	K 27

Nun war C:D = D:E = A:B. Folglich ist F:G = G:H = H:K. Demnach sind F, G, H, K, vier stetig proportionirte Zahlen in der Verhältniß A:B.

Auf gleiche Art fährt man fort, wenn mehr als vier stetig proportionirte Zahlen in der gegebnen Verhältniß verlangt werden.

Da A, B, die kleinsten Zahlen in der gegebnen Verhältniß, folglich (7, 23. S.) Primzahlen zu einander sind: so sind (7, 29. S.) auch C, E, so wie F, K, Primzahlen zu einander, folglich sind (8, 1. S.) sowohl C, D, E, als F, G, H, K, und alle weitere, stetig proportionirte kleinste Zahlen in der Verhältniß A:B.

Zusatz.

Hieraus erhellet: daß die äussersten Glieder von drey stetig proportionirten kleinsten Zahlen, Quadratzahlen; von vieren aber, Kubikzahlen sind.

Der 3. Satz.

Wenn mehrere stetig proportionirte Zahlen, A, B, C, D, die kleinsten in solcher Verhältniß sind: so sind ihre äussersten Glieder, A, D, Primzahlen zu einander.

Nimm (7, 35. S.) die zwey kleinsten Zahlen, E, F, in der gegebnen Verhältniß, und (8, 2. S.) drey stetig proportionirte kleinste Zahlen in eben derselben Verhältniß, G, H, K, hierauf vier solcher Zahlen, L, M, N, O, bis derselben so viel

A 8	B 12	C 18	D 27
E 2	F 3		
G 4	H 6	K 9	
L 8	M 12	N 18	O 27

sind,

sind, als A, B, C, D. Da E, F, Primzahlen zu einander sind, so sind (7, 29. S.) sowohl G, K, als L, O, Primzahlen zu einander. Nun sind A, B, C, D, sowohl, als L, M, N, O, vier stetig proportionirte kleinste Zahlen in einerley Verhältniß, folglich einander gleich, folglich A = L, und D = O. Nun waren L, O, Primzahlen zu einander, folglich auch A, D.

Der 4. Satz.

Es sind mehrere Verhältnisse in den kleinsten Zahlen gegeben, A:B, C:D, E:F; man soll stetig proportionirte kleinste Zahlen in solchen Verhältnissen finden.

Nimm (7, 36. S.) die den beyden B, C, meßbare kleinste Zahl, G. Nun sey A in H so vielmal, als B in G, und D in K so vielmal, als C in G, so wird K von E entweder gemessen, oder nicht.

Erster Fall.

Es werde K von E gemessen, und es sey F in L so vielmal, als E in K. Da A in H so vielmal, als B in G, so ist (7, 13. S.) A:B = H:G, aber auch

A 2 B 5 C 3 D 4 E 5 F 6

H 6 G 15 K 20 L 24

N — O — M — P —

aus gleichem Grunde C:D = G:K, und E:F = K:L. Folglich sind H, G, K, L, stetig proportionirte Zahlen in den gegebnen Verhältnissen. Sie sind aber auch die kleinsten. Denn wären kleinere, N, O, M, P, so wäre A:B = N:O. Nun sind A, B, die kleinsten in solcher Verhältniß. Folglich (7, 21. S.) mißt B die O. Aus gleichen Gründen mißt auch C die O. Demnach messen B, C, die O, folglich wird (7, 37. S.) die kleinste den beyden B, C, meßbare Zahl, das ist, G, auch die O messen, welches unmöglich, weil G > O.

Zweyter Fall.

Es werde K von E nicht gemessen. Nimm (7, 36. S.) die den beyden, K, E, meßbare kleinste Zahl, M. Nun sey H in N, und

A 4 B 5 C 2 D 3 E 4 F 3

H 8 G 10 K 15

N 32 O 40 M 60 P 45

Q — R — S — T —

und G in O so vielmal, als K in M; ferner F in P so vielmal, als E in M. Folglich ist (7, 13. S.) H:G, das ist A:B, = N:O. Aus gleichem Grunde ist auch C:D = O:M, und E:F = M:P. Folglich sind N, O, M, P, stetig proportionirte Zahlen in den gegebnen Verhältnissen. Sie sind aber auch die kleinsten. Denn wären kleinere Q, R, S, T, so wäre A:B = Q:R. Nun sind A, B, die kleinsten Zahlen in solcher Verhältniß. Folglich (7, 21. S.) mißt B die R. Aus gleichem Grunde mißt auch C die R. Demnach messen, B, C, die R, folglich (7, 37. S.) wird auch die den beyden, B, C, meßbare kleinste Zahl, G, diese R messen. Nun ist (7, 37. S.) G:R = K:S. Folglich (7, 20. Def.) mißt K die S. Nun mißt auch E die S. Demnach messen K, E, die S, folglich (7, 37. S.) wird die den beyden K, E, meßbare kleinste Zahl, M, auch die S messen, welches unmöglich, weil M > S.

Der 5. Satz.

Flächenzahlen, A, B, sind in zusammengesetzter Verhältniß ihrer Seiten.

A 6 B 20

L 12

C 2 D 3 E 4 F 5

G 3 H 6 K 10

Es sey A = C.D, und B = E.F. Suche in den gegebnen Verhältnissen C:E, und D:F, (8, 4. S.) die stetig proportionirten kleinsten Zahlen, G, H, K, so daß C:E = G:H, und D:F = H:K. Nun sey E.D = L. Folglich, weil C.D = A, ist (7, 17. S.) C:E, das ist G:H, = A:L.

Da E.D = L, und E.F = B, so ist (7, 17. S.) D:F, das ist H:K, = L:B. Nun war G:H = A:L. Folglich ist (7, 14. S.) gleichförmig G:K = A:B. Nun ist (6, 5. Def.) G:K, aus G:H, und H:K, das ist, aus C:E, und D:F, zusammengesetzt. Folglich ist auch A:B, aus C:E, und D:F, das ist, aus ihren Seiten, zusammengesetzt.

Der

Der 6. Satz.

Wenn mehrere Zahlen, A, B, C, D, E, stetig proportionirt sind, und die zweyte, B, von der ersten, A, sich nicht messen läßt: so läßt sich auch derselben keine von irgend einer messen.

Erster Fall.

Wenn man die Zahlen nimmt, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, so ist zu beweisen, daß C von B sich nicht messen lasse.

A 16 B 24 C 36 D 54 E 81

F 4 G 6 H 9

Denn wäre dies, so müste, weil A:B = B:C, auch B von A sich messen lassen, welches gegen das Angenommene ist.

Zweyter Fall.

Wenn man die Zahlen ausser der Ordnung nimmt, so ist zu beweisen, daß C von A sich nicht messen lasse. Suche (7, 35. S.). zu A, B, C, die stetig proportionirten kleinsten Zahlen, F, G, H, so ist (7, 14. S.) gleichförmig, A:C = F:H.

Da A:B = F:G, aber A die B nicht mißt, so mißt auch F die G nicht, folglich ist F nicht die Einheit. Nun sind (8, 3. S.) F, H, Primzahlen zu einander. Folglich mißt F die H nicht. Nun war F:H = A:C. Folglich mißt auch A die C nicht.

Der 7. Satz.

Wenn mehrere Zahlen, A, B, C, D, stetig proportionirt sind, und die letzte D, von der ersten, A, sich messen läßt: so läßt sich auch die zweyte, B, von ihr messen.

Denn wäre dies nicht, so liesse sich (8, 6. S.) keine der gegebnen Zahlen von der ersten messen, welches gegen das Angenommene, daß D von A sich messen läßt.

A 2 B 4 C 8 D 16

Der 8. Satz.

So viel mittlere Proportionalzahlen zwischen zweyen Zahlen, A, B, sind: so viel sind deren auch zwischen zweyen andern Zahlen, E, F, welche dieselbe Verhältniß haben.

A 2	C 4	D 8	B 16
G 1	H 2	K 4	L 8
E 3	M 6	N 12	F 24

Zwischen A, B, seyen zwey mittlere Proportionalzahlen, C, D, folglich A, C, D, B, stetig proportionirt. Suche (7, 35. S.) in dieser Verhältniß die kleinsten Zahlen, G, H, K, L, so sind (8, 3. S.) G, L, Primzahlen zu einander, und (7, 14. S.) gleichförmig A:B = G:L. Nun ist A:B = E:F. Folglich G:L = E:F. Nun sind G, L, Primzahlen zu einander, folglich (7, 23. S.) die kleinsten in solcher Verhältniß, folglich ist (7, 21. S.) G in E so vielmal, als L in F. Nun sey H in M, und K in N so vielmal, als G in E. Folglich sind (7, 20. Def.) G, H, K, L, und E, M, N, F, in einerley Verhältniß, folglich sind auch diese, so wie jene, in der Verhältniß A, C, D, B, folglich auch stetig proportionirt. Auch sind zwischen E, F, so viel mittlere Proportionalzahlen, M, N, so viel deren C, D, zwischen A, B, sind.

Der 9. Satz.

So viel mittlere Proportionalzahlen zwischen zweyen Zahlen, A, B, welche Primzahlen zu einander sind: so viel sind deren auch zwischen der Einheit, E, und jeder der beyden Zahlen, A, B.

A 8	C 12	D 18	B 27
	E 1		
	F 2	G 3	
	H 4	K 6	I. 9
M 8	N 12	O 18	P 27

Es seyen A, C, D, B, stetig proportionirt, folglich zwischen A, B, zwey mittlere Proportionalzahlen, C, D. Suche (8, 2. S.) die kleinsten Zahlen in der gegebnen Verhältniß, A, C, D, B, und zwar erst zwey, F, G, dann drey, H, K, L, und so fort immer eine mehr, bis deren so viel sind, als A, C, D, B.

Sie

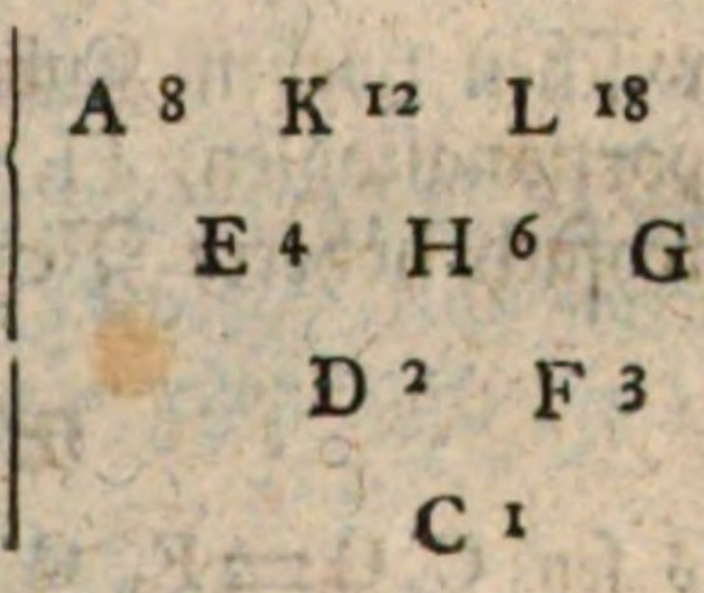
Sie seyen M, N, O, P, welche, so wie jene, die kleinsten in der Verhältniß, F:G, folglich jenen gleich sind, folglich M = A, und P = B. Auch ist (8, 2. S.) F.F = H, F.H = M, G.G = L, G.L = P. Folglich ist (7, 20. Def.) E:F = F:H, und E:F = H:M. Nun ist M = A. Folglich ist E:F = F:H = H:A, das ist, E, F, H, A, stetig proportionirt. Demnach sind zwischen der Einheit, E, und der einen Zahl, A, auch zwey mittlere Proportionalzahlen, F, H.

Eben so wird bewiesen, daß auch E:G = G:L = L:B, oder daß E, G, L, B, stetig proportionirt, folglich zwischen E und B auch zwey mittlere Proportionalzahlen, G, L, sind.

Der 10. Satz.

So viel mittlere Proportionalzahlen zwischen zweyen Zahlen, A, B, und der Einheit, C, sind: so viel sind deren auch zwischen den beyden Zahlen, A, B, selber.

Es seyen C, D, E, A, und C, F, G, B, stetig proportionirt, auch sey D.F = H, D.H = K, F.H = L. Da C:D = D:E, und C:D = E:A, so ist D.D = E, und D.E = A. Eben so ist F.F = G, und F.G = B.



Da D.D = E, und D.F = H, so ist (7, 17. S.) D:F = E:H, aber eben so D:F = H:G, folglich E:H = H:G.

Da D.E = A, und D.H = K, so ist (7, 17. und 18. S.) A:K = E:H = D:F, aber eben so D:F = K:L, folglich A:K = K:L.

Da F.G = B, und F.H = L, so ist L:B = H:G = D:F, aber D:F = A:K = K:L, folglich A:K = K:L = L:B. Demnach sind A, K, L, B, stetig proportionirt, und zwischen A, B, auch zwey mittlere Proportionalzahlen, K, L.

Der

Der 11. Satz.

Zwischen zweyen Quadratzahlen, A, B, ist Eine mittlere Proportionalzahl, E. Auch sind Quadratzahlen, A, B, in zwiefach höherer Verhältniß ihrer Seiten, C, D.

Erster Theil.

Es sey $C.D = E$. Nun ist $C.C = A$ und $D.D = B$, folglich (7, 17. und 18. S.) $C:D = A:E$, und $C:D = E:B$, folglich $A:E = E:B$, das ist, A, E, B, stetig proportionirt.

A 4 E 6 B 9

C 2 D 3

Zweyter Theil.

Da A, E, B, stetig proportionirt, so ist $A:B = (A:E)^2$. Nun ist $C:D = A:E$. Folglich ist $A:B = (C:D)^2$.

Der 12. Satz.

Zwischen zweyen Kubikzahlen, A, B, sind zwey mittlere Proportionalzahlen, H, K. Auch sind Kubikzahlen, A, B, in dreyfach höherer Verhältniß ihrer Seiten, C, D.

Erster Theil.

Es sey $C.C = E$, $C.D = F$, $D.D = G$, $C.F = H$, $D.F = K$. Auch ist $A = C^3 = C.E$ und $B = D^3 = D.G$. Folglich ist (7, 17. 18. S.) $C:D = E:F$, und $C:D = F:G$, desgleichen $E:F = A:H$, $C:D = H:K$, $F:H = K:B$. Folglich ist $A:H = H:K = K:B$, das ist, A, H, K, B, stetig proportionirt.

A 8 H 12 K 18 B 27

E 4 F 6 G 9

C 2 D 3

Zweyter Theil.

Da A, H, K, B, stetig proportionirt, so ist $A:B = (A:H)^3$. Nun ist $C:D = A:H$, folglich ist $A:B = (C:D)^3$.

Der

Der 13. Satz.

Wenn mehrere Zahlen, A, B, C, stetig proportionirt sind, und jedwede sich selbst multiplicirt: so sind die Producte, D, E, F, auch proportionirt. Und wenn die zuerstgedachten Zahlen diese Producte wieder multipliciren: so sind auch die neuen Producte, G, H, K, proportionirt. Und dies immer so fort.

Es sey A.B = L, A.L = M, B.L = N. Auch sey B.C = O, B.O = P, C.O = Q, so läßt sich wie zuvor beweisen, daß D, L, E,

		A 2	B 4	C 8	
D 4	L 8	E 16	O 32	F 64	
G 8	M 16	N 32	H 64	P 128	Q 256 K 512

und G, M, N, H, in der Verhältniß A:B, auch E, O, F, und H, P, Q, K, in der Verhältniß B:C, stetig proportionirt sind. Nun ist A:B = B:C, folglich sind D, L, E, und E, O, F, auch G, M, N, H, und H, P, Q, K, in einerley Verhältniß, folglich ist (7, 14. S.) gleichförmig D:E = E:F, und G:H = H:K.

Der 14. Satz.

Wenn Quadratzahlen, A, B, einander messen; so werden auch ihre Seiten, C, D, einander messen. Und wenn die Seiten, C, D, einander messen; so werden auch die Quadratzahlen, A, B, einander messen.

Es sey C.D = E, so sind A, E, B, stetig proportionirt in der Verhältniß C:D. Nun mißt A die B, folglich (8, 7. S.) mißt auch A die E. Nun ist A:E = C:D. Folglich (7, 20. Def.) mißt C die D.

A 4	E 8	B 16
C 2	D 4	

Da C:D = A:E, und C die D mißt: so mißt A die E, folglich auch die B.

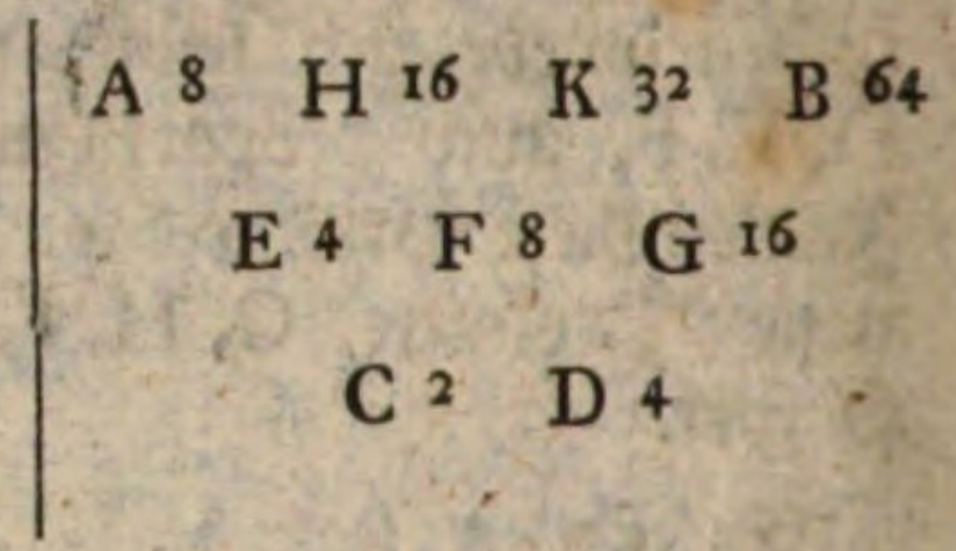
Der 15. Satz.

Wenn Kubikzahlen, A, B, einander messen: so werden auch ihre Seiten, C, D, einander messen. Und wenn die

Seiten

Seiten C, D, einander messen: so werden auch die Kubikzahlen, A, B, einander messen.

Es sey C.C = E, C.D = F, D.D = G, C.F = H, D.F = K, so sind E, F, G, und A, H, K, B, stetig proportionirt in der Verhältniß C:D. Nun mißt A die B. Folglich (8, 7. S.) mißt A auch die H. Nun ist A:H = C:D. Folglich mißt C die D.

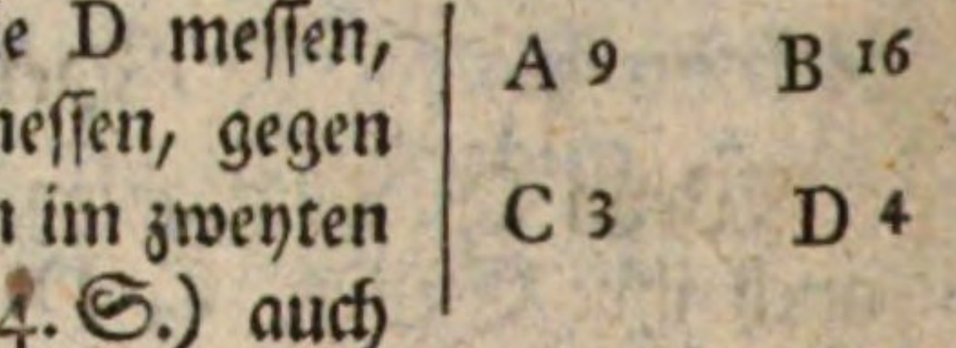


Da C:D = A:H, und C die D mißt, so mißt A die H, folglich auch die B.

Der 16. Satz.

Wenn Quadratzahlen, A, B, einander nicht messen: so messen auch ihre Seiten, C, D, einander nicht. Und wenn die Seiten, C, D, einander nicht messen: so messen auch die Quadratzahlen, A, B, einander nicht.

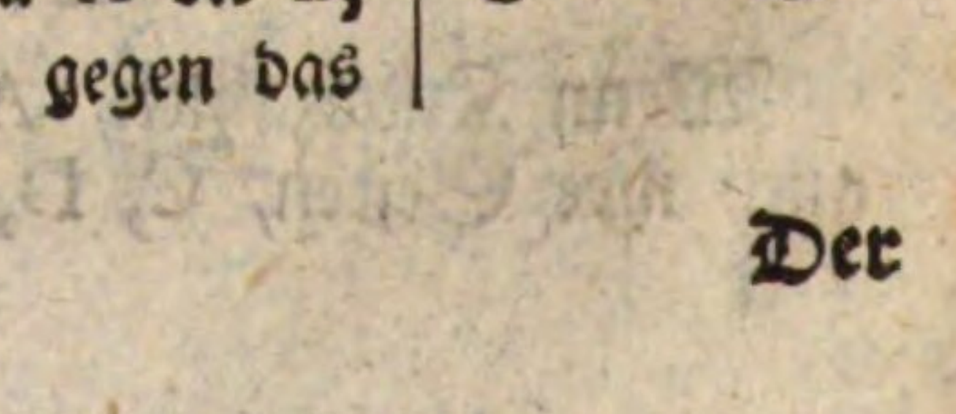
Denn würde im ersten Fall C die D messen, so müste (8, 14. S.) auch A die B messen, gegen das Angenommene. Eben so, wenn im zweyten Fall A die B mässe, so müste (8, 14. S.) auch C die D messen, gegen das Angenommene.



Der 17. Satz.

Wenn Kubikzahlen, A, B, einander nicht messen: so messen auch ihre Seiten, C, D, einander nicht. Und wenn die Seiten, C, D, einander nicht messen: so messen auch die Kubikzahlen, A, B, einander nicht.

Denn mässe im ersten Fall C die D, so mässe (8, 15. S.) auch A die B, gegen das Angenommene. Und mässe im zweyten Fall A die B, so mässe (8, 15. S.) auch C die D, gegen das Angenommene.



Der

Der 18. Satz.

Zwischen zweyen ähnlichen Flächenzahlen, A, B, ist Eine mittlere Proportionalzahl, G. Auch sind ähnliche Flächenzahlen, A, B, in zwiefach höherer Verhältniß ihrer homologen Seiten.

Es sey $A = C.D$, $B = E.F$. Da $A \sim B$, so ist (7, 21. Def.) $C:D = E:F$, folglich (7, 13. S.) $C:E = D:F$. Nun sey auch $D.E = G$, so ist (7, 17. S.) $C:E = A:G$, und $D:F = G:B$. Folglich ist $A:G = G:B$, das ist, A, G, B, stetig proportionirt, folglich $A:B = (A:G)^2$. Nun ist $A:G = C:E = D:F$. Folglich ist $A:B = (C:E)^2 = (D:F)^2$.

A 6 G 12 B 24

C 2 D 3 E 4 F 6

Der 19. Satz.

Zwischen zweyen ähnlichen Körperzahlen, A, B, sind zwey mittlere Proportionalzahlen, N, O. Auch sind ähnliche Körperzahlen, A, B, in dreyfach höherer Verhältniß ihrer homologen Seiten.

Es sey $A = C.D.E$, und $B = F.G.H$. Da $A \sim B$, so ist (7, 21. Def.) $C:D = F:G$, und $D:E = G:H$, folglich auch $C:F = D:G = E:H$.

A 30 N 60 O 120 B 240

K 6 M 12 L 24

C 2 D 3 E 5 F 4 G 6 H 10

Es sey $C.D = K$, und $F.G = L$. Nun ist $C:D = F:G$. Folglich sind K, L, ähnliche Flächenzahlen, folglich ist (8, 18. S.) zwischen K, L, Eine mittlere Proportionalzahl, $M = D.F$, folglich sind K, M, L, stetig proportionirt, und zwar, weil (7, 17. S.) $C:F = K:M$, in der Verhältniß, C:F. Demnach ist $K:M = M:L = C:F = D:G = E:H$.

Es sey $E.M = N$, und $H.M = O$. Auch ist $A = C.D.E = E.K$, und $B = F.G.H = H.L$. Folglich ist (7, 17. S.) $K:M = A:N$, $E:H = N:O$, $M:L = O:B$. Nun war $K:M = E:H = M:L$. Folglich ist $A:N = N:O = O:B$.

Demnach sind A, N, O, B, stetig proportionirt in der Verhältniß, C:F. Folglich ist $A:B=(A:N)^3$. Nun ist $A:N=C:F=D:G=E:H$. Folglich ist $A:B=(C:F)^3=(D:G)^3=(E:H)^3$.

A 30 N 60 O 120 B 240

K 6 M 12 L 24

C 2 D 3 E 5 F 4 G 6 H 10

Der 20. Satz.

Zwey Zahlen, A, B, zwischen denen Eine mittlere Proportionalzahl, C, sind ähnliche Flächenzahlen.

Nimm (7, 35. S.) in der Verhältniß, A:C, die kleinsten Zahlen, D, E, so ist D in A so vielmal, als E in C. So vielmal nun D in A enthalten, so viel Einheiten seyen in F. Folglich ist $D.F=A$, und $E.F=C$. Demnach ist A eine Flächenzahl, deren Seiten D, F.

A 8 C 12 B 18

D 2 E 3 F 4 G 6

Da $A:C=C:B$, so sind auch D, E, die kleinsten in der Verhältniß, C:B, folglich ist D in C so vielmal, als E in B. So vielmal nun D in C enthalten, so viel Einheiten seyen in G. Folglich ist $E.G=B$. Demnach ist auch B eine Flächenzahl, deren Seiten, E, G.

Da (7, 17. 18. S.) $F:G=C:B=D:E$, so sind (7, 21. Def.) A, B, ähnliche Flächenzahlen.

Der 21. Satz.

Zwey Zahlen, A, B, zwischen denen zwey mittlere Proportionalzahlen, C, D, sind ähnliche Körperzahlen.

In der Verhältniß der A, C, D, nimm (7, 35. S.) die kleinsten Zahlen, E, F, G, so sind (8, 3. S.) E, G, Primzahlen zu einander,

A 24 C 72 D 216 B 648

E 1 F 3 G 9

H 1 K 1 N 24 L 3 M 3 O 72

der,

der, aber auch (8, 20. S.) ähnliche Flächenzahlen. Nun sey E = H.K, und G = L.M. Folglich sind E, F, G, stetig proportionirt in der Verhältniß, H:L, und K:M.

Da E, F, G, und A, C, D, in einerley Verhältniß, so ist (7, 14. S.) gleichförmig E:G = A:D. Nun sind E, G, Primzahlen zu einander. Folglich ist E in A so vielmal, als G in D. So vielmal nun E in A, so viel Einheiten seyen in N. Folglich ist A = E.N = H.K.N. Demnach ist A eine Körperzahl, deren Seiten H, K, N.

Da E, F, G, die kleinsten in der Verhältniß, C, D, B, so ist E in C so vielmal, als G in B. So vielmal nun G in B, so viel Einheiten seyen in O. Folglich ist B = G.O = L.M.O. Demnach ist auch B eine Körperzahl, deren Seiten L, M, O.

Nun ist (7, 17. S.) N:O = A:C = E:F = H:L = K:M. Folglich sind (7, 21. Def.) A, B, ähnliche Körperzahlen.

Der 22. Satz.

Wenn drey Zahlen, A, B, C, stetig proportionirt sind, und die erste, A, eine Quadratzahl ist: so ist auch die dritte, C, eine Quadratzahl.

Da zwischen A, C, Eine mittlere Proportionalzahl ist, so sind (8, 20. S.) A, C, ähnliche Flächenzahlen, folglich ist C, so wie A, eine Quadratzahl.

A 4 B 6 C 9

Der 23. Satz.

Wenn vier Zahlen, A, B, C, D, stetig proportionirt sind, und die erste, A, eine Kubikzahl ist: so ist auch die vierte, D, eine Kubikzahl.

Da zwischen A, D, zwey mittlere Proportionalzahlen sind, so sind (8, 21. S.) A, D, ähnliche Körperzahlen, folglich ist D, so wie A, eine Kubikzahl.

A 8 B 12 C 18 D 27

Der 24. Satz.

Wenn zwey Zahlen, A, B, sich wie Quadratzahlen, C, D, zu einander verhalten, und die erste, A, eine Quadratzahl ist: so ist auch die zweyte, B, eine Quadratzahl.

A 4 B 9 C 16 D 36

Da C, D, Quadrate, folglich ähnliche Flächenzahlen, so ist (8, 18. S.) zwischen C, D, Eine mittlere Proportionalzahl. Nun ist C:D = A:B. Folglich ist (8, 8. S.) auch zwischen A, B, Eine mittlere Proportionalzahl, aber A eine Quadratzahl; folglich (8, 22. S.) auch B.

Der 25. Satz.

Wenn zwey Zahlen, A, B, sich wie Kubikzahlen, C, D, zu einander verhalten, und die erste, A, eine Kubikzahl ist: so ist auch die zweyte, B, eine Kubikzahl.

A 8 E 12 F 18 B 27 C 64 D 216

Da C, D, Kubikzahlen, so sind (8, 19. S.) zwischen ihnen zwey mittlere Proportionalzahlen. Nun ist C:D = A:B. Folglich sind (8, 8. S.) auch zwischen A, B, zwey mittlere Proportionalzahlen, E, F. Nun ist A eine Kubikzahl, folglich (8, 23. S.) auch B.

Der 26. Satz.

Aenliche Flächenzahlen, A, B, verhalten sich wie Quadratzahlen, D, F.

A 6 C 12 B 24 D 1 E 2 F 4

Zwischen A, B, ist (8, 18. S.) Eine mittlere Proportionalzahl, C. Nimm (7, 35. S.) in der Verhältniß A, C, B, die kleinsten D, E, F, so sind (8, 2. Zus.) D, F, Quadratzahlen. Es ist aber D:F = A:B.

Der

Der 27. Satz.

Aenliche Körperzahlen, A, B, verhalten sich wie Kubikzahlen, E, H,

A 16	C 24	D 36	B 54
E 8	F 12	G 18	H 27

Zwischen A, B, sind (8, 19. S.) zwey mittlere Proportionalzahlen, C, D. Nimm (7, 35. S.) in der Verhältniß, A, C, D, B, die kleinsten, E, F, G, H, so sind (8, 2. Zus.) E, H, Kubikzahlen. Es ist aber E:H = A:B.

Euklids Elemente

Neuntes Buch.

Der 1. Satz.

Das Product, C, aus zweyen ähnlichen Flächenzahlen, A, B, ist eine Quadratzahl.

A 6	B 54
D 36	C 324

Es sey A.A = D, folglich eine Quadratzahl. Nun ist A.B = C. Folglich ist (7, 17. 18. S.) A:B = D:C. Nun sind A, B, ähnliche Flächenzahlen. Folglich ist (8, 18. S.) zwischen A, B, Eine mittlere Proportionalzahl, folglich (8, 8. S.) auch zwischen D, C. Nun ist D eine Quadratzahl, folglich auch C.

Der 2. Satz.

Zwey Zahlen, A, B, aus denen das Product, C, eine Quadratzahl ist, sind ähnliche Flächenzahlen.

A 3	B 12
D 9	C 36

Es sey A.A = D, folglich eine Quadratzahl. Nun ist A.B = C. Folglich (7, 17. 18. S.) A:B = D:C. Nun sind D, C, Quadratzahlen, und daher ähnliche Flächenzahlen. Folglich ist (8, 18. S.) zwischen D, C, Eine mittlere Proportionalzahl, folglich (8, 8. S.) auch zwischen A, B, folglich sind (8, 20. S.) A, B, ähnliche Flächenzahlen.

Der

Der 3. Satz.

Wenn eine Kubikzahl, A, sich selbst multiplicirt: so ist das Product, B, eine Kubikzahl.

Die Seite der Kubikzahl, A, sey C, und C.C = D, folglich C.D = A; auch sey die Einheit E. Folglich ist E:C = C:D, und E:C = D:A, folglich E:C = C:D = D:A, folglich sind zwischen E, A, zwey mittlere Proportionalzahlen, C, D, folglich (8, 8. S.) auch zwischen A, B, weil A.A = B, und daher E:A = A:B. Nun ist A eine Kubikzahl, folglich (8, 23. S.) auch B.

A 8 B 64
D 4 C 2 E 1

Der 4. Satz.

Das Product, C, aus zweyen Kubikzahlen, A, B, ist eine Kubikzahl.

Es sey A.A = D, folglich (9, 3. S.) eine Kubikzahl. Nun ist A.B = C. Folglich ist (7, 17. S.) A:B = D:C. Nun sind A, B, Kubikzahlen, und daher ähnliche Körperzahlen. Folglich sind (8, 19. S.) zwischen A, B, zwey mittlere Proportionalzahlen, folglich (8, 8. S.) auch zwischen D, C. Nun ist D eine Kubikzahl, folglich (8, 23. S.) auch C.

A 8 B 27
D 64 C 216

Der 5. Satz.

Wenn das Product, C, aus einer Kubikzahl, A, und einer andern Zahl, B, eine Kubikzahl ist: so ist auch diese andre, B, eine Kubikzahl.

Es sey A.A = D, folglich (9, 3. S.) eine Kubikzahl. Nun ist A.B = C. Folglich ist (7, 17. S.) A:B = D:C. Da D, C, Kubikzahlen, so sind sie ähnliche Körperzahlen, folglich sind (8, 19. S.) zwischen D, C, zwey mittlere Proportionalzahlen, folglich (8, 8. S.) auch zwischen A, B. Nun ist A eine Kubikzahl, folglich (8, 23. S.) auch B.

A 8 B 27
D 64 C 216

Der 6. Satz.

Wenn eine Zahl, A, sich selbst multiplicirt und das Product, B, eine Kubikzahl ist: so ist sie selbst eine Kubikzahl.

Es ist A.A=B. Nun sey A.B=C. Folglich ist C eine Kubikzahl, und (7, 17. S.) A:B = B:C. Nun sind B, C, Kubikzahlen, und daher ähnliche Körperzahlen. Folglich sind (8, 19. S.) zwischen B, C, zwey mittlere Proportionalzahlen, folglich (8, 8. S.) auch zwischen A, B. Nun ist B eine Kubikzahl, folglich (8, 23. S.) auch A.

A 8 B 64 C 512

Der 7. Satz.

Wenn eine Zahl, B, von einer zusammengesetzten Zahl, A, multiplicirt wird: so ist das Product, C, eine Körperzahl.

Da A eine zusammengesetzte Zahl ist, so wird sie (7, 13. Def.) von irgend einer Zahl, D, gemessen. So vielmal nun D in A ist, so viel Einheiten seyen in E. Folglich ist D.E = A. Nun ist C=B.A=B.D.E. Folglich ist C eine Körperzahl, deren Seiten, A, D, E.

A 6 B 7 C 42

D 3 E 2

Der 8. Satz.

Wenn mehrere Zahlen, A, B, C, D, E, F, von der Einheit an stetig proportionirt sind: so ist jede zweyte mit Uebergehung von einer, B, D, F, eine Quadratzahl; jede dritte mit Uebergehung von zweyen, C, F, eine Kubikzahl; und jede sechste, mit Uebergehung von fünfen, F, eine Quadrat- und Kubikzahl zugleich.

Da 1:A=A:B, so ist 1 in A so vielmal, als A in B, folglich A.A = B, demnach B eine Quadratzahl. Nun sind B, C, D, stetig proportionirt. Folglich ist (8, 22. S.) auch D eine Quadratzahl. Eben so wird dies von F u. s. w. bewiesen.

1 A 3 B 9 C 27 D 81 E 243 F 729

Da

Da 1:A = B:C, so ist 1 in A so vielmal, als B in C, folglich C = A.B = A.A.A, folglich ist C eine Kubikzahl. Nun sind C, D, E, F, stetig proportionirt. Folglich ist (8, 23. S.) auch F eine Kubikzahl.

Demnach ist F eine Quadrat- und Kubikzahl zugleich. Und der Beweis wird auf eben die Art weiter fortgeführt.

Der 9. Satz.

Wenn mehrere Zahlen, A, B, C, D, E, F, von der Einheit an stetig proportionirt sind, und die nächste nach der Einheit, A, entweder eine Quadrat- oder eine Kubikzahl ist: so sind auch alle übrige im ersten Fall Quadrat-, im andern, Kubikzahlen.

Erster Theil.

1 A4 B16 C64 D256 E1024 F4096

Daß B, D, F, Quadratzahlen sind, erhellet aus dem vorhergehenden Satze. Nun sind A, B, C, stetig proportionirt, und A eine Quadratzahl, folglich (8, 22. S.) auch C. Da B, C, D, stetig proportionirt, und B eine Quadratzahl, so ist es auch E. Eben so wird der Beweis von allen übrigen geführt.

Zweyter Theil.

1 A8 B64 C512 D4096 E32768 F262144

Daß C, F, Kubikzahlen sind, erhellet aus dem vorhergehenden Satze. Nun ist 1:A = A:B, folglich 1 in A so vielmal, als A in B, folglich A.A = B. Nun ist A eine Kubikzahl, folglich (9, 3. S.) auch B. Nun sind A, B, C, D, stetig proportionirt, und A eine Kubikzahl, folglich (8, 23. S.) auch D. Eben so wird der Beweis von E u. s. w. geführt.

Der 10. Satz.

Wenn mehrere Zahlen, A, B, C, D, E, F, von der Einheit an stetig proportionirt, und die nächste nach der Einheit, A,

entweder keine Quadrat-, oder keine Kubikzahl ist: so ist auch im ersten Fall keine der übrigen, jede zweyte ausgenommen, eine Quadratzahl; im andern Fall keine der übrigen, jede dritte ausgenommen, eine Kubikzahl.

Erster Theil.

Gesetzt es wäre C eine Quadratzahl. Nun ist (9, 8. S.)

1	A 2	B 4	C 8	D 16	E 32	F 64

B eine Quadratzahl, auch B:C = A:B. Folglich verhalten sich A, B, wie Quadratzahlen, folglich sind A, B, ähnliche Flächenzahlen. Nun ist B eine Quadratzahl, folglich auch A, gegen das Angenommene.

Eben so wird der Beweis weiter geführt.

Zweyter Theil.

Gesetzt, es wäre D eine Kubikzahl. Nun ist (9, 8. S.) C eine Kubikzahl, auch B:C = C:D. Folglich verhalten sich B, C, wie Kubikzahlen, folglich sind B, C, ähnliche Körperzahlen. Nun ist C eine Kubikzahl, folglich auch B. Nun ist 1:A = A:B. Folglich ist 1 in A so vielmal, als A in B, folglich A.A = B, folglich (9. 6. S.) A eine Kubikzahl, gegen das Angenommene.

Eben so wird der Beweis weiter geführt.

Der 11. Satz.

Wenn mehrere Zahlen, A, B, C, D, von der Einheit an stetig proportionirt sind: so mißt darunter eine kleinere, A, die grössere, D, nach irgend einer dieser Zahlen.

Da 1:A = C:D, so ist 1 in A so vielmal, als C in D, folglich (7, 15. S.) verwechselt 1 in C so vielmal, als A in D.

1	A 3	B 9	C 27	D 81

Nun mißt 1 die C nach der Zahl C. Folglich mißt A die D auch nach der Zahl C, das ist, nach einer der Zahlen, A, B, C, D.

Der

Der 12. Satz.

Wenn mehrere Zahlen, A, B, C, D, von der Einheit an stetig proportionirt sind: so läßt sich von jeder Primzahl, E, von welcher die letzte, D, gemessen wird, auch die erste, A, messen.

1	A 4	B 16	C 64	D 256
	E 2	H 8	G 32	F 128

Liesse sich A von der Primzahl, E, nicht messen, so wären (7, 31. S.) E, A, Primzahlen zu einander. Nun werde D von E nach der Zahl F gemessen, und daher E.F = D. Auch wird (9, 11. S.) D von A nach der Zahl C gemessen, und daher A.C = D. Folglich ist A.C = E.F, folglich (7, 19. S.) A:E = F:C. Nun sind A, E, Primzahlen, und daher (7, 23. S.) die kleinsten in solcher Verhältniß. Folglich (7, 21. S.) mißt E die C. Dies geschehe nach der Zahl G. Folglich ist E.G = C. Eben so ist (9, 11. S.) A.B = C. Folglich ist A.B = E.G, folglich (7, 19. S.) A:E = G:B, folglich (7, 21. S.) mißt E die B. Dies geschehe nach der Zahl H. Folglich ist E.H = B. Nun ist A.A = B. Folglich E.H = A.A, folglich (7, 20. S.) E:A = A:H, folglich (7, 21. S.) mißt E die A, welches dem Obigen wiederspricht. Folglich sind E, A, nicht Primzahlen zu einander, folglich zusammengesetzt, folglich werden sie von irgend einer Zahl gemessen, folglich von E; weil eine Primzahl E von keiner andern Zahl als von ihr selbst sich messen läßt. Demnach mißt E die A.

Der 13. Satz.

Wenn mehrere Zahlen, A, B, C, D, von der Einheit an stetig proportionirt sind, und die erste A, eine Primzahl ist: so läßt sich die letzte, D, von keiner andern, als von diesen Zahlen, messen.

1	A 5	B 25	C 125	D 625
	E—	H—	G—	F—

Gesetzt, es würde D von einer Zahl E, welche mit keiner der A, B, C, einerley ist, gemessen, so könnte E keine

1 A 5 B 25 C 125 D 625
E— H— G— F—

Primzahl seyn. Denn wäre sie eine, so müste sie, weil sie die D mißt, (9, 12. S.) auch die A, das ist, eine Primzahl, messen, mit der sie nicht einerley, welches unmöglich. Demnach ist E eine zusammengesetzte Zahl, folglich wird sie (7, 33. S.) von irgend einer Primzahl gemessen. Dies könnte keine andre als A seyn. Denn wär es eine andre, so müste sie, weil E die D mißt, auch die D, folglich (9, 12. S.) auch die A, das ist, eine Primzahl, messen, mit der sie nicht einerley, welches unmöglich. Demnach mißt A die E.

Da E die D mißt, so geschehe dies nach der Zahl, F, und daher E.F = D. Nun wird auf eben die Art, wie vorher bewiesen, daß F keine Primzahl sey, auch daß sie von A gemessen werde. Daß sie aber auch mit keiner der A, B, C, einerley sey, wird so bewiesen: wäre solches, so müste eine der A, B, C, die D nach der Zahl E messen. Nun mißt (9, 11. S.) eine der A, B, C, die D, nach einer dieser Zahlen, folglich müste E mit einer dieser Zahlen einerley seyn, gegen das Angenommene.

Es war E.F = D. Nun ist auch A.C = D. Folglich ist A.C = E.F, folglich (7, 19. S.) A:E = F:C. Nun mißt A die E, folglich (7, 20. Def.) mißt F die C. Dies geschehe nach der Zahl G, und daher G.F = C. Nun wird eben so, wie vorher bewiesen, daß G mit keiner der A, B, einerley, daß sie keine Primzahl sey, und daß sie von A gemessen werde.

Es war G.F = C. Nun ist auch A.B = C. Folglich ist A.B = G.F, folglich (7, 19. S.) A:F = G:B. Nun mißt A die F, folglich mißt G die B. Dies geschehe nach der Zahl H, und daher H.G = B. Nun wird wie vorher bewiesen, daß H mit A nicht einerley.

Es war H.G = B. Nun ist A.A = B. Folglich ist A.A = H.G, folglich A:G = H:A. Nun mißt A die G, folglich mißt H die A, das ist, eine Primzahl, mit der sie nicht einerley, welches unmöglich ist. Demnach wird D von keiner andern Zahl, als von A, B, C, gemessen.

Der 14. Satz.

Die gewissen Primzahlen, B, C, D, meßbare kleinste Zahl, A, läßt sich von keiner andern, als von diesen Primzahlen, messen.

Gesetzt, es würde A von einer Primzahl, E, welche mit keiner der B, C, D, einerley, gemessen, so geschehe dies nach der Zahl F, und daher E.F = A. Nun messen B, C, D, die A, das ist, F E, folglich (7, 32. S.) E oder F. Nun können sie E, eine Primzahl nicht messen. Folglich müssen sie F messen, welche kleiner als A, da doch A schon die diesen Primzahlen meßbare kleinste Zahl ist.

A 30

B 2 C 3 D 5

E— F—

Der 15. Satz.

Wenn drey Zahlen, A, B, C, stetig proportionirt, und die kleinsten in solcher Verhältniß sind: so ist die Summe jeglicher zwey derselben eine Primzahl zur dritten.

Nimm (8, 2. S.) in der Verhältniß der A, B, C, zwey kleinste Zahlen, DE, EF, so ist DE.DE = A, DE.EF = B, EF.EF = C, und (7, 24. S.) DE, EF, Primzahlen zu einander, folglich (7, 30. S.) DF eine Primzahl zu DE, und zu EF. Nun ist auch DE eine Primzahl zu EF. Demnach sind DF, DE, Primzahlen zu EF, folglich ist (7, 26. S.) DF.DE eine Primzahl zu EF, folglich (7, 27. S.) auch zu EF.EF. Nun ist (2, 3. S.) DF.DE = DE.DE + DE.EF. Folglich ist DE.DE + DE.EF eine Primzahl zu EF.EF. Nun ist DE.DE = A, DE.EF = B, EF.EF = C. Demnach ist A + B eine Primzahl zu C.

A 9 B 12 C 16

D 3 E 4 F

Auf eben die Art wird bewiesen, daß auch B + C eine Primzahl zu A sey.

Nun ist auch A + C eine Primzahl zu B. Denn da (7, 30. S.) DF zu DE, EF, eine Primzahl ist, so ist (7, 26. 27. S.) auch DF.DF eine Primzahl zu DE.EF. Nun ist (2, 4. S.) DF.DF = DE.DE + EF.EF + 2 DE.EF. Folglich

ist

ist DE.DE + EF.EF + 2 DE.EF, folglich auch DE.DE + EF.EF, eine Primzahl zu DE.EF. Nun ist DE.DE = A, EF.EF = C, DE.EF = B. Folglich ist A + C eine Primzahl zu B.

A 9 B 12 C 16

D 3 E 4 F

Der 16. Satz.

Zu zweyen Zahlen, A, B, welche Primzahlen zu einander sind, läßt sich keine dritte Proportionalzahl finden.

Gesetzt, es wäre eine dritte Proportionalzahl, C, so wäre A:B = B:C. Nun sind A, B, Primzahlen, und daher (7, 23. S.) die kleinsten in solcher Verhältniß. Folglich (7, 21. S.) mißt A die B, aber auch sich selbst, demnach mißt A die A und B, welches unmöglich, weil A, B, Primzahlen zu einander sind.

A 5 B 8 C —

Der 17. Satz.

Wenn mehrere Zahlen, A, B, C, D, stetig proportionirt, und die äußersten, A, D, Primzahlen zu einander sind: so läßt sich zu der ersten, zweyten und letzten, keine vierte Proportionalzahl finden.

Gesetzt es wäre eine solche, etwa E, so wäre A:B = D:E, folglich (7, 13. S.) verwechselt A:D = B:E. Nun sind A, D, Primzahlen, und daher (7, 23. S.) die kleinsten. Folglich (7, 21. S.) mißt A die B. Nun ist A:B = B:C, folglich mißt auch B die C. Nun mißt A die B, folglich mißt A auch die C. Nun ist B:C = C:D, und B mißt die C, folglich mißt C die D. Nun mißt A die C, folglich mißt A auch die D, aber auch sich selbst, demnach mißt A die A und D, welches unmöglich, weil A, D, Primzahlen zu einander sind.

A 8 B 12 C 18 D 27 E —

Der

Der 18. Satz.

Es sind zwey Zahlen, A, B, gegeben: man soll forschen, ob sich zu ihnen eine dritte Proportionalzahl finden lasse.

Die beyden gegebnen Zahlen, A, B, sind entweder Primzahlen zu einander oder nicht. Ist das erste, so ist (9, 16. S.) keine dritte Proportionalzahl möglich. Ist das letzte, so sey $B^2 = C$. Und diese C werde entweder von A gemessen, oder nicht.

A 4 B 7

Erster Fall.

Wird C von A gemessen, so geschehe dies nach der Zahl D. Folglich ist $A.D = C$. Nun war $B^2 = C$.

A 4 B 6 D 9 C 36

Folglich ist $A.D = B.B$, folglich (7, 20. S.) $A:B = B:D$, demnach ist D die dritte Proportionalzahl zu A, B.

Zweyter Fall.

Wird C von A nicht gemessen, so ist zu A, B, keine dritte Proportionalzahl möglich. Denn gäbe es eine, D, so wäre $A.D = B^2 = C$, folglich würde C von A (nach der Zahl D) gemessen, gegen das Angenommene.

A 6 B 4 D — C 16

Der 19. Satz.

Es sind drey Zahlen, A, B, C, gegeben: man soll forschen, ob sich zu ihnen eine vierte Proportionalzahl finden lasse.

Die gegebnen Zahlen sind entweder proportionirt, oder nicht.

Erster Fall.

Wenn die gegebnen Zahlen, A, B, C, proportionirt sind: so sind die äussersten, A, C, entweder Primzahlen zu einander, oder nicht. Ist das erste, so ist (9, 17. S.) keine vierte Proportionalzahl möglich. Ist aber das letzte, so sey $B.C = D$. Nun mißt entweder A die D, oder nicht.

A 4 B 6 C 9

nicht. Ist das erste, so geschehe solches nach der Zahl E, folglich A.E = D. Nun ist B.C = D, folglich A.E = B.C, folglich A:B = C:E, demnach ist E die vierte Proportionalzahl.

A 8 B 12 C 18 E 27 D 216

Ist hingegen das letzte, so giebt es keine vierte. Denn wär eine, E, so wäre A.E = B.C = D. Demnach würde A die D (nach der Zahl E) messen, gegen das Angenommene.

A 20 B 30 C 45 E — D 1350

Zweyter Fall.

Wenn die gegebnen Zahlen, A, B, C, nicht proportionirt sind, so sey B.C = D, und es messe entweder A die D, oder nicht: so läßt sich wie zuvor beweisen, daß im ersten Fall E die vierte Proportionalzahl sey, im andern aber, es keine gebe.

A 3 B 4 C 9 E 12 D 36

A 4 B 6 C 5 E — D 30

Der 20. Satz.

Jeder angegebnen Menge von Primzahlen, A, B, C, können noch mehrere beygefügt werden.

Es sey (7, 38. S.) die den gegebnen Primzahlen, A, B, C, meßbare kleinste Zahl, DE, so ist, wenn die Einheit DF dazukommt, EF entweder eine Primzahl, oder nicht. Ist das erste, so ist schon Eine Primzahl mehr als angegeben worden. Ist aber das letzte, so wird (7, 33. S.) EF von irgend einer Primzahl, G, gemessen. Diese G aber ist mit keiner der A, B, C, einerley. Denn wäre dies, so würde sie die DE messen, weil A, B, C, die DE messen. Nun mißt G die EF, folglich auch den Rest DF, das ist, eine Zahl die Einheit, welches unmöglich.

A 2 B 3 C 5

E 30 D 1 F

A 5 B 3 C 7

E 105 D 1 F

G 53

Der 21. Satz.

Die Summe mehrerer geraden Zahlen, A, B, C, D, ist eine gerade Zahl.

Da

Da jede dieser Zahlen gerade ist, so kann sie durch zwey getheilt werden; folglich auch ihre Summe, die folglich gerade ist.

A 4 B 6 C 2 D 8

Der 22. Satz.

Die Summe einer geraden Menge von ungeraden Zahlen, A, B, C, D, ist eine gerade Zahl.

Nimmt man jeder dieser Zahlen die Einheit ab, so sind sie alle gerade, folglich ist (9, 21. S.) ihre Summe gerade. Nun ist auch die Anzahl der Einheiten gerade, und giebt daher (9, 21. S.) mit jener Summe eine gerade Zahl.

A 3 B 5 C 7 D 9

Der 23. Satz.

Die Summe einer ungeraden Menge von ungeraden Zahlen, AB, BC, CD, ist eine ungerade Zahl.

Nimm der CD die Einheit DE ab, so ist CE gerade. Nun ist (9, 22. S.) AC gerade, folglich (9, 21. S.) AE gerade, folglich AD ungerade.

A 5 B 7 C 8 E 1 D

Der 24. Satz.

Wird von einer geraden Zahl, AB, eine gerade, BC, weggenommen: so ist der Rest, CA, gerade.

Da AB, BC, gerade, so können sie halbirt werden, folglich kann man auch den Rest AC halbiren, folglich ist AC gerade.

A 6 C 4 B

Der 25. Satz.

Wird von einer geraden Zahl, AB, eine ungerade, BC, weggenommen: so ist der Rest, CA, ungerade.

Nimm von BC die Einheit CD, so ist DB gerade. Wird BD von AB weggenommen, so ist (9, 24. S.) der Rest AD, gerade, folglich, wenn die Einheit davon kommt, CA ungerade.

A 7 C 1 D 4 B

Der 26. Satz.

Wird von einer ungeraden Zahl, AB, eine ungerade, BC, weggenommen: so ist der Rest, CA, gerade.

Nimm von AB die Einheit BD, so ist AD gerade. Aus eben dem Grunde ist auch CD gerade, folglich ist (9, 24. S.) der Rest AC gerade.

A 4 C 6 D 1 B

Der 27. Satz.

Wird von einer ungeraden Zahl, AB, eine gerade, BC, weggenommen: so ist der Rest, CA, ungerade.

Nimm von AB die Einheit AD, so ist DB gerade. Wird hiervon die BC weggenommen, so ist (9, 24. S.) der Rest, CD, gerade, folglich, wenn die Einheit AD dazu kommt, CA ungerade.

A 1 D 4 C 4 B

Der 28. Satz.

Wird von einer ungeraden Zahl, A, eine gerade, B, multiplicirt: so ist das Product, C, gerade.

Da A.B = C, so enthält C so viele B, als Einheiten in A sind. Nun ist B gerade, folglich ist C die Summe gerader Zahlen, folglich (9, 21. S.) gerade.

A 3 B 4

C 12

Der 29. Satz.

Wird von einer ungeraden Zahl, A, eine ungerade, B, multiplicirt: so ist das Product, C, ungerade.

Da A.B = C, so sind in C so viel B, als Einheiten in A. Nun ist B sowohl, als A ungerade. Folglich ist C die Summe einer ungeraden Menge ungerader Zahlen, folglich (9, 23. S.) ungerade.

A 3 B 5

C 15

Der

Der 30. Satz.

Eine ungerade Zahl, A, welche eine gerade, B, mißt, wird deren Hälfte auch messen.

A 3 B 12
C 4

Es werde B von A nach der Zahl, C, gemessen, so ist C nicht ungerade. Denn wäre dies, so wäre (9, 29. S.) A . C = B, ungerade, gegen das Angenommene. Demnach ist C gerade, folglich mißt A die B nach einer geraden Zahl, folglich mißt sie auch die Hälfte der B.

Der 31. Satz.

Eine ungerade Zahl, A, welche Primzahl zu irgend einer Zahl, B, ist, wird auch zu deren Doppelten, C, Primzahl seyn.

A 3 B 5
C 10
D —

Wären A, C, nicht Primzahlen zu einander, so würden sie von irgend einer Zahl, D, gemessen. Nun ist A ungerade, folglich auch D. Nun ist C gerade, folglich mißt (9, 30. S.) D auch die Hälfte der C, folglich B. Nun mißt sie auch A, folglich A, B, welches unmöglich, weil A, B, Primzahlen zu einander sind.

Der 32. Satz.

Alle Zahlen, welche von der Zwey an, durch Verdoppelung, entstehen, B, C, D, sind nur grademalgerade.

1 A 2 B 4 C 8 D 16

Daß jede der B, C, D, grademalgerade sey, ist (7, 8. Def.) an sich klar, weil sie durch Verdoppelung von der Zwey an entstanden; daß sie aber nicht anders seyn könne, wird so bewiesen: Da die Zahlen, A, B, C, D, von der Einheit an stetig proportionirt sind, und die nächste nach der Einheit, A, eine Primzahl ist, so wird (9, 13. S.) D nur von A, B, C, gemessen, das ist, nur von geraden Zahlen, folglich ist D nur grademalgerade. Eben so wird dies auch von B, C, bewiesen.

Der 33. Satz.

Eine Zahl, A, deren Hälfte ungerade, ist nur gerademal ungerade.

Da A von ihrer Hälfte, welche ungerade ist, nach | A 10
einer geraden Zahl gemessen wird, so ist (7, 9. Def.) A
gerademalungerade. Sie kann aber auch nicht anders seyn. Denn wäre A auch gerademalgerade, so würde sie (7, 8. Def.) von einer geraden Zahl nach einer geraden Zahl gemessen, folglich würde auch ihre Hälfte von einer geraden Zahl gemessen, welches unmöglich, weil diese Hälfte ungerade ist.

Der 34. Satz.

Eine gerade Zahl, A, die weder zu denen gehört, welche durch Verdoppelung von der Zwey an entstehen, noch auch eine ungerade Hälfte hat, ist zugleich gerademalgerade und gerademalungerade.

Daß sie gerademalgerade sey, ist (7, 8. Def.) offen- | A 12
bar, weil ihre Hälfte gerade ist. Sie ist aber auch
gerademalungerade. Denn wenn A halbirt wird, und ihre Hälfte abermals, und so immer fort, so kommt man endlich auf eine ungerade Zahl, welche die A nach einer geraden Zahl mißt. Denn wär dies nicht, so käme man endlich auf Zwey, so daß also A durch Verdoppelung von Zwey an entstanden wäre, gegen das Angenommene.

Der 35. Satz.

Wenn mehrere Zahlen, A, BC, D, EF, stetig proportionirt sind, und die erste, A, sowohl von der zweyten, BC, als auch von der letzten, EF, weggenommen wird: so verhält sich der Rest der zweyten, BG, zur ersten Zahl, A, wie der Rest der letzten, EH, zur Summe aller ihr vorgehenden Zahlen, A, BC, D.

Es sey FK = BC, und FL = D. Da FK = BC, und FH = CG, so ist (subtrahirt) KH = BG. Nun ist EF : D = D : BC = BC : A. Folglich ist EF : FL = FL : FK = FK : FH, folglich (5, 17. S.) getrennt, EL : FL = LK : FK = KH : FH, folglich (7, 12. S.) KH : FH = (EL + LK + KH) : (FL + FK + FH) das ist, BG : A = EH : (D + BC + A).

A 8

B 4 G 8 C

D 18

E 8 L 6 K 4 H 8 F

Der 36. Satz.

Wenn mehrere von der Einheit an stetig verdoppelte Zahlen, 1, A, B, C, D, angenommen werden, bis alles zusammen zur Summe, E, eine Primzahl giebt: so ist das Product, FG, aus solcher Summe, E, und der letzten Zahl, D, eine vollständige Zahl.

So viel der Zahlen, A, B, C, D, sind, so viel nimm von E an stetig verdoppelte Zahlen, E, HK, L, M, folglich ist gleichförmig A : D = E : M, folglich (7, 19. S.) A . M = D . E = FG, folglich mißt M die FG nach der Zahl, A, das ist, nach der Zwey, folglich ist FG = 2 M, und daher E, HK, L, M, FG, stetig proportionirt. Nimmt man nun die erste, E, von der zweyten, HK, sowohl, als von der letzten, FG, so ist (7, 35. S.) NK : E = OG : (M + L + HK + E). Nun ist NK = E. Folglich ist OG = E + HK + L + M, folglich (E addirt) FG = 1 + A + B + C + D + E + HK + L + M. Nun wird FG von D, und von M, folglich von allen der D und M vorgehenden Zahlen gemessen. Folglich sind alle diese Zahlen, deren Summe diese FG gleich ist, Theile der FG, folglich ist (7, 22. Def.) FG eine vollständige Zahl, weil dieses alle ihre Theile sind, das ist, weil sie ausser diesen Zahlen von keiner andern gemessen wird.

1 E 31

A 2 H 31 N 31 K

B 4 L 124

C 8 M 248

D 16 F 31 O 465 G

Q — P —

1	E 31	
A 2	H 31	N 31 K
B 4	L 124	
C 8	M 248	
D 16	F 31	O 465 G
	Q — P —	

Denn würde sie von einer andern, P, gemessen, so geschehe dies nach der Zahl, Q. Folglich ist P.Q = FG = D.E, folglich (7, 19. S.) E:Q = P:D. Nun wird (9, 13. S.) D von keiner andern Zahl, als von A, B, C, folglich nicht von P gemessen. Folglich wird auch Q von E nicht gemessen. Nun ist E eine Primzahl. Folglich (7, 31. S.) sind E, Q, Primzahlen zu einander, folglich (7, 23. S.) die kleinsten in solcher Verhältniß, folglich (7, 21. S.) mißt Q die D. Nun wird D von keiner, als von A, B, C, gemessen. Folglich muß Q eine der A, B, C, seyn. Es sey Q = B. Nimmt man nun zu den dreyen B, C, D, die drey E, HK, L, so ist gleichförmig B:D = E:L, folglich B.L = D.E = P.Q, folglich Q:B = L:P. Nun ist B = Q. Folglich ist P = L, gegen das Angenommene.

Euklids Elemente

Zehntes Buch.

Definitionen.

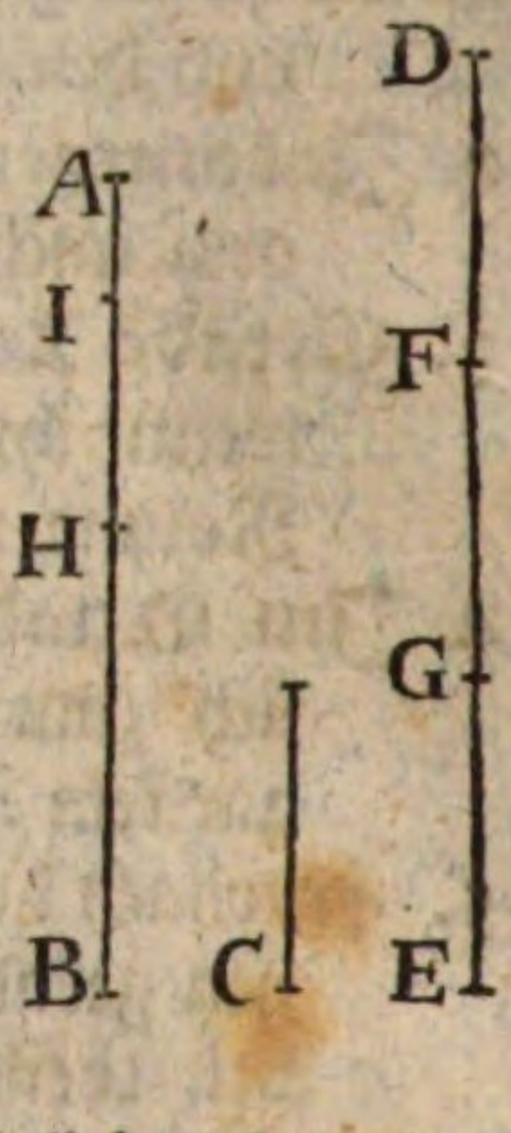
1. Commensurabel heissen die Grössen, so sich von einem und demselben Maaße messen lassen,
2. Incommensurabel aber sind die, zu denen sich gar kein gemeinschaftliches Maaß finden läßt.
3. Gerade Linien sind im Quadrat **commensurabel**, wenn ihre Quadrate sich von einem und demselben Raume messen lassen;
4. Im Quadrat **incommensurabel** aber sind sie, wenn sich zum gemeinschaftlichen Maaße ihrer Quadrate gar kein Raum finden läßt.
5. Hiernach kann gezeigt werden, daß mit einer angenommenen geraden Linie, unzählige andre theils commensurabel, theils incommensurabel sind; und zwar einige in Länge und Quadrat, andre in Quadrat allein. Solche angenommene Linie heisse **rational**,
6. und die mit ihr commensurabel sind, es sey in Länge und Quadrat, oder in Quadrat allein, nenne man auch **rational**.
7. Die mit ihr aber incommensurabel, **irrational**.
8. Auch heisse das Quadrat der angenommenen Linie **rational**,
9. und die Flächen, so mit demselben commensurabel sind, nenne man auch **rational**,
10. die mit demselben aber incommensurabel sind, **irrational**.

11. Des-

11. Desgleichen nenne man die Quadratseiten solcher Irrationalflächen, irrational: nämlich, wenn solche Flächen Quadrate sind, ihre eignen Seiten; wenn sie aber andre geradliniche Figuren sind, diejenigen geraden Linien, deren Quadrate solchen Figuren gleich sind.

Der 1. Satz.

Wenn zwey ungleiche Grössen, AB, C, gegeben sind, und es wird der grössern, AB, mehr als die Hälfte abgenommen, dem Reste abermals mehr als die Hälfte, und dies immer so fort: so bleibt einmahl ein Rest, welcher kleiner ist, als die gegebne kleinere Grösse, C.



Es sey der C Vielfaches DE > AB. Theile DE in ihre der C gleiche Theile, DF, FG, GE. Nimm von der AB mehr als die Hälfte BH, und vom Rest AH mehr als die Hälfte HI, und dies immer so fort, bis in AB so viel Abschnitte, als in DE, sind.

Da AB < DE, und von AB mehr als die Hälfte, BH, von DE aber weniger als die Hälfte, EG, weggenommen wird, so ist der Rest AH < DG. Folglich, da von AH mehr als die Hälfte, HI, von DG aber nur die Hälfte, GF, weggenommen wird, ist der Rest AI < DF. Nun ist DF = C. Folglich AI < C.

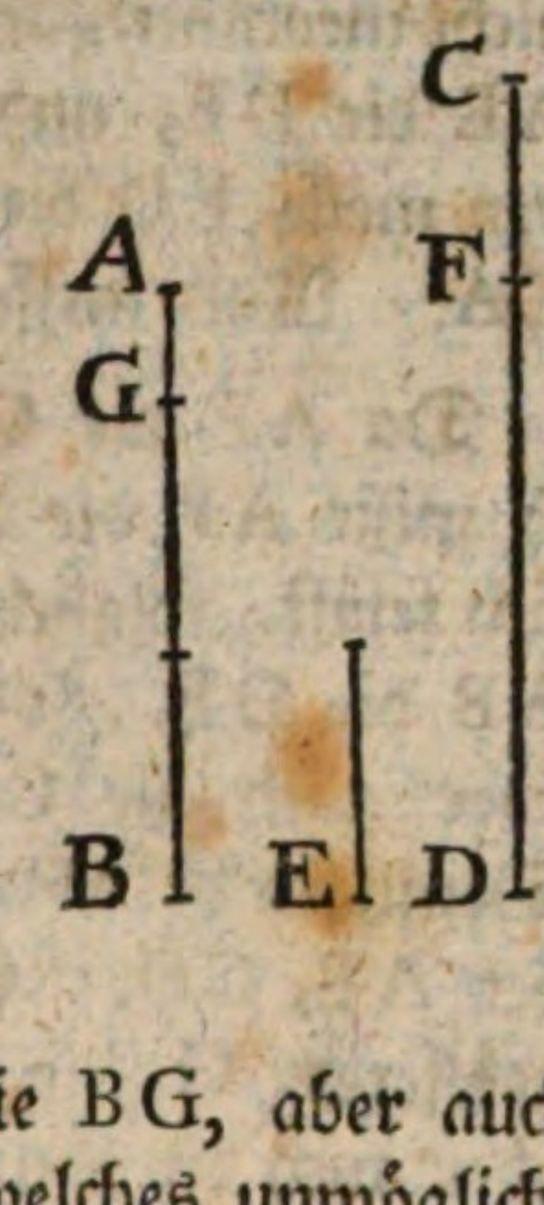
Anmerkung. Auf eben die Art wird der Satz bewiesen, wenn bey der grössern, AB, das Weggenommene immer auch nur die Hälfte beträgt.

Der 2. Satz.

Wenn zwey ungleiche Grössen, AB, CD, vorhanden, und es wird vom Grössern das Kleinere immer weggenommen, ohne daß irgend ein Rest die nächst vorgehende Grösse ausmißt: so sind diese Grössen incommensurabel.

Wären

Wären AB, CD, commensurabel, so würden sie von irgend einer Grösse, E, gemessen. Nun messe AB die DF, und lasse zum Rest eine kleinere, FC. Ferner messe FC die BA, und lasse zum Rest eine kleinere, GA. So fahre man fort, bis man auf einen Rest kommt, welcher kleiner als E ist. Gesetzt, es sey dies geschehen, und $GA < E$.



Da E die AB, und AB die DF mißt, so mißt E die DF. Nun mißt sie auch die ganze CD, folglich auch den Rest FC. Nun mißt FC die BG. Folglich mißt auch E die BG, aber auch die ganze AB, folglich auch den Rest GA, welches unmöglich, weil $E > GA$.

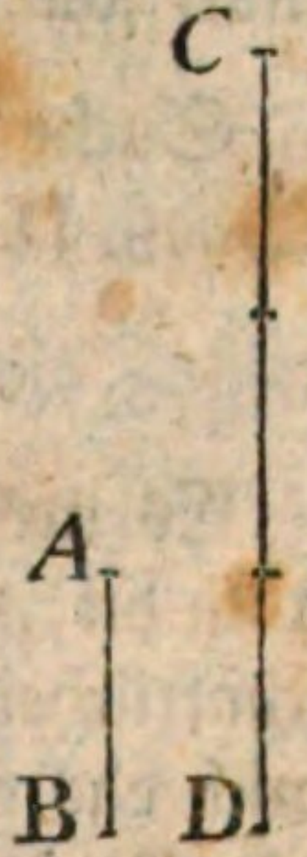
Der 3. Satz.

Es sind zwey commensurable Grössen, AB, CD, gegeben: man soll ihr gröstes gemeinschaftliches Maaß finden.

Die kleinere, AB, mißt entweder die grössere, CD, oder mißt sie nicht.

Erster Fall.

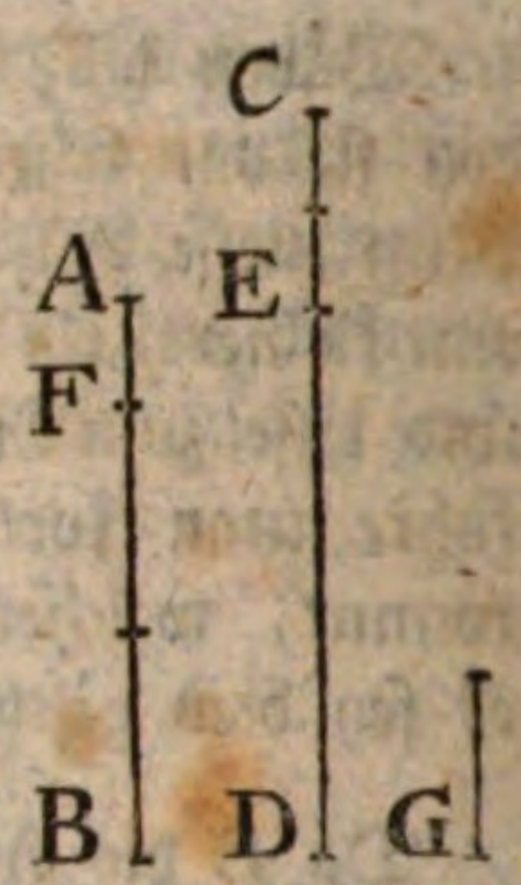
Wenn AB die CD mißt, so ist sie, weil sie auch sich selbst mißt, ein gemeinschaftliches Maaß der AB, CD. Sie ist aber auch das gröste, weil kein grösseres die AB messen kann.



Zweyter Fall.

Wenn AB die CD nicht mißt, so nimm immer das Kleinere vom Grössern weg, so lange bis ein Rest die nächst vorgehende Grösse ausmißt, welches (10, 2 S.) geschehen muß, weil AB, CD,

nicht incommensurabel sind. Es messe nämlich AB die DE, und lasse zum Rest, EC. Ferner messe EC die BF, und lasse zum Rest, FA. Nun messe FA die EC.



Da AF die CE mißt, und CE die BF, so mißt AF die BF. Nun mißt AF auch sich selbst, folglich die ganze AB. Nun mißt AB die DE. Folglich mißt auch AF die DE, aber auch die CE, folglich die ganze CD. Demnach ist AF ein gemeinschaftliches Maaß der AB, CD. Sie ist aber auch das gröste. Denn wäre ein grösseres, G, so mäße solches die AB, folglich auch die DE, aber auch die ganze CD, folglich die CE, folglich die BF, aber auch die ganze AB, folglich AF, welches unmöglich, weil $G > AF$.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß eine Grösse, welche zwey andre mißt, auch deren gemeinschaftliches Maaß messen müsse.

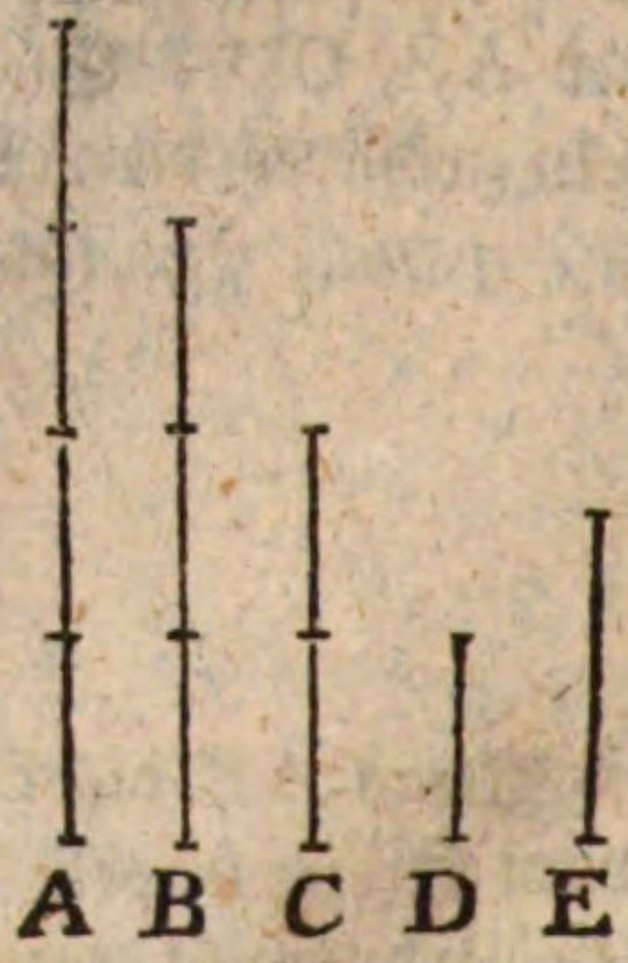
Der 4. Satz.

Es sind drey commensurable Grössen, A, B, C, gegeben: man soll ihr gröstes gemeinschaftliches Maaß finden.

Suche (10, 3. S.) zu A, B, das gröste gemeinschaftliche Maaß, D. Dieses mißt nun entweder auch die C, oder nicht.

Erster Fall.

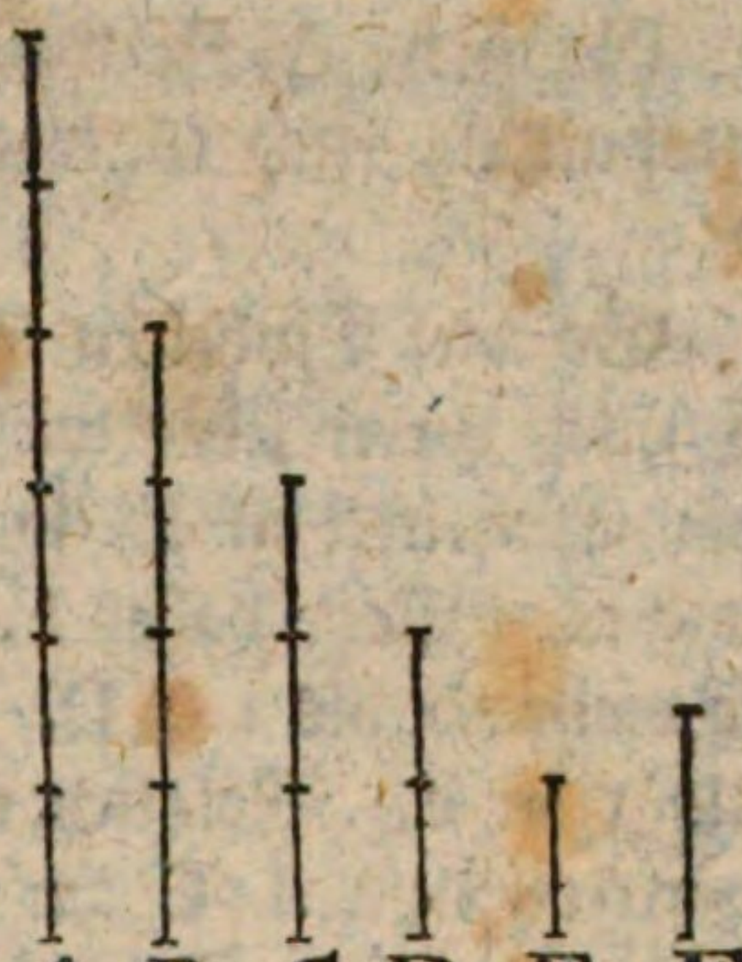
Es messe D die C. Nun mißt sie auch die A, B, folglich ist sie ein gemeinschaftliches Maaß der A, B, C. Aber auch das gröste. Denn wär ein grösseres, E, so mißt solches die A, B, folglich (10, 3. Zus.) auch die D, welches unmöglich, weil $E > D$.



Zweyter

Zweyter Fall.

Es messe D nicht die C, so sind dennoch C, D, commensurabel. Denn da A, B, C, commensurabel, so haben sie ein gemeinschaftliches Maaß, welches daher, weil es A, B, mißt, (10, 3. Zus.) auch die D messen muß. Nun mißt es auch die C. Folglich ist es ein Maaß für C, D.



Suche (10, 3. S.) zu C, D, das gröste gemeinschaftliche Maaß, E. Da E die D, und D die A, B, mißt, so mißt E die A, B, aber auch C, folglich ist E ein Maaß der A, B, C. Aber auch das gröste. Denn wär ein grösseres, F, so mißt solches A, B, folglich (10, 3. Zus.) auch D, aber auch C, folglich (10, 3. Zus.) auch E, welches unmöglich, weil $F > E$.

Zusatz.

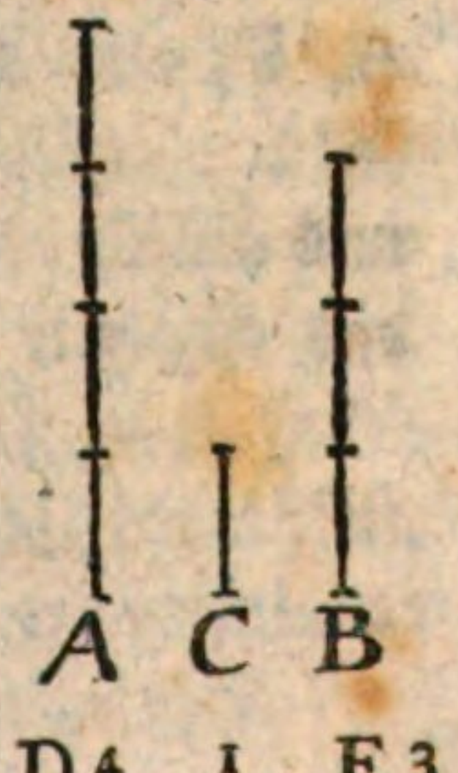
Hieraus erhellet, daß eine Grösse, welche drey andre mißt, auch deren grösstes gemeinschaftliches Maaß messen müsse.

Anmerkung. Auf gleiche Art findet man auch zu mehrern Grössen das gröste gemeinschaftliche Maaß; so daß der Zusatz auch auf mehrere Grössen kann ausgedehnt werden.

Der 5. Satz.

Commensurable Grössen, A, B, verhalten sich wie Zahlen zu einander.

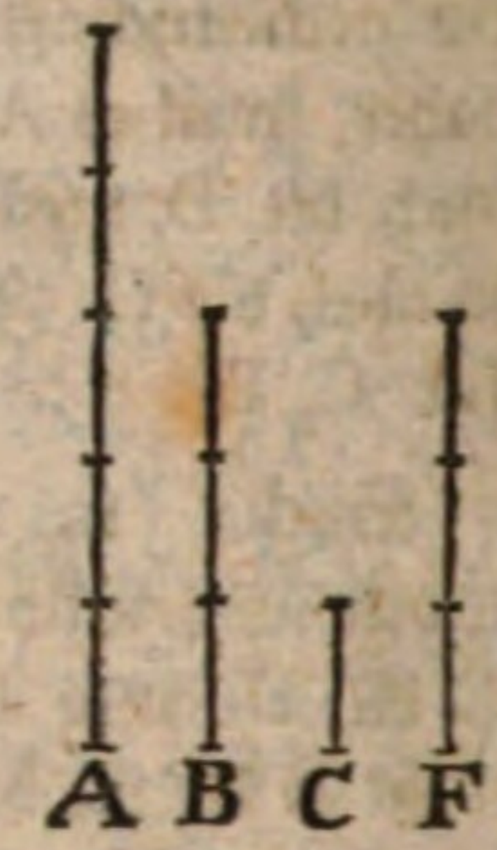
Es sey C das Maaß der A, B. Nun seyen zwey Zahlen D, E, so daß C in A so vielmal, als 1 in D, und C in B so vielmal, als 1 in E. Folglich ist $C:A = 1:D$, und **umgekehrt**, $A:C = D:1$. Nun ist auch $C:B = 1:E$. Folglich ist **gleichförmig** $A:B = D:E = 4:3$.



Der

Der 6. Satz.

Gröſſen, A, B, welche ſich wie Zahlen, D, E, zu einander verhalten, ſind commenſurabel.

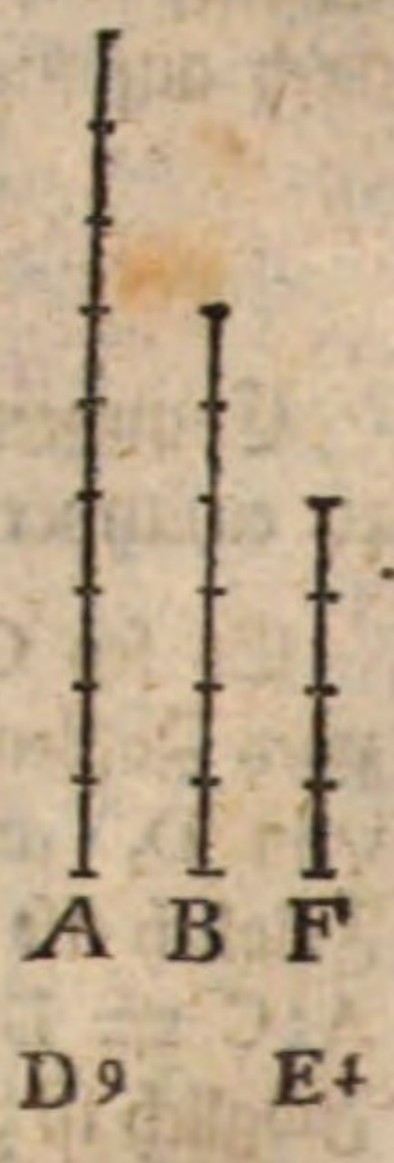


So viel Einheiten in D, in ſo viel gleiche Theile, deren jeder = C, theile die A. So viel Einheiten in E, ſo vielfach mache die C, und es entſtehe daher F. Demnach iſt C in A ſo vielmal, als 1 in D, und C in F ſo vielmal, als 1 in E. Folglich iſt C:A = 1:D, und umgekehrt A:C = D:1. Nun iſt auch C:F = 1:E. Folglich gleichförmig A:F = D:E. Nun war A:B = D:E. Folglich iſt A:B = A:F, folglich (5,9. S.) B = F. Nun mißt C die F, folglich die B, aber auch die A, demnach A und B. Folglich (10,1. Def.) ſind A, B, commenſurabel.

Ein andrer Beweis. Es ſey A nach den Einheiten in D getheilt, ſo daß 1:D = C:A. Nun iſt auch D:E = A:B. Folglich iſt gleichförmig 1:E = C:B. Nun mißt 1 die E. Folglich mißt auch C die B, aber auch die A, folglich A und B.

Zuſatz.

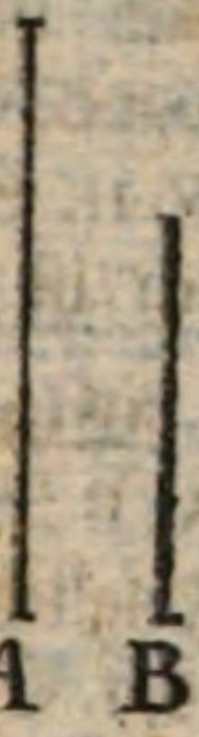
Hieraus erhellet, wenn zwey Zahlen, D, E, und eine gerade Linie, A, gegeben worden, daß man eine andre gerade Linie, F, finden könne, ſo daß D:E = A:F. Nimmt man nun zwiſchen A, F, eine mittlere Proportionalgröſſe, B, ſo iſt (6,20. Zuſ.) die Figur auf A zu der ihr ähnlichen und ähnlich beſchriebenen Figur auf B, wie A zu F, das iſt, wie D zu E.



Der

Der 7. Satz.

Incommensurable Grössen, A, B, verhalten sich nicht wie Zahlen zu einander.



Denn verhielten sie sich wie Zahlen, so wären sie (10, 6. S.) commensurabel, gegen das Angenommene.

Der 8. Satz.

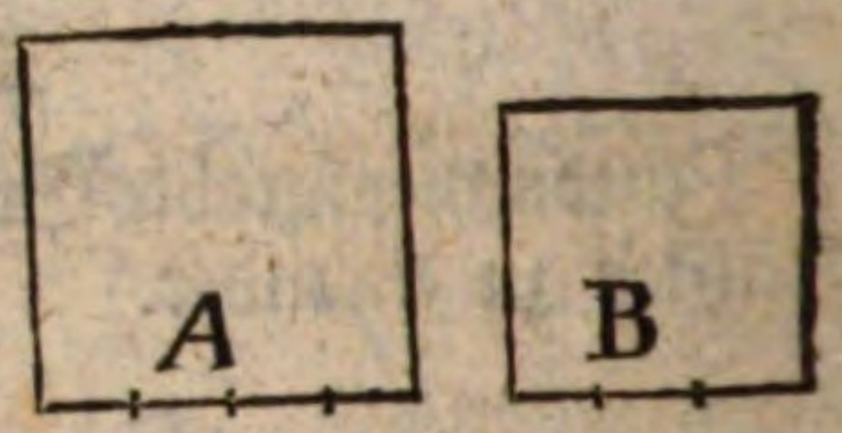
Grössen, A, B, welche sich nicht wie Zahlen zu einander verhalten, sind incommensurabel.

Denn wären sie commensurabel, so verhielten sie sich (10, 5. S.) wie Zahlen, gegen das Angenommene.

Der 9. Satz.

Wenn gerade Linien, A, B, in Länge commensurabel sind: so verhalten sich ihre Quadrate wie Quadratzahlen. Und wenn Quadrate sich wie Quadratzahlen verhalten: so sind ihre Seiten, A, B, in Länge commensurabel. Hingegen, wenn gerade Linien, A, B, in Länge incommensurabel sind: so verhalten sich ihre Quadrate nicht wie Quadratzahlen. Und wenn Quadrate sich nicht wie Quadratzahlen verhalten: so sind ihre Seiten, A, B, in Länge incommensurabel.

Erster Theil.



Wenn $A \cap B$, so verhalten sie sich (10, 5. S.) wie Zahlen, C, D. Demnach ist $A:B = C:D$. Nun ist (6, 20. S.) $A:B = \square A:\square B$, und (8, 11. S.) $C:D = C^2:D^2$. Folglich ist $\square A:\square B = C^2:D^2$.

Ein andrer Beweis. Da $A \cap B$, so ist (10, 5. S.) $A:B = C:D$. Nun sey $C.C = E$, $C.D = F$, $D.D = G$. Folglich ist (7, 17. S.) $C:D = E:F$. Nun ist $C:D = A:B =$ (6, 1. S.) $\square A$: Rect. A, B. Folglich ist $E:F = \square A$: Rect. A, B. Nun ist eben so $F:G = C:D = A:B =$ Rect. A, B : $\square B$. Folglich ist gleichförmig $\square A:\square B = E:G = C^2:D^2$.

Zweyter Theil.

Wenn $\square A:\square B = C^2:D^2$, aber (6, 20. S.) $\square A:\square B = (A:B)^2$, und (8, 11. S.) $C^2:D^2 = (C:D)^2$, so ist $A:B = C:D$, folglich (10, 6. S.) $A \cap B$.

Ein andrer Beweis. Wenn $\square A:\square B = E:G$, so sey, weil E, G, Quadratzahlen sind, $E = C^2$, $G = D^2$, $C.D = F$. Folglich (7, 17. S.) sind E, F, G, stetig proportionirt in der Verhältniß, C:D. Nun ist (6, 1. S.) Rect. A, B, zwischen A, B; und (8, 11. S.) F zwischen E, G. Folglich ist $\square A$: Rect. $A,B = E:F = C:D$. Nun ist (6, 1. S.) $\square A$: Rect. $A,B = A:B$. Demnach ist $A:B = C:D$, folglich (10, 6. S.) $A \cap B$.

Dritter Theil.

Wenn $A \cup B$, so verhalten sich die Quadrate der A, B, nicht wie Quadratzahlen. Denn wäre dies, so wären ihre Seiten, A, B, commensurabel, gegen das Angenommene.

Vierter Theil.

Wenn die Quadrate der A, B, sich nicht wie Quadratzahlen verhalten, so ist $A \cup B$. Denn wär dies nicht, so verhielten sich die Quadrate der A, B, wie Quadratzahlen, gegen das Angenommene.

Zusatz.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß die in Länge commensurabel, auch immer in Quadrat commensurabel sind, aber die in Quadrat, nicht immer auch in Länge. Desgleichen, daß die in Länge incommensurabel, nicht immer auch in Quadrat incommensurabel sind, aber die in Quadrat, auch immer in Länge. Denn

1. Wenn Linien in Länge commensurabel sind, so verhalten sich ihre Quadrate, wie Quadratzahlen, und sind folglich auch in Quadrat commensurabel.

2. Wenn Linien in Quadrat commensurabel sind, so verhalten sich ihre Quadrate wie Zahlen. Nun können dies entweder Quadratzahlen seyn, oder nicht. Ist das erste, so sind die Linien auch in Länge commensurabel; ist das letzte, so sind die Linien in Länge incommensurabel, folglich nur in Quadrat commensurabel.

3. Wenn Linien in Länge incommensurabel sind, so sind sie deshalb nicht immer auch in Quadrat incommensurabel. Denn es giebt Linien die in Quadrat commensurabel sind, und sich daher wie Zahlen verhalten, aber nicht wie Quadratzahlen. Solche sind in Länge incommensurabel, und doch in Quadrat commensurabel.

4. Wenn Linien in Quadrat incommensurabel sind, so sind sie auch in Länge incommensurabel. Denn wären sie in Länge commensurabel, so müsten sie auch in Quadrat commensurabel seyn, gegen das Angenommene.

Der 10. Satz.

Wenn vier Grössen, A, B, C, D, proportionirt, und die beyden ersten, A, B, entweder commensurabel, oder incommensurabel sind: so sind auch die beyden letzten, C, D, im ersten Fall commensurabel, im andern incommensurabel.

Es ist A:B = C:D. Sind nun A, B, commensurabel, so verhalten sie sich (10, 5. S.) wie Zahlen. Dies gielt folglich auch von C, D. Folglich (10, 6. S.) sind C, D, auch commensurabel.

Sind aber A, B, incommensurabel, und es wären C, D, commensurabel, so verhielten sich C, D, wie Zahlen, folglich auch A, B, folglich wären A, B, commensurabel gegen das Angenommene.

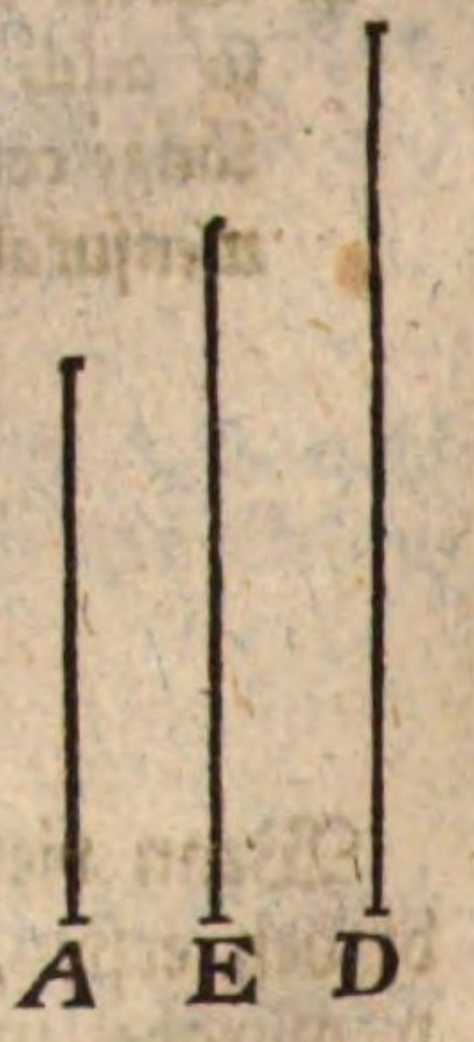
Lehnsatz.

Da (8, 26. S.) ähnliche Flächenzahlen sich wie Quadratzahlen verhalten, und die, so sich wie Quadratzahlen verhalten, ähnliche Flächenzahlen sind: so folgt, daß die, so nicht ähnliche Flächenzahlen sind, das ist, deren Seiten nicht proportionirt sind, sich auch nicht wie Quadratzahlen verhalten. Denn verhielten sie sich so, so wären sie ähnliche Flächenzahlen, gegen das Angenommene.

Der 11. Satz.

Zu einer gegebnen geraden Linie, A, zwey andre zu finden, welche mit ihr incommensurabel sind, und zwar die eine nur in Länge, die andre aber auch in Quadrat.

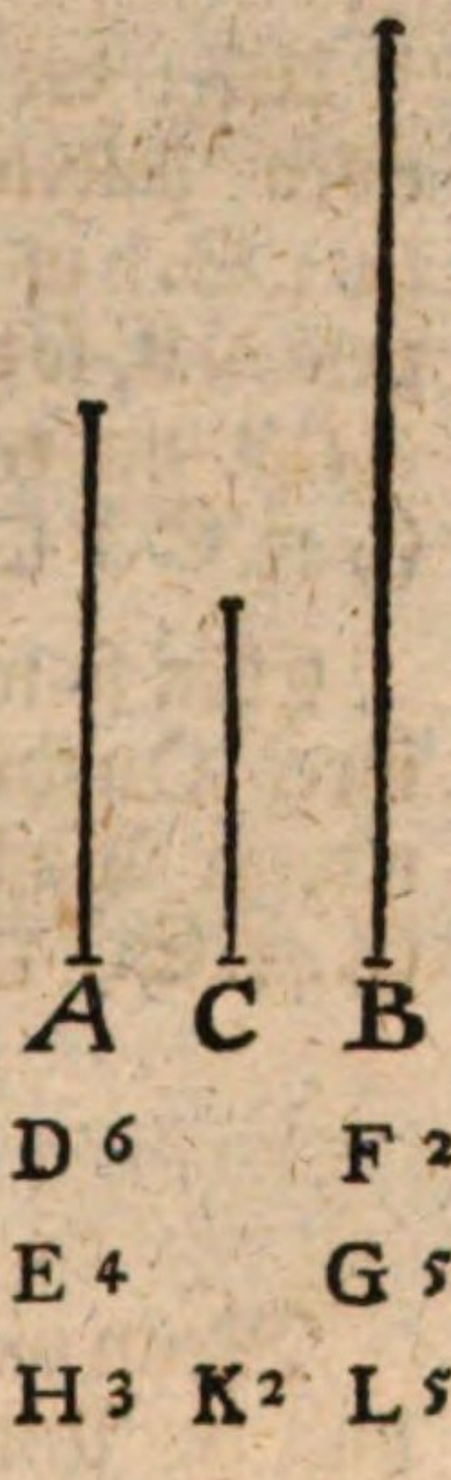
Nimm zwey Zahlen, B, C, welche sich nicht wie Quadratzahlen verhalten, das ist, welche nicht ähnliche Flächenzahlen sind, und mache (10, 6. Zus.) B:C = □A : □D. Folglich ist (10, 9. S.) A ∪ D. Zwischen A, D, suche die mittlere Proportionalgrösse, E, so ist (6, 20. Zus.) A:D = □A : □E. Nun sind die beyden ersten incommensurabel, folglich (10, 10. S.) auch die beyden letzten, folglich A ∪ E. Demnach sind D, E, die verlangten Linien.



Der 12. Satz.

Zwey Grössen, A, B, welche mit einer dritten, C, commensurabel, sind selbst commensurabel.

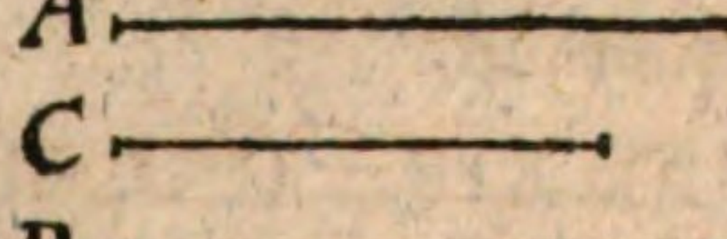
Da A sowohl, als B, ∩C, so verhalten sie sich zur C (10, 5. S.) wie Zahlen. Es sey daher A:C = D:E, und C:B = F:G. Nimm in den gegebnen Verhältnissen drey stetige Proportionalzahlen, H, K, L, so daß H:K = D:E = A:C, und K:L = F:G = C:B, folglich ist (5, 23. S.) gleichförmig A:B = H:L, folglich (10, 6. S.) A∩B.



Der 13. Satz.

Zwey Grössen, A, B, von denen die eine, A, mit einer dritten, C, commensurabel, die andre, B, aber incommensurabel, sind incommensurabel.

Wäre B∩A, so wäre, weil C∩A, (10, 12. S.) auch B∩C, gegen das Angenommene.



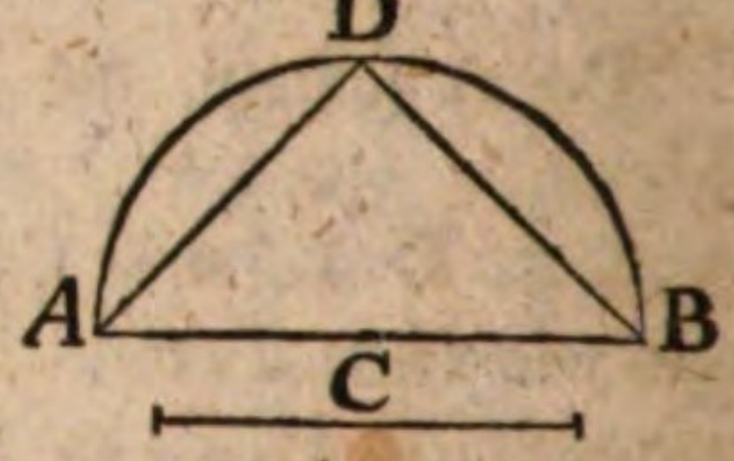
Der 14. Satz.

Wenn zwey Grössen, A, B, commensurabel sind, und die eine, A, mit irgend einer Grösse, C, incommensurabel ist: so ist die andre, B, mit eben derselben, C, auch incommensurabel.

Wäre B∩C, so wäre, weil B∩A, (10, 12. S.) auch A∩C, gegen das Angenommene.

Lehnsatz.

Es sind zwey ungleiche gerade Linien, AB, C, gegeben; man soll den Unterschied ihrer Quadrate finden.

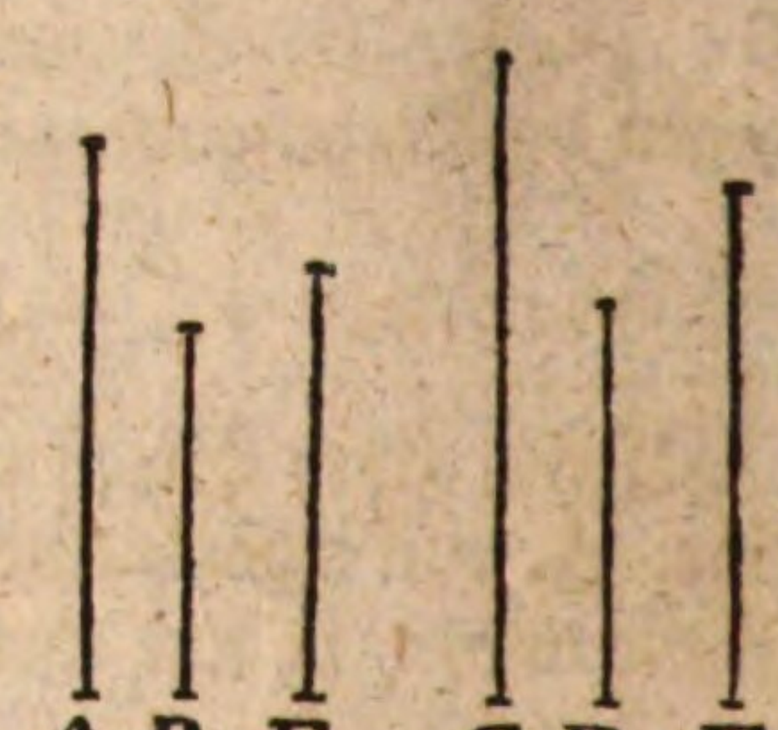


Ueber der grössern, AB, beschreibe einen halben Cirkel, ADB, trage (4, 1. S.) in derselben AD = C, und ziehe DB, so ist offenbar, daß (3, 31. S.) ADB ein rechter Winkel, und daß (1, 47. S.) □AB − □C = □DB.

Eben so wird, wenn AD, DB, gegeben sind, die Summe ihrer Quadrate gefunden, wenn man AD, DB, nach einem rechten Winkel zusammensetzt, und AB ziehet, weil alsdenn (1, 47. S.) □AB = □AD + □DB.

Der 15. Satz.

Wenn vier gerade Linien, A, B, C, D, proportionirt sind, und der Unterschied der Quadrate der beyden ersten, A, B, das Quadrat einer Linie, E, welche mit der ersten, A, in Länge entweder commensurabel oder incommensurabel ist: so ist auch der Unterschied der Quadrate der beyden letzten, C, D, das Quadrat einer Linie, F, welche mit der dritten, C, in Länge im ersten Fall commensurabel, im andern incommensurabel ist.

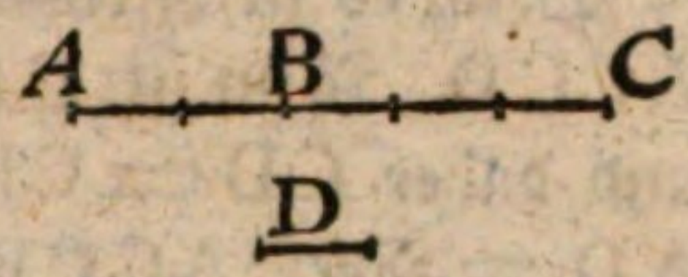


Da A:B = C:D, so ist (6, 22. Zus.) □A : □B = □C : □D. Nun ist □A = □E + □B, und □C = □F + □D. Folglich ist □E + □B : □B = □F + □D : □D, folglich (5, 17. S.) getrennt □E : □B = □F : □D, folglich (6, 22. S.) E:B = F:D, folglich (5, 4. S.) umgekehrt B:E = D:F. Nun ist A:B = C:D. Folglich ist (5, 22. S.) gleichförmig A:E = C:F. Folglich (10, 10. S.) wenn A ∩ E, so ist C ∩ F; wenn aber A ∪ E, so ist C ∪ F.

Der

Der 16. Satz.

Wenn zwey Grössen, AB, BC, commensurabel sind: so ist ihr Aggregat, AC, mit beyden commensurabel. Und wenn das Aggregat, AC, mit einer von beyden, AB, commensurabel ist: so sind beyde Grössen, AB, BC, commensurabel.

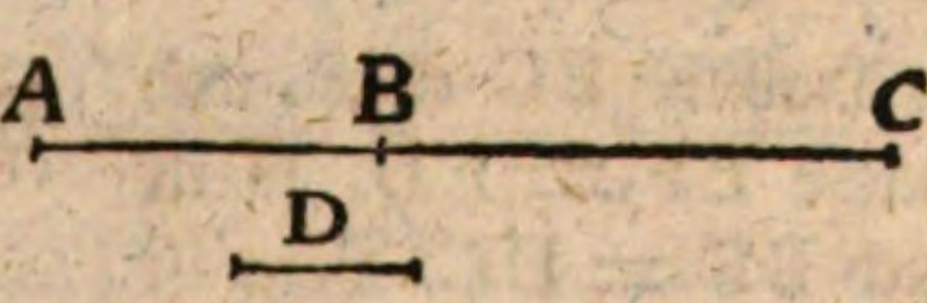


Wenn $AB \cap BC$, so messe sie eine Grösse, D, welche daher auch die AC mißt. Demnach werden alle drey Grössen von D gemessen, und sind daher commensurabel.

Wenn $AC \cap AB$, so messe sie D, welche daher auch BC mißt. Demnach werden AB, BC, von D gemessen, und sind daher commensurabel.

Der 17. Satz.

Wenn zwey Grössen, AB, BC, incommensurabel sind: so ist ihr Aggregat, AC, mit beyden incommensurabel. Und wenn das Aggregat, AC, mit einer von beyden, AB, incommensurabel ist: so sind beyde Grössen, AB, BC, incommensurabel.



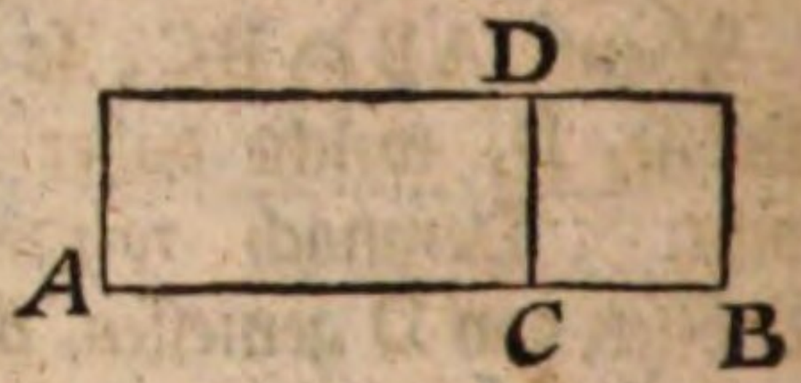
Wenn $AB \cup BC$, und es wäre nicht $AC \cup AB$, so würden AC, AB, von irgend einer Grösse, D, gemessen, welche daher auch die BC mißt. Demnach würden AB, BC, von D gemessen, und wären daher commensurabel, gegen das Angenommene. Eben so wird bewiesen, daß auch $AC \cup BC$.

Wenn $AC \cup AB$, und es wäre nicht $AB \cup BC$, so würden AB, BC, von irgend einer Grösse, D, gemessen, welche daher auch AC mißt. Demnach würden AB, AC, von D gemessen, und wären daher commensurabel, gegen das Angenommene. Eben dies gilt auch, wenn man annimmt, daß $AC \cup BC$.

Lehnsatz.

Das Rectangel, AD, auf dem einen Abschnitte, AC, einer geraden Linie, AB, dessen Ergänzung, DB, auf dem andern Abschnitte, CB, ein Quadrat; ist aus den beyden Abschnitten, AC, CB, solcher geraden Linie, AB.

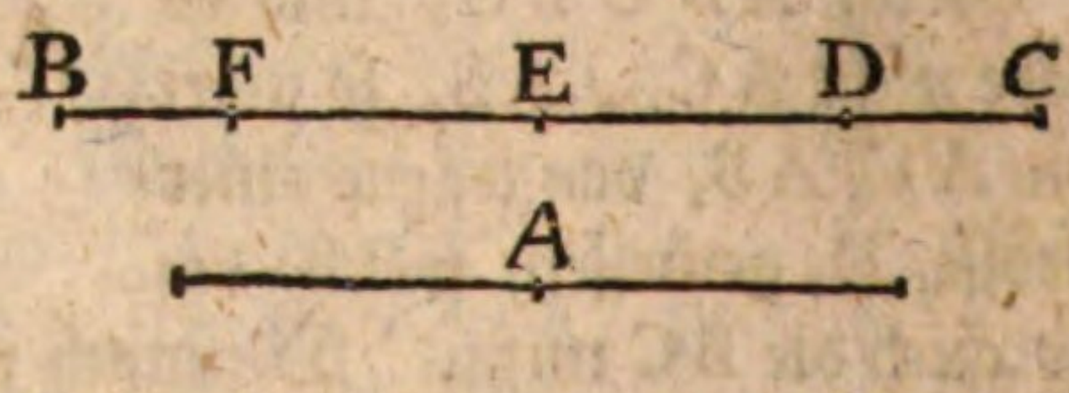
Denn es ist offenbar AD = Rect. ACCD. Nun ist DB ein Quadrat, und daher CD = CB. Folglich ist AD = Rect. ACCB.



Der 18. Satz.

Wenn zwey ungleiche gerade Linien, A, BC, gegeben sind, und das Rectangel aus den Abschnitten der grössern, BC, dem vierten Theil des Quadrats der kleinern, A, gleich ist, solche Abschnitte, BD, DC, aber in Länge commensurabel sind: so ist der Unterschied der Quadrate beyder gegebnen Linien, A, BC, das Quadrat einer mit der grössern, BC, in Länge commensurabeln Linie. Desgleichen, wenn der Unterschied der Quadrate zweyer ungleichen geraden Linien, A, BC, das Quadrat einer mit der grössern, BC, in Länge commensurabeln Linie ist, und das Rectangel aus den Abschnitten der grössern, BC, dem vierten Theil des Quadrats der kleinern, A, gleich ist: so sind solche Abschnitte, BD, DC, in Länge commensurabel.

Halbire BC in E, und mache EF = ED, so ist auch BF = DC. Nun ist (2, 5. S.) Rect. BDDC + □ED = □EC. Folglich



auch 4 Rect. BDDC + 4 □ED = 4 □EC. Nun ist vermöge des Angenommenen 4 Rect. BDDC = □A, und (weil 2 ED = DF) 4 □ED = □DF, desgleichen (weil 2 EC = BC) 4 □EC = □BC. Demnach ist □A + □DF = □BC, folglich □BC − □A = □DF, das ist, der Unterschied der Quadrate beyder Linien, A, BC, ist das Quadrat der Seite, DF. Demnach ist zu beweisen: wenn BD ∩ DC, daß alsdenn BC ∩ DF, und wenn BC ∩ DF, daß alsdenn BD ∩ DC.

Wenn

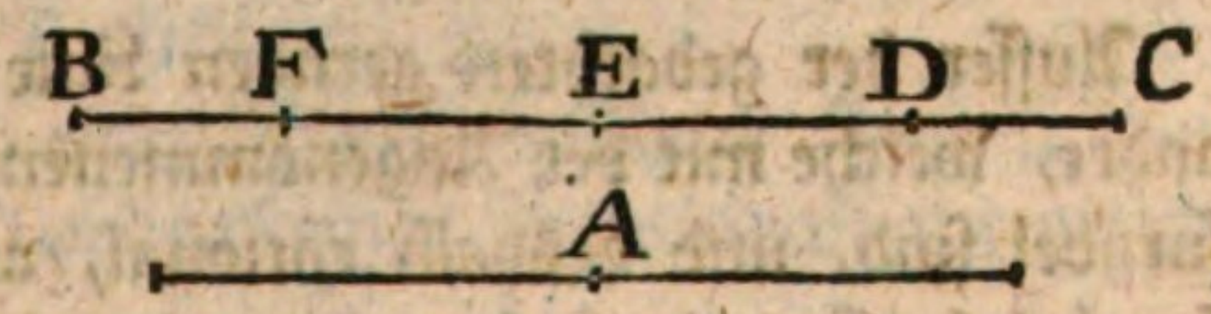
Wenn BD ∩ DC, so ist (10, 16. S.) BC ∩ DC. Nun ist DC = BF, und daher (10, 6. S.) DC ∩ DC + BF. Folglich ist BC ∩ DC + BF, folglich (10, 16. S.) BC ∩ DF.

Wenn BC ∩ DF, so ist (10, 16. S.) BC ∩ BF + DC. Nun ist (weil DC = BF) BF + DC ∩ DC. Folglich ist BC ∩ DC, folglich (10, 16. S.) BD ∩ DC.

Der 19. Satz.

Wenn zwey ungleiche gerade Linien, A, BC, gegeben sind, und das Rectangel aus den Abschnitten der grössern, BC, dem vierten Theil des Quadrats der kleinern, A, gleich ist, solche Abschnitte, BD, DC, aber in Länge incommensurabel sind: so ist der Unterschied der Quadrate beyder gegebnen Linien, A, BC, das Quadrat einer mit der grössern, BC, in Länge incommensurabeln Linie. Desgleichen, wenn der Unterschied der Quadrate zweyer ungleichen geraden Linien, A, BC, das Quadrat einer mit der grössern, BC, in Länge incommensurabeln Linie ist, und das Rectangel aus den Abschnitten der grössern, BC, dem vierten Theil des Quadrats der kleinern, A, gleich ist: so sind solche Abschnitte, BD, DC, in Länge incommensurabel.

Construire alles, wie beym vorhergehenden Satze, so ist hier gleichfals 4 Rect. BD DC = □ A, und □ BC — □ A = □ DF.



Ist nun BD ∪ DC, so ist (10, 17. S.) BC ∪ DC. Nun ist DC = BF, und daher DC ∩ BF + DC. Folglich ist (10, 14. S.) BC ∪ BF + DC, folglich (10, 17. S.) BC ∪ DF.

Ist BC ∪ DF, so ist (10, 17. S.) BC ∪ BF + DC. Nun ist (10, 6. S.) BF + DC ∩ DC. Folglich (10, 14. S.) ist BC ∪ DC, folglich (10, 17. S.) BD ∪ DC.

Erste Anmerkung.

Da (10, 6. Def.) Rationallinien diejenigen heissen, welche mit einer angenommenen geraden Linie entweder in Länge und Quadrat, oder in Quadrat allein commensurabel sind, und (10, 9. Zus.) alle Linien, welche in Länge commensurabel, auch in Quadrat commensurabel sind; diejenigen hingegen, welche in Quadrat commensurabel sind, in Länge entweder commensurabel, oder incommensurabel seyn können: so entstehen auf dreyerley Art Rationallinien.

1. Wenn eine gerade Linie mit der Angenommenen in Länge, folglich auch in Quadrat, commensurabel ist. Diese heißt rational, und mit der Angenommenen in Länge und Quadrat commensurabel.

2. Wenn eine gerade Linie mit der Angenommenen in Quadrat commensurabel, und es auch in Länge ist. Auch diese heißt rational und mit der Angenommenen in Länge und Quadrat commensurabel.

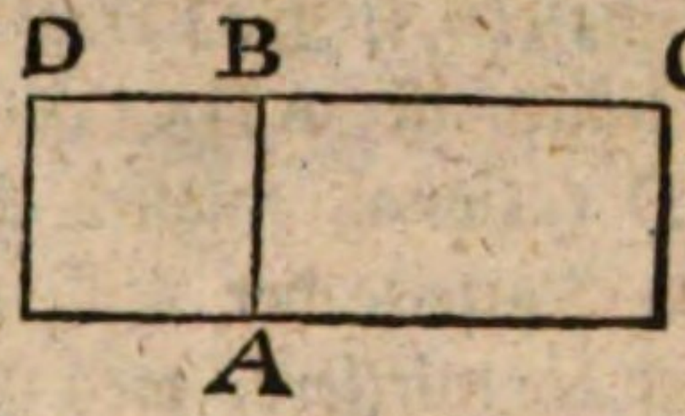
3. Wenn eine gerade Linie mit der Angenommenen in Quadrat commensurabel, aber in Länge incommensurabel ist. Diese heißt rational, und mit der Angenommenen nur in Quadrat commensurabel.

Zweyte Anmerkung.

Ausser der gedachten geraden Linie, giebt es noch unzählige andre, welche mit der Angenommenen nur in Quadrat commensurabel sind, und deshalb rational, auch mit einander commensurabel heissen, in so fern sie rational sind; sonst aber mit einander entweder in Länge und Quadrat, oder in Quadrat allein commensurabel sind. Ist das erste, so heissen sie rational und in Länge commensurabel, um anzuzeigen, daß sie es auch in Quadrat sind. Ist das zweyte, so heissen sie rational nur in Quadrat commensurabel. Daß aber die Rationallinien commensurabel sind, ist (10, 12. S.) offenbar, weil sie alle mit der Angenommenen commensurabel sind, und eben deswegen rational heissen.

Der 20. Satz.

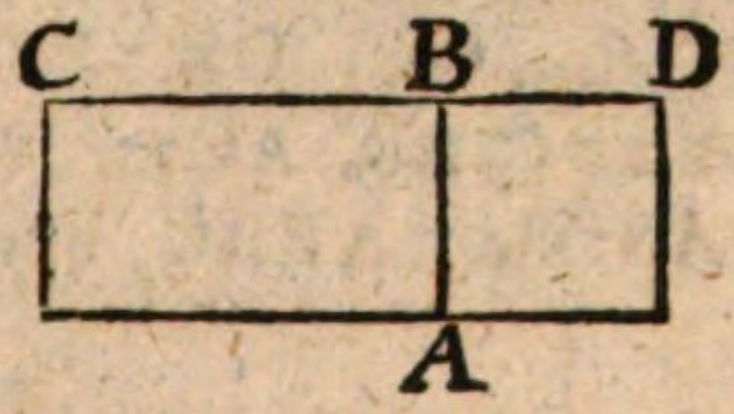
Jedes Rectangel, AC, aus rationalen in Länge commensurabeln Seiten, AB, BC, ist rational.



Beschreibe von AB, das Quadrat AD, welches daher rational ist. Da AB ∩ BC, und AB = BD, so ist BD ∩ BC. Nun ist (6, 1. S.) BD : BC = DA : AC. Folglich ist (10, 10. S.) DA ∩ AC. Nun ist DA rational, folglich auch AC.

Der 21. Satz.

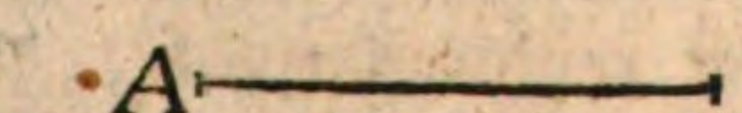
Ist von den Seiten eines Rationalrectangels, AC, die eine, AB, rational: so ist die andre, BC, auch rational, und mit der ersten, AB, in Länge commensurabel.



Von AB mache das Quadrat AD, welches daher rational ist. Nun ist auch AC rational. Folglich ist (10, 19. Anm.) AD ∩ AC. Nun ist (6, 1. S.) AD : AC = DB : BC. Folglich ist auch DB ∩ BC, aber DB = AB, demnach AB ∩ BC. Nun ist AB rational, folglich auch BC. Demnach ist BC rational, und mit AB in Länge commensurabel.

Lehnsatz.

Die Quadratseite, A, einer Irrationalfigur (das ist, eine gerade Linie, A, deren Quadrat einer Irrationalfigur gleich) ist irrational.

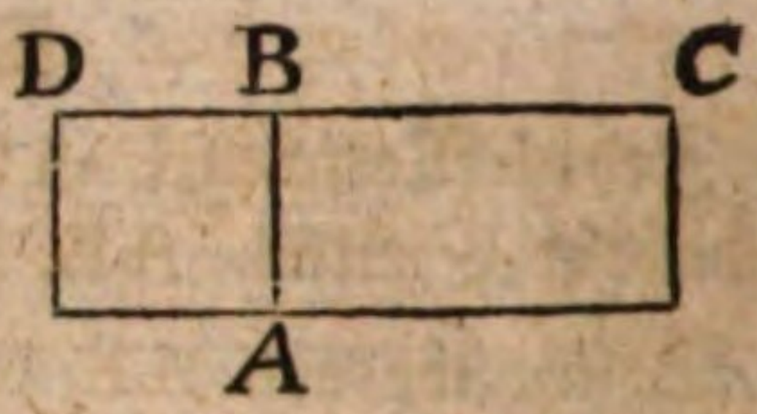


Denn wäre A rational, so wäre (10, 8. Def.) □A auch rational, gegen das Angenommene.

Der 22. Satz.

Jedes Rectangel, AC, aus rationalen nur in Quadrat commensurabeln Linien, AB, BC, ist irrational. Auch ist dessen Quadratseite irrational. Sie heisse **Mediallinie**.

Mache von AB das Quadrat AD, welches daher rational. Nun ist AB ⌢ BC, folglich AB ∪ BC, aber AB = BD, demnach BD ∪ BC. Nun ist (6, 1. S.) BD : BC = AD : AC. Folglich ist AD ∪ AC. Nun ist AD rational, folglich AC irrational, folglich (10, 11. Def.) die Quadratseite der AC, irrational. Sie heißt aber Mediallinie, oder die mittlere, weil ihr Quadrat der AC, das ist, dem Rect. ABBC gleich, folglich sie die mittlere Proportionalgröße zwischen AB, BC, ist.



Lehnsatz.

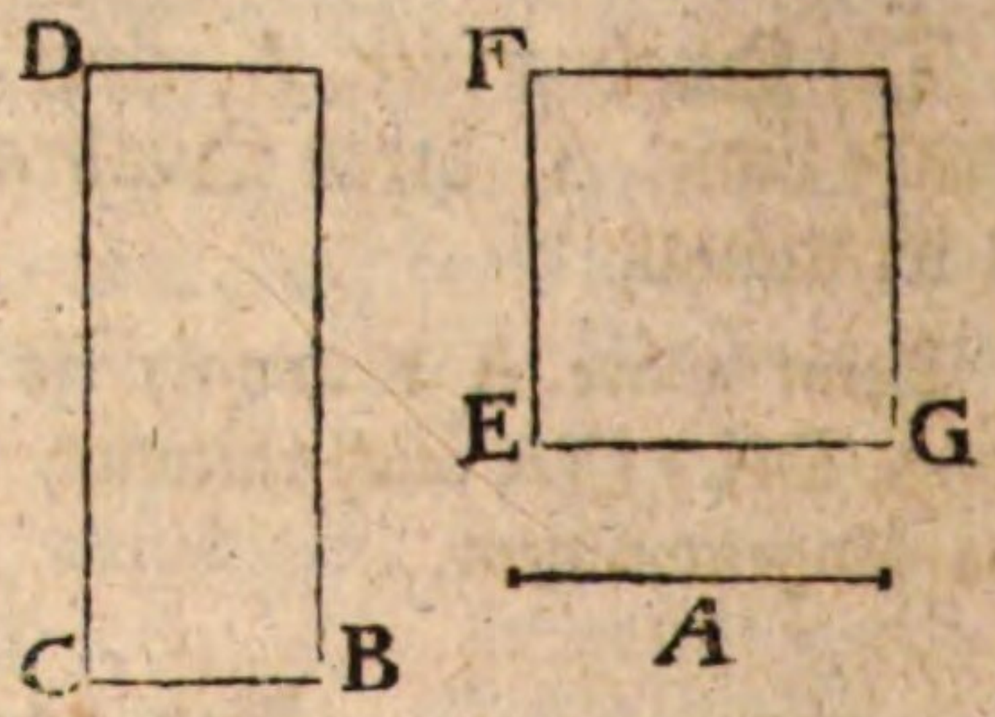
Von jeden zwey geraden Linien, AB, BC, verhält sich die erste zur zweyten, wie das Quadrat der ersten, zum Rectangel aus beyden.

Von AB mache das Quadrat AD, und vollende AC. Nun ist (6, 1. S.) DB : BC = DA : AC, aber DB = AB, DA = □AB, AC = Rect. ABBC. Demnach ist AB : BC = □AB : Rect. ABBC, also auch BC : AB = Rect. ABBC : □AB.

Der 23. Satz.

Ist von den Seiten eines Rectangels, BD, dessen Quadratseite, A, medial, die eine, BC, rational: so ist die andre, CD, auch rational, und mit der ersten, BC, in Länge incommensurabel.

Da A medial, so ist (10, 20. Zus.) □A = FG = Rect. GEEF, und GE, EF, sind rational, nur in Quadrat commensurabel. Nun war auch angenommen □A = BD. Folglich ist BD = FG, folglich (6, 14. S.) BC : EG = EF : CD, folglich (6, 22. S.) □BC : □EG = □EF : □CD. Nun sind BC, EG, rational, und daher □BC ∩ □EG. Folglich (10, 10. S.) ist auch □EF ∩ □CD. Nun ist □EF rational, folglich auch □CD, folglich auch CD.

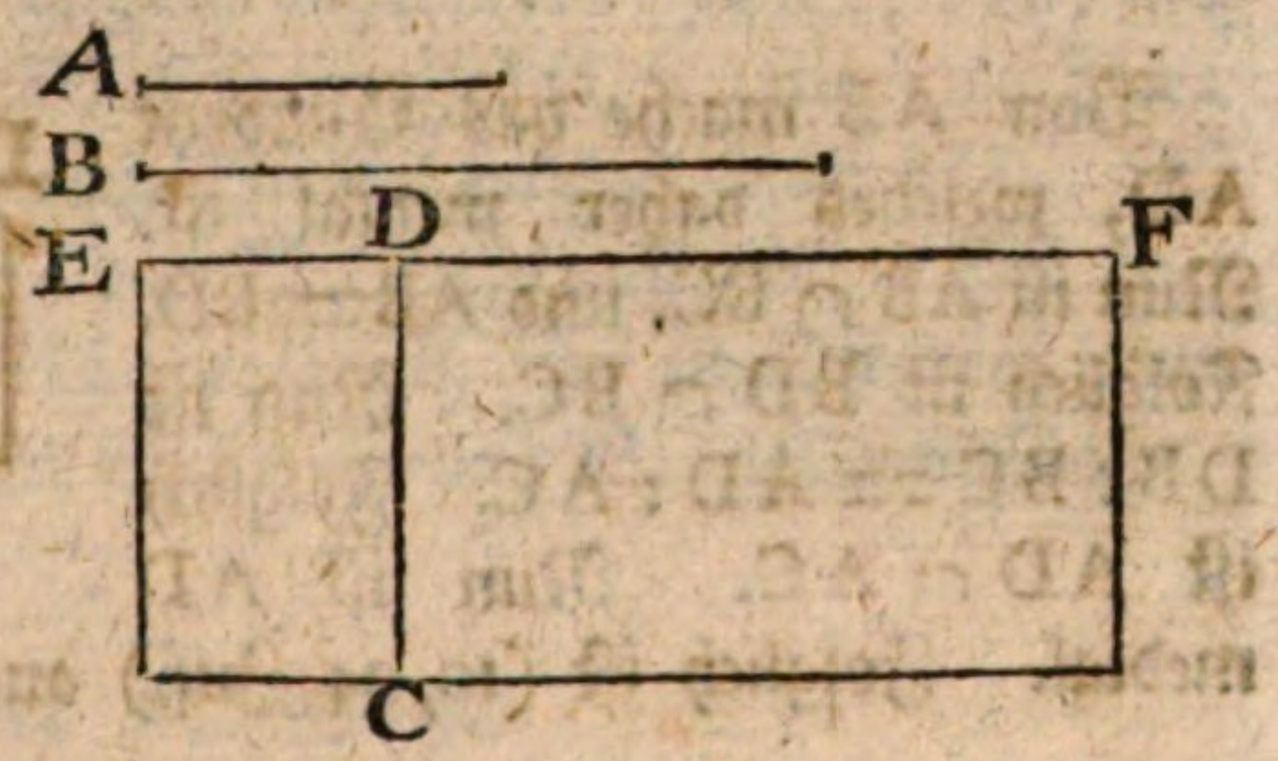


Da

Da GE ⌢ EF, das ist, GE ∪ EF, und (10, 22. Lehns.) EF : EG = □EF : Rect. FEEG, so ist □EF ∪ Rect. FEEG. Nun ist □EF ∩ □CD, und Rect. FEEG ∩ Rect. DCCB, weil beyde Rectangel dem □A gleich sind. Folglich ist (10, 13. S.) □CD ∪ Rect. DCCB. Nun ist (10, 22. Lehns.) □CD : Rect. DCCB = CD : BC. Folglich ist CD ∪ BC.

Der 24. Satz.

Jede Linie, B, welche mit der Medialen, A, commensurabel, ist auch medial.



Es sey eine Rationale CD. Mache CE = □A, so ist (10, 23. S.) ED rational und mit CD in Länge incommensurabel. Mache CF = □B. Nun ist A ∩ B, und daher (10, 9. Zus.) □A ∩ □B. Folglich ist CE ∩ CF. Nun ist (6, 1. S.) CE : CF = ED : DF. Folglich ist ED ∩ DF. Nun ist (10, 23. S.) ED, rational und mit CD in Länge incommensurabel. Folglich (10, 13. S.) ist DF rational und mit CD in Länge incommensurabel, folglich sind CD, DF, rational, nur in Quadrat commensurabel, und daher CF irrational. Nun ist □B = CF. Folglich (10, 22. S.) ist B irrational, genannt die Mediale.

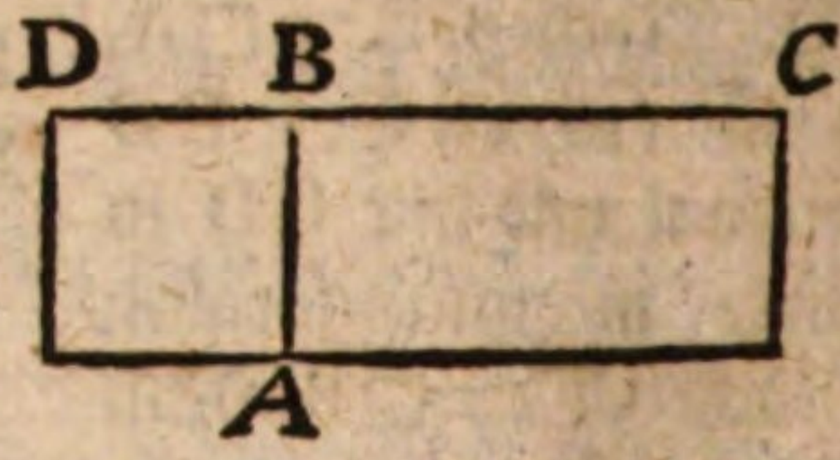
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß jedes Rectangel, welches mit einer Medialfigur commensurabel, auch medial sey. Denn ihre Quadratseiten sind nur in Quadrat commensurabel, und eine derselben, folglich auch die andre, medial. Was aber von Rationalen gesagt worden, das gilt auch von Medialen, nämlich daß die mit einer Medialen in Länge commensurable Linie, medial heisse, und mit ihr nicht nur in Länge, sondern auch in Quadrat commensurabel sey. Ist aber eine Linie mit einer Medialen in Quadrat

drat commensurabel: so ist sie es entweder auch in Länge, oder nicht, und heißt im ersten Fall gleichfalls Medial in Länge und Quadrat commensurabel; im andern hingegen Medial nur in Quadrat commensurabel. Eben dies gilt auch von allen andern Linien, welche mit einer Medialen, folglich auch mit einander, auf irgend eine der angezeigten Arten, commensurabel sind.

Der 25. Satz.

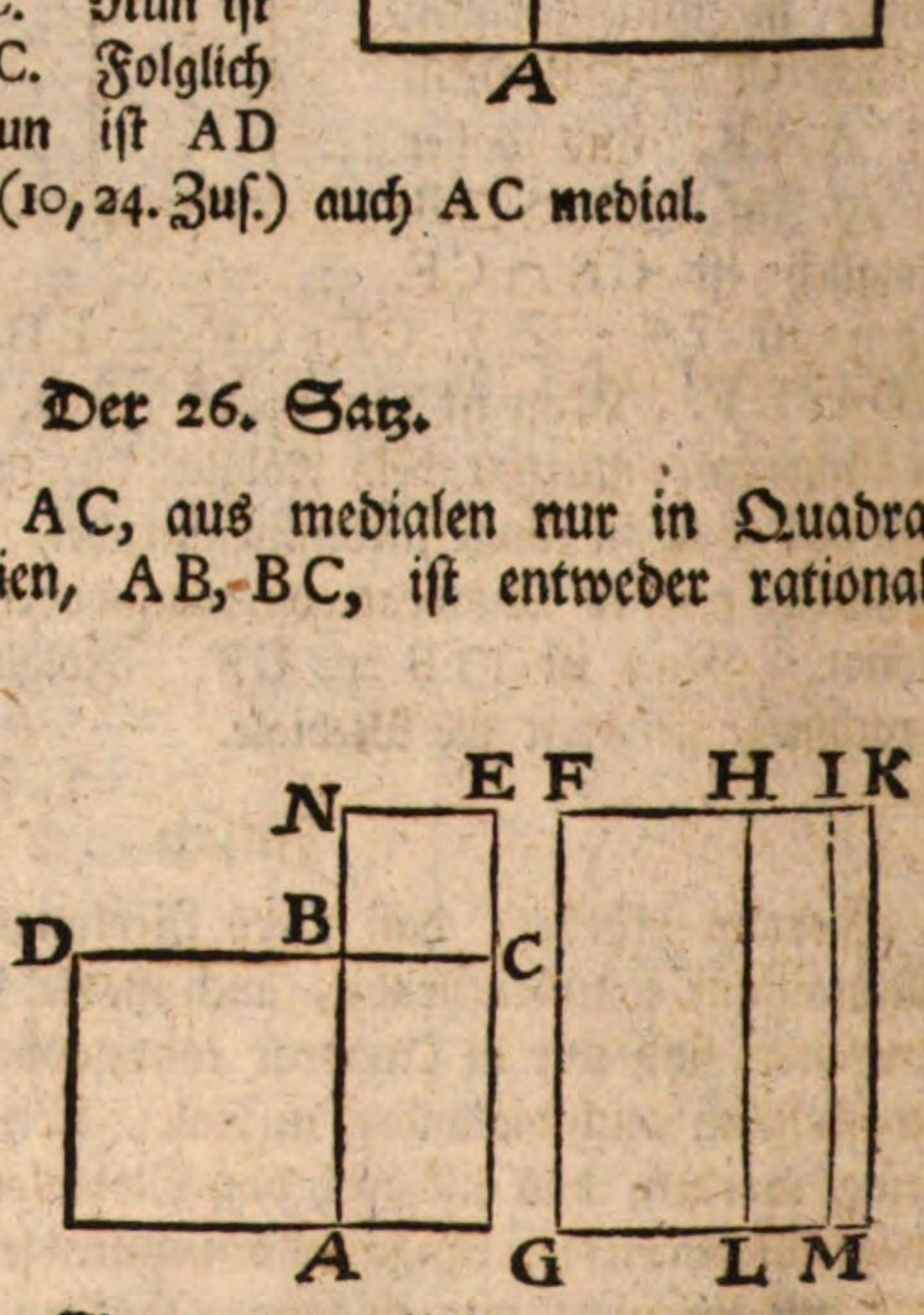
Jedes Rectangel, AC, aus medialen in Länge commensurabeln Linien, AB, BC, ist medial.



Von AB mache das Quadrat AD, welches daher medial ist. Nun ist AB ∩ BC, und AB = BD. Folglich ist BD ∩ BC. Nun ist DB : BC = AD : AC. Folglich ist AD ∩ AC. Nun ist AD medial. Folglich ist (10, 24. Zus.) auch AC medial.

Der 26. Satz.

Jedes Rectangel, AC, aus medialen nur in Quadrat commensurabeln Linien, AB, BC, ist entweder rational, oder medial.



Von AB, BC, mache die Quadrate AD, BE, welche daher medial sind. Nimm eine Rationale FG, und mache (1, 45. S.) GH = AD, LI = AC, MK = BE, folglich (1, 14. S.) sind FH, HI, IK, in Einer geraden Linie.

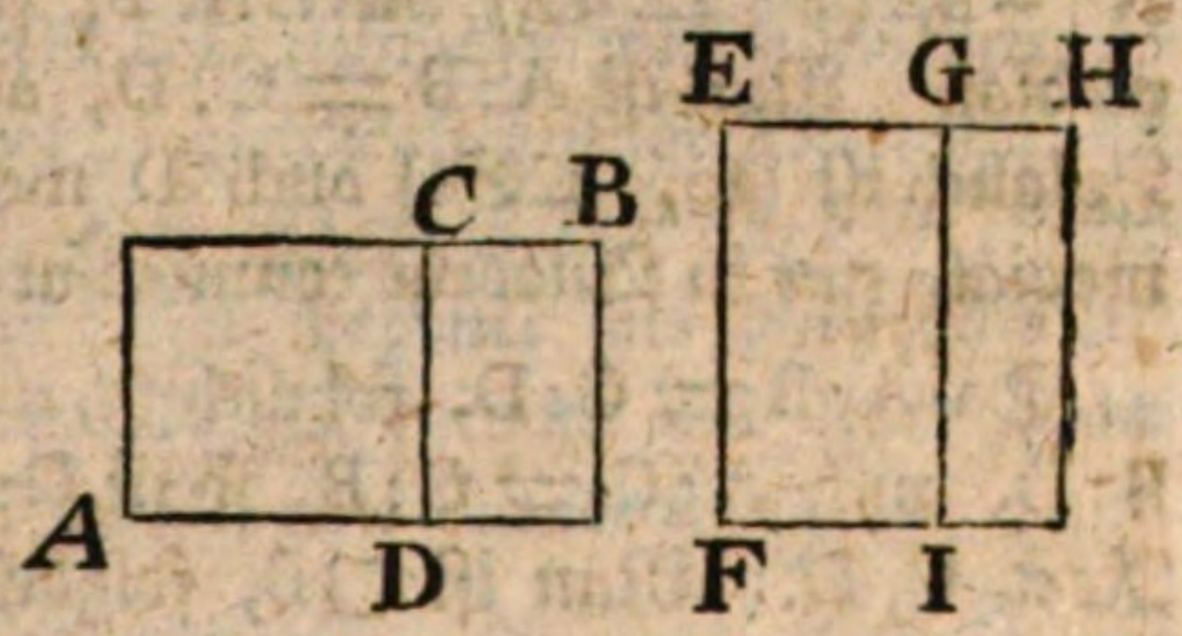
Da

Da AD, BE, medial, so sind die ihnen gleichen GH, MK, auch medial. Nun ist FG rational. Folglich (10, 23. S.) sind FH, IK, rational und mit FG in Länge incommensurabel. Nun ist AD ∩ BE, und daher GH ∩ MK, aber (6, 1. S.) GH : MK = FH : IK, folglich (10, 10. S.) FH ∩ IK. Demnach sind FH, IK, rational und in Länge commensurabel, folglich Rect. FHIK rational.

Da DB = AB, und BC = BN, so ist DB : BC = AB : BN. Nun ist (6, 1. S.) DB : BC = DA : AC, und AB : BN = AC : CN. Demnach ist DA : AC = AC : CN. Nun ist DA = GH, AC = LI, CN = MK. Demnach ist GH : LI = LI : MK, folglich auch FH : HI = HI : IK, folglich (6, 17. S.) Rect. FHIK = □HI. Nun ist Rect. FHIK rational, folglich auch □HI, folglich auch HI. Ist nun HI ∩ HL, so ist LI, das ist, AC, rational. Ist aber HI ∪ HL, so sind HI, HL, rational, nur in Quadrat commensurabel, folglich (10, 22. S.) LI, das ist, AC, medial.

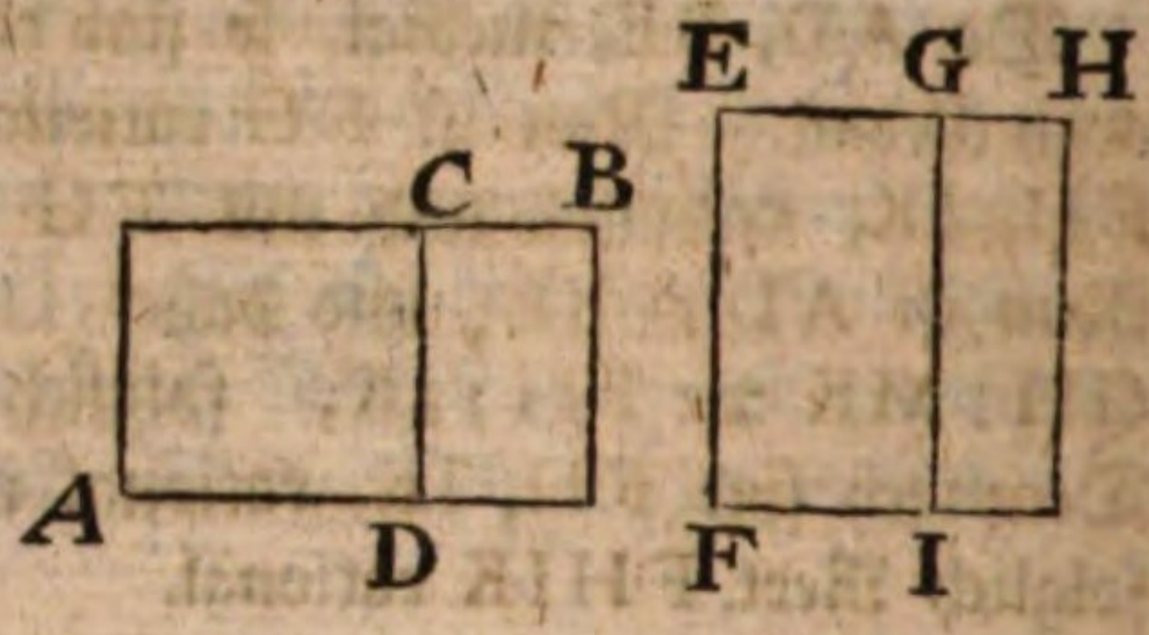
Der 27. Satz.

Der Unterschied, DB, zweyer Medialrectangel, AB, AC, ist nicht rational.



Gesetzt, es könnte DB rational seyn, so nimm die Rationale EF, und mache FH = AB, FG = AC. Folglich ist IH = BD, folglich wär auch IH rational. Da AB, AC, folglich auch FH, FG, medial, aber EF rational, so sind (10, 23. S.) EH, EG, rational und mit EF in Länge incommensurabel. Da IH rational und GI, das ist, EF, rational, so ist (10, 21. S.) GH rational und mit EF in Länge commensurabel. Nun war EG ∪ EF. Folglich ist (10, 13. S.) EG ∪ GH. Nun ist EG : GH = □EG : Rect. EGGH. Folglich ist □EG ∪ Rect. EGGH. Nun ist □EG ∩ □EG ⫞ □GH, weil beyde

beyde rational, und Rect. EGGH ∩ 2 Rect. EGGH. Folglich (10, 14. S.) □EG + □GH ∪ 2 Rect. EGGH, folglich (10, 17. S.) □EG + □GH ∪ □EG + □GH + 2 Rect. EGGH, das ist, (2, 4. S.) ∪ □EH.

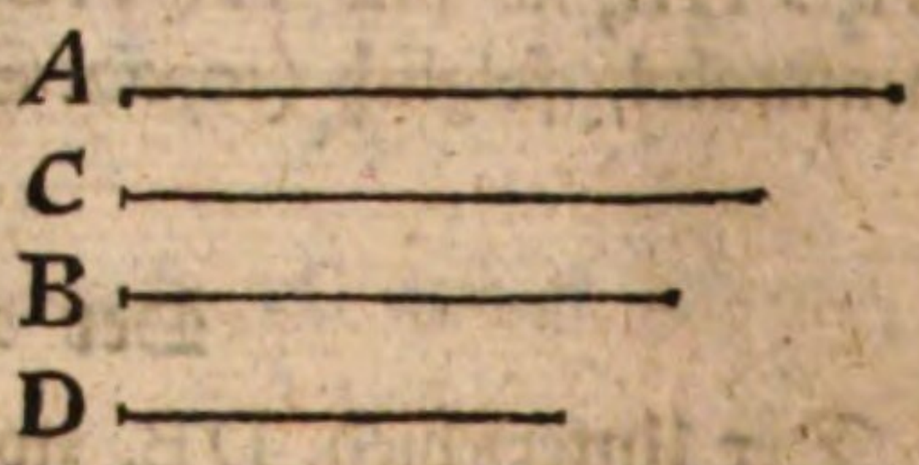


Nun ist □EG + □GH rational, folglich □EH, und daher auch EH, irrational. Nun war nach Obigen EH auch rational, welches wiedersprechend ist.

Der 28. Satz.

Zwey mediale, nur in Quadrat commensurable, Linien zu finden, so daß das Rectangel aus ihnen rational sey.

Es seyen zwey rationale nur in Quadrat commensurable Linien, A, B. Suche (6, 13. S.) die mittlere Proportionale C, und mache (6, 12. S.) A:B = C:D.



Da A:C = C:B, folglich Rect. A, B = □C, so ist, weil A ⌢ B, (10, 22. S.) Rect. A, B, folglich □C, folglich auch C, medial. Nun ist A:B = C:D, aber A ⌢ B, folglich C ⌢ D. Folglich ist (10, 24. S.) auch D medial. Demnach sind C, D, medial, nur in Quadrat commensurabel.

Da A:B = C:D, folglich (5, 16. S.) verwechselt A:C = B:D, auch A:C = C:B, so ist C:B = B:D, folglich □B = Rect. C, D. Nun ist □B, folglich auch Rect. C, D, rational.

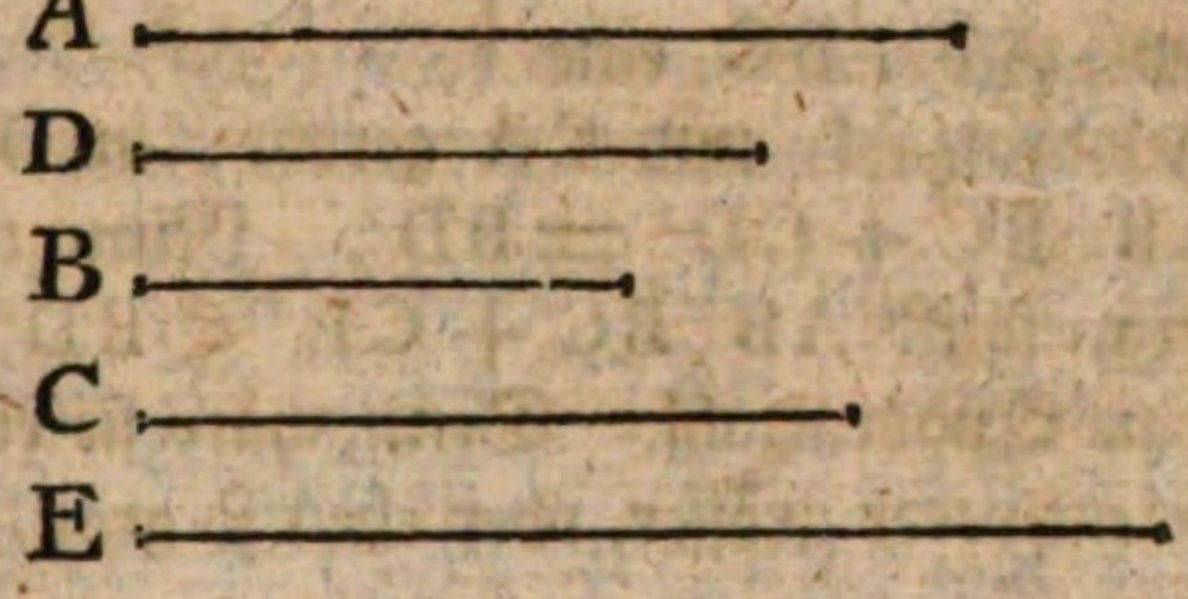
Der 29. Satz.

Zwey mediale, nur in Quadrat commensurable, Linien zu finden, so daß das Rectangel aus ihnen medial sey.

Es seyen drey rationale nur in Quadrat commensurable Linien, A, B, C. Suche zwischen A, B, die mittlere Proportionale, D, und mache B:C = D:E.

Da

Da A ⌒ B, so ist (10, 20. S.) Rect. A, B, das ist, (6, 17. S.) □ D, folglich D, medial. Nun ist B : C = D : E, und B ⌒ C. Folglich ist (10, 10. S.) D ⌒ E, folglich (10, 24. S.) auch E medial. Demnach sind D, E, medial, nur in Quadrat commensurabel.



Da B : C = D : E, folglich verwechselt B : D = C : E, aber B : D = D : A, so ist D : A = C : E, folglich (6, 16. S.) Rect. A, C = Rect. D, E. Nun ist (10, 22. S.) Rect. A, C, folglich auch Rect. D, E, medial.

Erster Lehnsatz.

Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Summe ebenfals eine Quadratzahl sey.

Es seyen zwey Zahlen, AB, BC, so wird, wenn die kleinere BC, von der grössern AB, weggenommen wird, sie seyen nun gerade oder ungerade, (9, 24. und 26. S.) allemal der Rest AC, gerade seyn. Halbire AC in D. Nun seyen AB, BC, entweder ähnliche Flächenzahlen, oder Quadratzahlen, welche gleichfals ähnliche Flächenzahlen sind. Nun ist (2, 6. S.) $AB . BC + CD^2 = BD^2$, und (9, 1. S.) AB . BC, das ist, das Product aus zwey ähnlichen Flächenzahlen, eine Quadratzahl. Demnach sind zwey Quadratzahlen gefunden, deren Summe eine Quadratzahl ist.

A 5 D 5 C 8 B

Zusatz. Hieraus erhellet zugleich, da $BD^2 - CD^2 = AB . BC$, daß zwey Quadratzahlen, BD^2, CD^2, gefunden, deren Unterschied, AB . BC, entweder eine Quadratzahl ist, oder nicht, je nachdem AB, BC, entweder ähnliche Flächenzahlen sind, oder nicht.

Zweyter Lehnsatz.

Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Summe keine Quadratzahl sey.

Es sey, wie vorher, AB . BC eine Quadratzahl, und CA gerade, in D halbirt, so ist gleichfalls $AB . BC + CD^2 = BD^2$. Nimmt man nun die Einheit DE weg, so ist $AB . BC + CE^2 < BD^2$, und, $AB . BC + CE^2$, keine Quadratzahl. Denn wäre sie eine Quadratzahl, so müste sie entweder grösser, oder eben so groß, oder kleiner, als BE^2 seyn.

A 2 G 2 H 1 D 1 E 1 F 3 C 8 B

1.) Es sey $AB . BC + CE^2 > BE^2$. Nun ist von BE^2 die nächst grössere Quadratzahl BD^2, welche aber schon $> AB . BC + CE^2$. Folglich ist das Angenommene unmöglich.

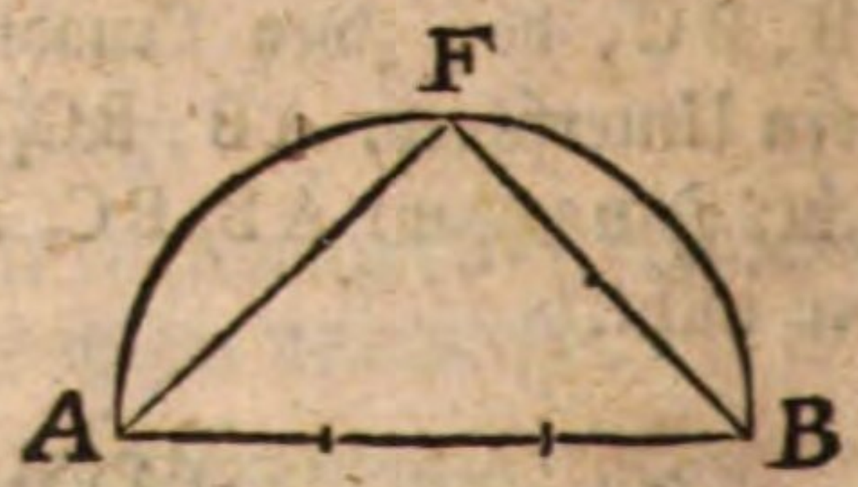
2.) Es sey $AB . BC + CE^2 = BE^2$. Nun sey $AG = 2DE$. Folglich, weil $AC = 2DC$, ist $GC = 2EC$, folglich wird GC in E halbirt, folglich ist (6, 2. S.) $GB . BC + CE^2 = BE^2$. Demnach wäre $AB . BC + CE^2 = GB . BC + CE^2$, folglich wäre $AB . BC = GB . BC$, folglich $AB = GB$, welches unmöglich.

3.) Es sey $AB . BC + CE^2 < BE^2$. Da nun von BE^2 die nächst kleinere Quadratzahl, BF^2, so sey $AB . BC + CE^2 = BF^2$. Nimmt man nun $AH = 2DF$, so ist wiederum $HC = 2CF$, folglich HC in F halbirt, folglich $HB . BC + CF^2 = BF^2$. Demnach wäre $AB . BC + CE^2 = HB . BC + CF^2$, welches unmöglich.

Der 30. Satz.

Zwey rationale nur in Quadrat commensurable Linien zu finden, so daß der Unterschied ihrer Quadrate das Quadrat einer mit der grössern in Länge commensurabeln Linie sey.

Es sey die Rationale, AB, und zwey Quadratzahlen, CD, DE, deren Unterschied CE, keine Quadratzahl sey. Ueber AB beschreibe den halben Cirkel AFB, mache (10, 6. Zus.) $DC : CE = \square AB : \square AF$, und ziehe FB. Nun sind DC, CE, keine Quadratzahlen.



C 5 E 4 D

Folglich

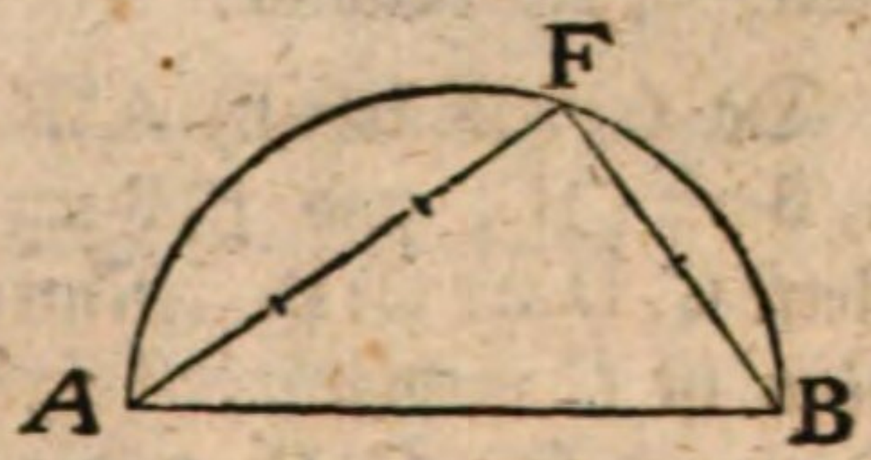
Folglich ist (10, 6. S.) □AB ∩ □AF, und, weil AB rational, AF auch rational, aber (10, 9. S.) AB ∪ AF. Demnach sind AB, AF, rational, nur in Quadrat commensurabel.

Da DC : CE = □AB : □AF, so ist (5, 19. und 1, 47. S.) zurückkehrend DC : DE = □AB : □BF. Nun sind CD, DE, Quadratzahlen. Folglich ist (10, 9. S.) AB ∩ BF. Nun ist (1, 47. S.) □AB = □AF + □BF, und daher □AB − □AF = □BF. Demnach ist das Gesuchte gefunden.

Der 31. Satz.

Zwey rationale nur in Quadrat commensurable Linien zu finden, so daß der Unterschied ihrer Quadrate, das Quadrat einer mit der grössern in Länge incommensurabeln Linie sey.

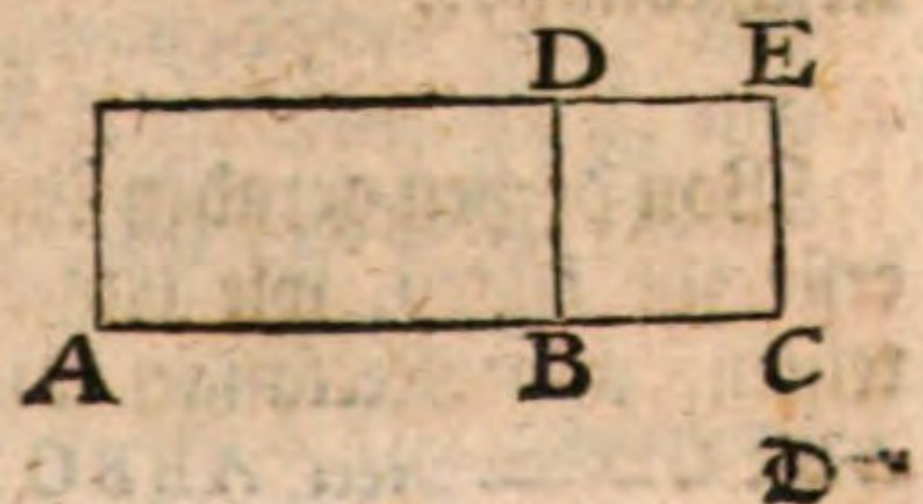
Es sey die Rationale AB, und zwey Quadratzahlen CE, ED, deren Summe CD, keine Quadratzahl sey. Ueber AB beschreibe den halben Cirkel AFB, mache (10, 6. Zus.) DC : CE = □AB : □AF, und ziehe FB, so wird, wie vorher, bewiesen, daß AB, AF, rational, nur in Quadrat commensurabel. Nun ist zurückkehrend DC : DE = □AB : □FB, und DC, DE, keine Quadratzahlen, folglich (10, 9. S.) AB ∪ FB. Demnach ist das Gesuchte gefunden.



Lehnsatz.

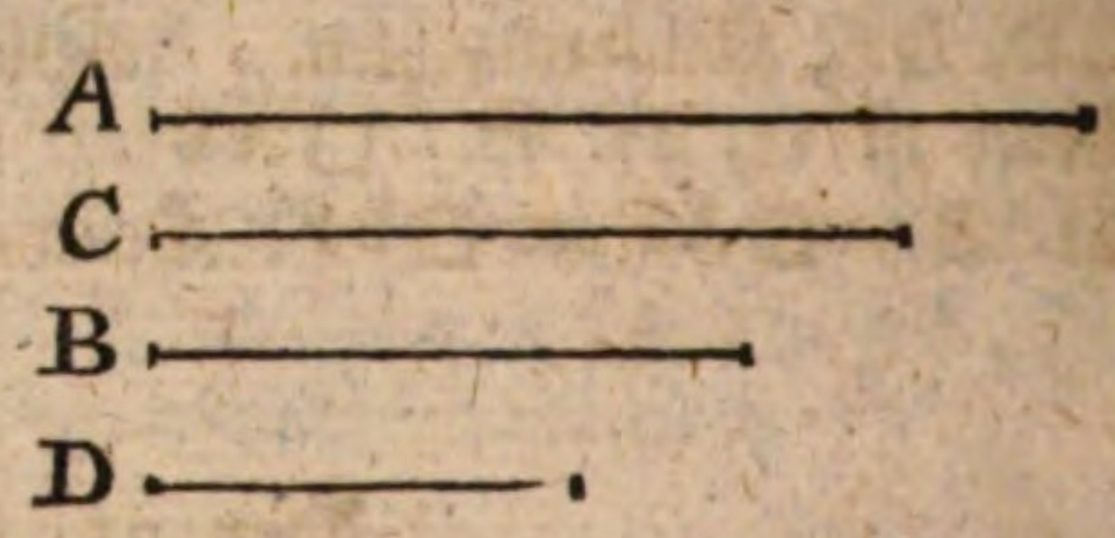
Von zweyen geraden Linien, AB, BC, verhält sich die grössere zur kleinern, wie das Rectangel aus beyden, zum Quadrat der kleinern, oder, AB : BC = Rect. ABBC : □BC.

Von BC mache das Quadrat BDEC, und vollende das Parallelogramm, AD, so ist (6, 1. S.) offenbar AB : BC = AD : DC = Rect. ABBC : □BC.



Der 32. Satz.

Zwey mediale nur in Quadrat commensurable Linien zu finden, so daß das Rectangel aus ihnen rational, und der Unterschied ihrer Quadrate, das Quadrat einer mit der grössern in Länge commensurabeln Linie, sey.



Es seyen (10, 30. S.) zwey rationale nur in Quadrat commensurable Linien, A, B, so daß der Unterschied ihrer Quadrate das Quadrat einer mit der grössern, A, in Länge commensurabeln Linie sey. Nun sey Rect. A, B = □C, so ist, weil (10, 22. S.) Rect. A, B, medial, auch □C, folglich C, medial. Nun sey □B = Rect. C, D, so ist, weil □B rational, auch Rect. C, D, rational.

Da (10, 22. Lehns.) A:B = Rect. A, B : □B, aber Rect. A, B = □C, und □B = Rect. C, D, so ist A:B = □C : Rect. C, D = C:D. Nun ist A ⌒ B. Folglich auch C ⌒ D. Nun ist C medial. Folglich (10, 24. S.) ist auch D medial. Demnach sind C, D, medial, und das Rect. C, D, rational.

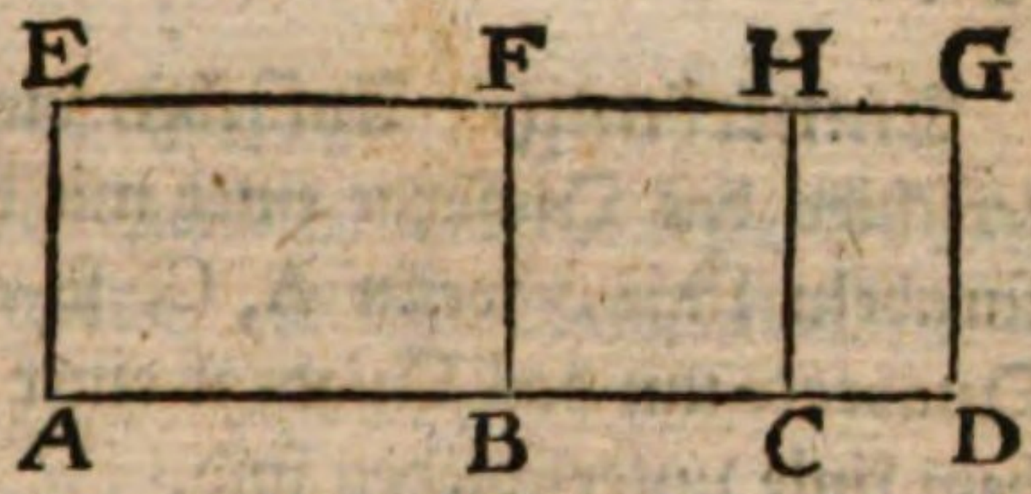
Da die Quadrate von A, B, um das Quadrat einer mit der grössern in Länge commensurabeln Linie unterschieden sind, und A:B = C:D, so sind auch (10, 15. S.) die Quadrate von C, D, um das Quadrat einer mit der grössern in Länge commensurabeln Linie unterschieden.

Anmerkung.

Auf eben die Art findet man auch zum Unterschied das Quadrat einer mit der grössern in Länge incommensurabeln Linie, wenn A, B, so angenommen worden, daß ihre Quadrate um das Quadrat einer mit der grössern in Länge incommensurabeln Linie unterschieden sind.

Lehnsatz.

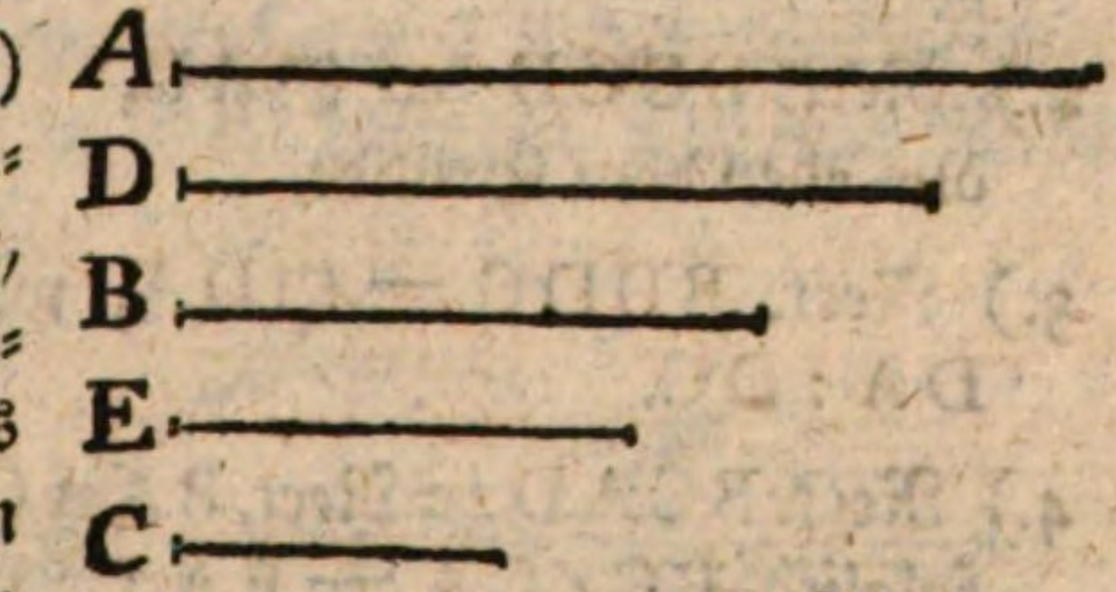
Von dreyen geraden Linien, AB, BC, CD, verhält sich die erste zur letzten, wie das Rectangel aus der ersten und mittelsten, zum Rectangel aus der mittelsten und letzten, oder, AB : CD = Rect. ABBC : Rect. BCCD. Auf



Auf AB errichte in A den Perpendikel AE = BC, und vollende die Parallelogramme, AG, AH, AF, so ist (6, 1. S.) AB : BC = AF : BH, und BC : CD = BH : CG, folglich gleichförmig AB : CD = AF : CG, und es ist AF = Rect. ABBC, weil AE = BC, auch CG = Rect. BCCD, weil CH = BC.

Der 33. Satz.

Zwey mediale nur in Quadrat commensurable Linien zu finden, so daß das Rectangel aus ihnen medial, und der Unterschied ihrer Quadrate das Quadrat einer mit der grössern in Länge commensurabeln Linie sey.



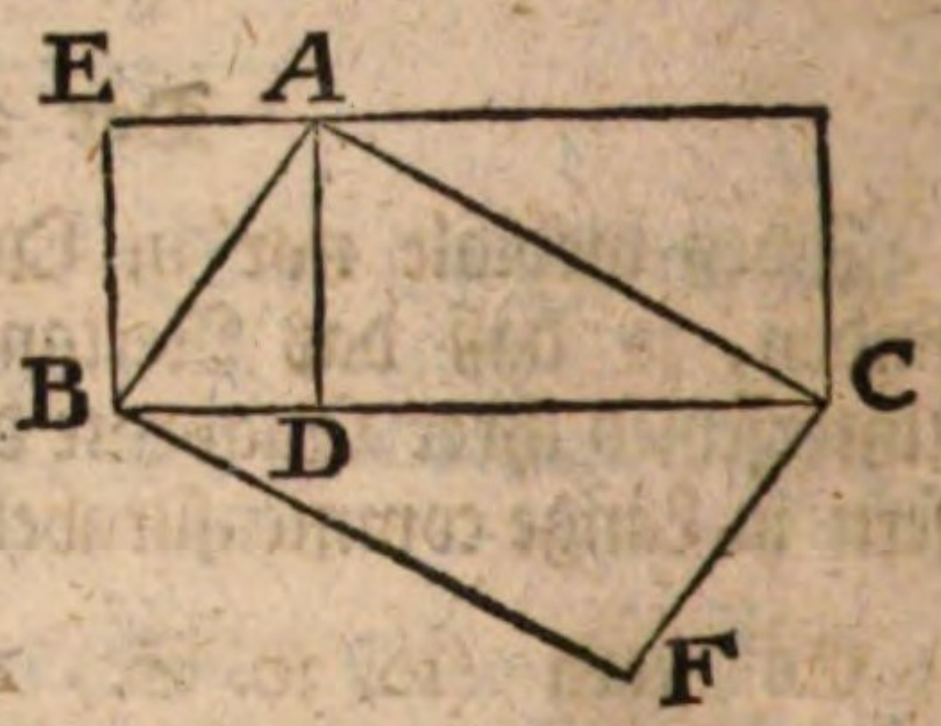
Es seyen (10, 30. S.) drey rationale nur in Quadrat commensurable Linien, A, B, C, so daß die Quadrate von A, C, um das Quadrat einer mit A in Länge commensurabeln Linie unterschieden seyen. Auch sey (2, 14. S.) Rect. A, B = □D, so ist, weil (10, 22. S.) Rect. A, B, medial, auch □D, folglich D, medial. Ferner sey (1, 45. S.) Rect. B, C = Rect. D, E. Nun ist (6, 1. S.) Rect. A, B : Rect. B, C = A : C. Folglich ist A : C = □D : Rect. D, E = (10, 32. Lehns.) D : E. Nun ist A ⌢ C. Folglich (10, 10. S.) ist auch D ⌢ E. Nun ist D medial. Folglich ist (10, 24. S.) auch E medial. Demnach sind D, E, medial, und ihre Quadrate sind um das Quadrat einer mit der grössern in Länge commensurabeln Linie unterschieden, weil auch die Quadrate von A, C, so unterschieden sind, und A : C = D : E ist. Nun ist Rect. B, C = Rect. D, E, und Rect. B, C medial. Folglich ist auch Rect. D, E, medial. Demnach sind D, E, die verlangten Linien.

Anmerkung. Auf eben die Art findet man auch zum Unterschied das Quadrat einer mit der grössern in Länge incommensurabeln Linie, wenn A, C, so angenommen werden, daß ihre Quadrate um das Quadrat einer mit A in Länge incommensurabeln Linie unterschieden sind.

Erster Lehnsatz.

Wenn in einem rechtwinklichen Triangel, ABC, von A auf BC, ein Perpendikel, AD, gefället wird: so ist

1.) Rect. CBBD = □BA.
Denn (6, 8. S.) △ABD ~ △ADC ~ △ABC, folglich (6, 1. Def.) CB: BA = BA: BD, folglich (6, 17. S.) Rect. CBBD = □BA.



2.) Rect. BCCD = □AC, aus eben dem Grunde.

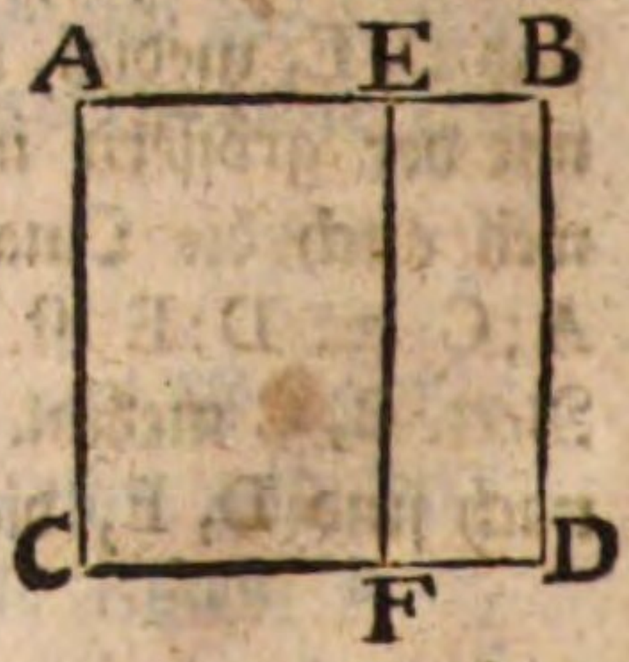
3.) Rect. BDDC = □DA, weil (6, 8. Zus.) BD: DA = DA: DC.

4.) Rect. BCAD = Rect. BAAC, weil △ABC ~ △ABD, folglich BC: CA = BA: AD. Oder auch: Beschreibe das Rectangel EC, und vollende AF, so ist jenes sowohl, als dieses, das Doppelte des △ABC, folglich EC = AF, und es ist EC = Rect. BCAD, und AF = Rect. BAAC.

Zweyter Lehnsatz.

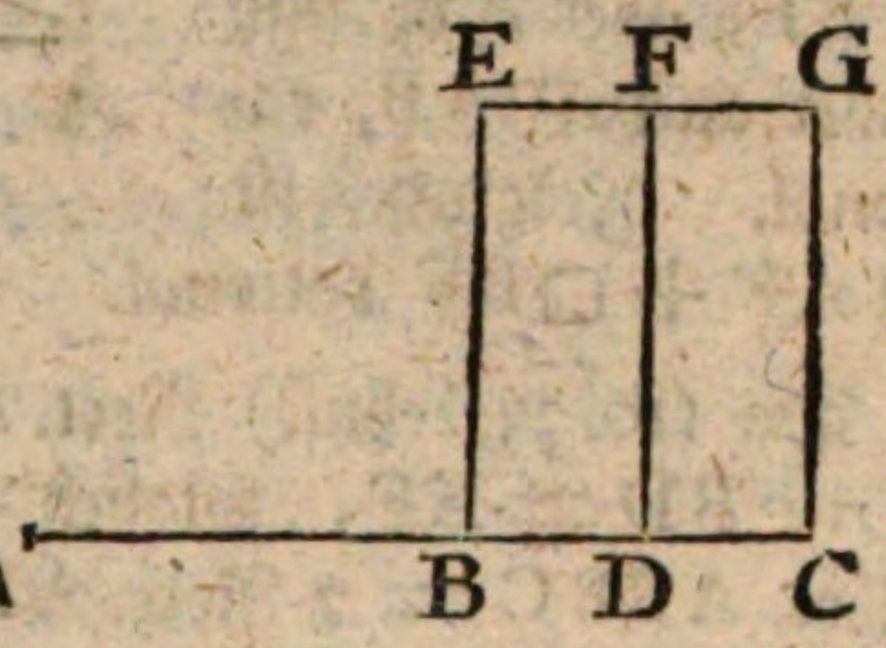
Wenn eine gerade Linie, AB, in ungleiche Theile, AE, EB, geschnitten wird: so ist AE: EB = Rect. BAAE: Rect. BABE.

Von AB mache das Quadrat ABDC, und ziehe die Parallele EF, so ist (6, 1. S.) AE: EB = AF: FB. Nun ist AF = Rect. BAAE, weil BA = AC; und FB = Rect. BABE, weil BA = BD.



Dritter Lehnsatz.

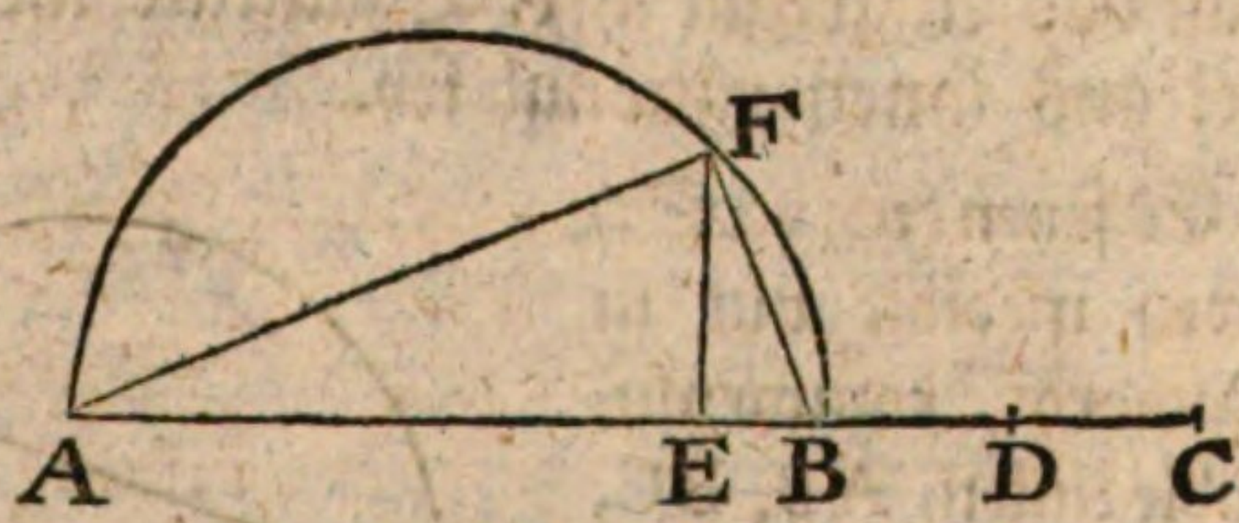
Wenn von zweyen ungleichen geraden Linien, AB, BC, die kleinere, BC, in D, halbirt wird: so ist Rect. ABBC = 2 Rect. ABBD.



Auf BC errichte in B den Perpendikel BE = BA, und vollende die Figur, so ist (6, 1. S.) BD : DC = BF : DG, folglich verbunden BC : DC = BG : DG. Nun ist BC = 2 DC. Folglich ist BG = 2 DG. Nun ist BG = Rect. ABBC, weil AB = BE; und eben so DG = Rect. ABBD.

Der 34. Satz.

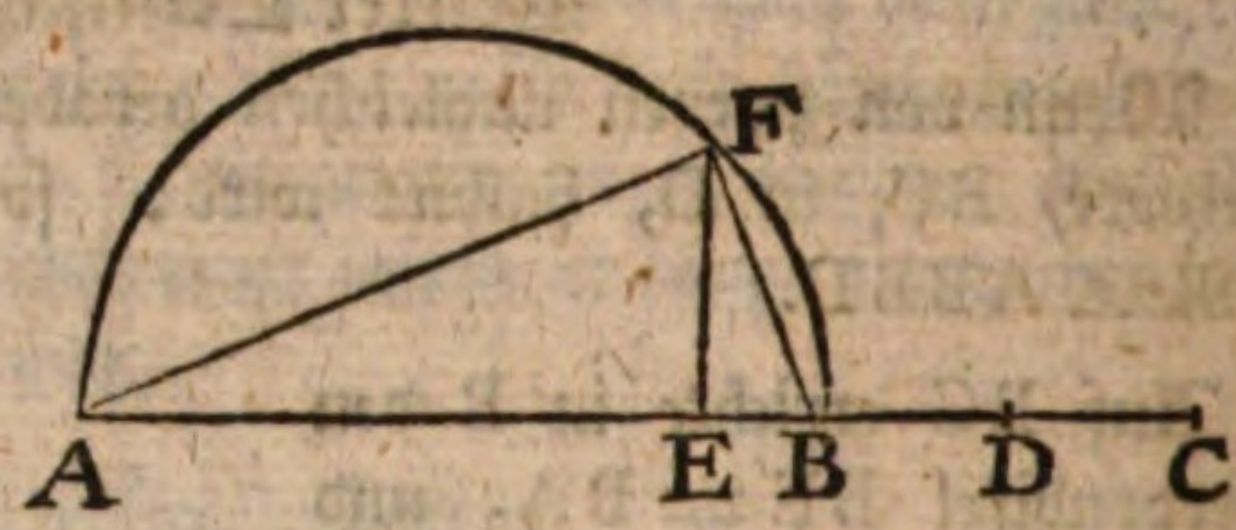
Zwey in Quadrat incommensurable Linien zu finden, so daß das Aggregat ihrer Quadrate rational, und das Rectangel aus ihnen medial sey.



Es seyen (10, 31. S.) zwey rationale nur in Quadrat commensurable Linien, AB, BC, deren Quadrate um das Quadrat einer mit AB in Länge incommensurabeln Linie unterschieden seyen. Halbire BC in D, und stelle (6, 28. S.) ein Rectangel, welches dem vierten Theil des □BC, das ist, dem □BD gleich sey, auf einen Abschnitt der Linie AB, so daß dessen Ergänzung auf dem andern Abschnitte ein Quadrat sey. Es sey dieses das Rect. AEEB, so ist (10, 19. S.) AE ∪ EB. Ueber AB beschreibe den halben Cirkel, AFB, errichte auf AB in E den Perpendikel EF, und ziehe AF, FB.

Da (6, 1. S.) AE : EB = Rect. BAAE : Rect. ABBE, aber (10, 31. Lehns.) Rect. BAAE = □AF, und Rect. ABBE = □BF, so ist AE : EB = □AF : □BF. Nun ist AE ∪ EB.

Folglich ist □AF ∪ BF, demnach AF ∪ BF. Nun ist (1, 47. S.) □AB = □AF + □BF, aber AB, und daher auch □AB, rational. Folglich ist □AF + □BF rational.

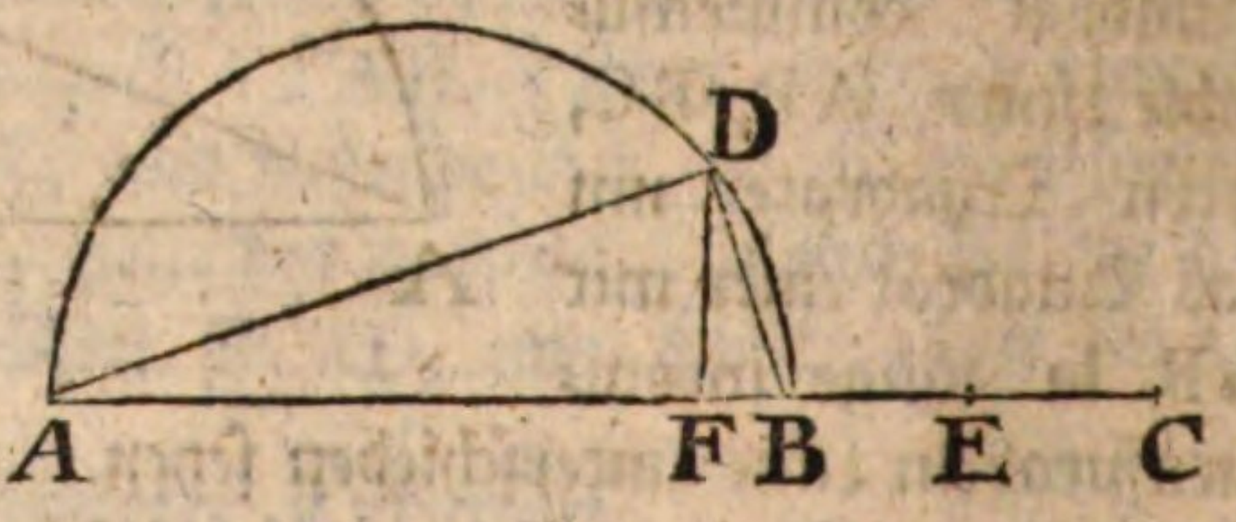


Da (10, 33. Lehns.) Rect. AEEB, das ist □BD, = □EF, so ist BD = EF, folglich BC = 2 EF, folglich (6, 1. S.) Rect. ABBC = 2 Rect. ABEF. Nun ist (10, 22. S.) Rect. ABBC medial. Folglich ist Rect. ABEF medial. Nun ist (10, 33. Lehns.) Rect. ABEF = Rect. AFFB. Folglich ist Rect. AFFB medial. Demnach sind AF, FB, die verlangten Linien.

Der 35. Satz.

Zwey in Quadrat incommensurable Linien zu finden, so daß das Aggregat ihrer Quadrate medial, und das Rectangel aus ihnen rational sey.

Es seyen (10, 32. S.) zwey mediale nur in Quadrat commensurable Linien, AB, BC, so daß Rect. ABBC rational, und daß die Quadrate von AB, BC, um das Quadrat einer mit AB in Länge incommensurabeln Linie unterschieden seyn. Ueber AB beschreibe den halben Cirkel ADB, halbire BC in E, und stelle (6, 28. S.) ein Rectangel = □BE, auf einen Abschnitt der AB, so daß seine Ergänzung auf dem andern Abschnitte ein Quadrat sey. Es sey dieses das Rect. AFFB. Folglich ist (10, 19. S.) AF ∪ FB. Auf AB errichte in F den Perpendikel, FD, und ziehe AD, DB.



= Da AF ∪ FB, so ist (6, 1. und 10, 10. S.) Rect. BAAF ∪ Rect. ABBF, das ist (10, 34. Lehns.) □AD ∪ □DB, demnach AD ∪ DB.

Da

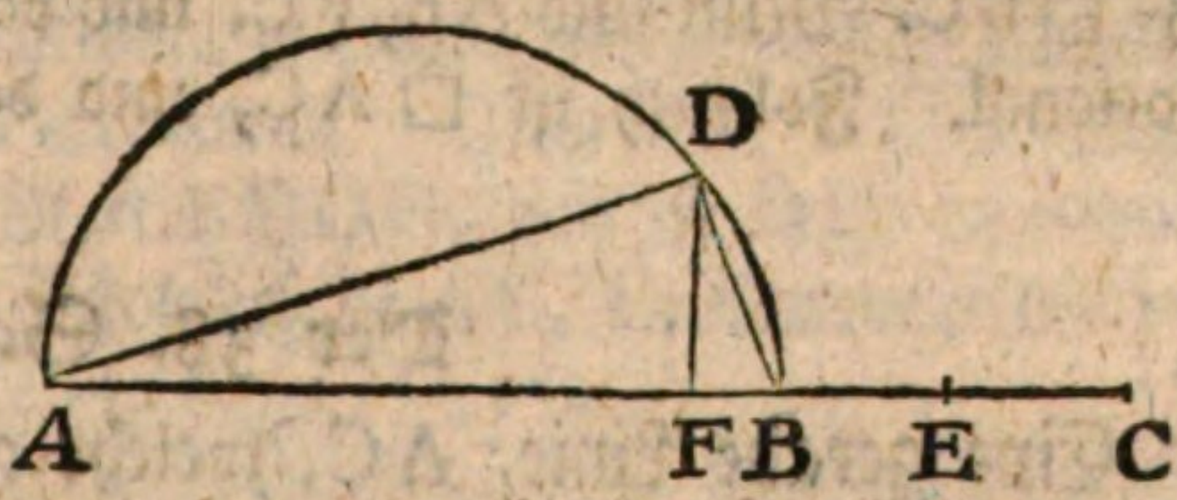
Da (1, 47. S.) □ AB = □ AD + □ DB und □ AB, medial, so ist auch □ AD + □ DB, medial.

Da BC = 2 DF, so ist (6, 1. S.) Rect. ABBC = 2 Rect. ABDF, folglich beyde commensurabel, aber das erste rational, folglich auch das andre. Nun ist (10, 34. Lehns.) Rect. ABDF = Rect. ADDB. Folglich ist auch Rect. ADDB rational. Demnach sind AD, DB, die verlangten Linien.

Der 36. Satz.

Zwey in Quadrat incommensurable Linien zu finden, so daß das Aggregat ihrer Quadrate medial, auch das Rectangel aus ihnen medial, und zugleich dem Aggregat ihrer Quadrate incommensurabel sey.

Es seyen zwey mediale nur in Quadrat commensurable Linien, AB, BC, so daß Rect. ABBC medial, und alles übrige wie beym vorigen Satze sey.



Da AF ∪ FB, so ist AD ⌣ DB, und da □ AB medial, so ist □ AD + □ DB, medial.

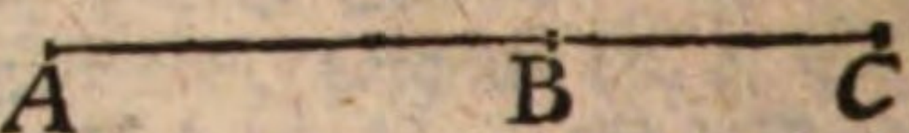
Da auch hier Rect. ABBC = 2 Rect. ABFD, aber Rect. ABBC medial, so ist Rect. ABFD, das ist Rect. ADDB, auch medial.

Da AB ⌢ BC, folglich AB ∪ BC, aber CB ∩ BE, so ist AB ∪ BE, folglich (6, 1. und 10, 10. S.) □ AB ∪ Rect. ABBE. Nun ist □ AB = □ AD + □ DB, und Rect. ABBE = Rect. ABFD = Rect. ADDB. Folglich ist □ AD + □ DB ∪ Rect. ADDB. Demnach sind AD, DB, die verlangten Linien.

Von den sechs Irrationallinien, welche durchs Zusammensetzen entstehen.

Der 37. Satz.

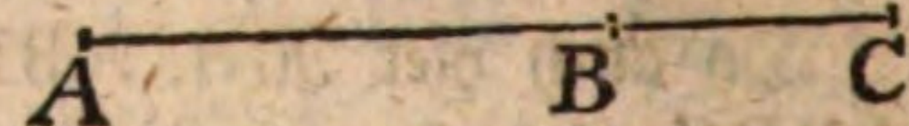
Eine gerade Linie, AC, welche aus zwey rationalen nur in Quadrat commensurabeln Linien, AB, BC, besteht, ist irrational. Sie heisse Binomiale.



Da AB ⌢ BC, folglich AB ∪ BC, und (6, 1. S.) AB : BC = Rect. ABBC : □BC, so ist (10, 10. S.) Rect. ABBC ∪ □BC. Nun ist (10, 6. S.) Rect. ABBC ∩ 2 Rect. ABBC, und (10, 16. S.) □BC ∩ □AB + □BC. Folglich ist 2 Rect. ABBC ∪ □AB + □BC, folglich verbunden 2 Rect. ABBC + □AB + □BC, das ist (2, 4. S.) □AC ∪ □AB + □BC. Nun sind AB, BC, und daher auch □AB + □BC, rational. Folglich ist □AC, und daher auch AC, irrational.

Der 38. Satz.

Eine gerade Linie, AC, welche aus zwey medialen nur in Quadrat commensurabeln Linien, AB, BC, die ein Rationalrectangel geben, besteht, ist irrational. Sie heisse die erste Bimediale.

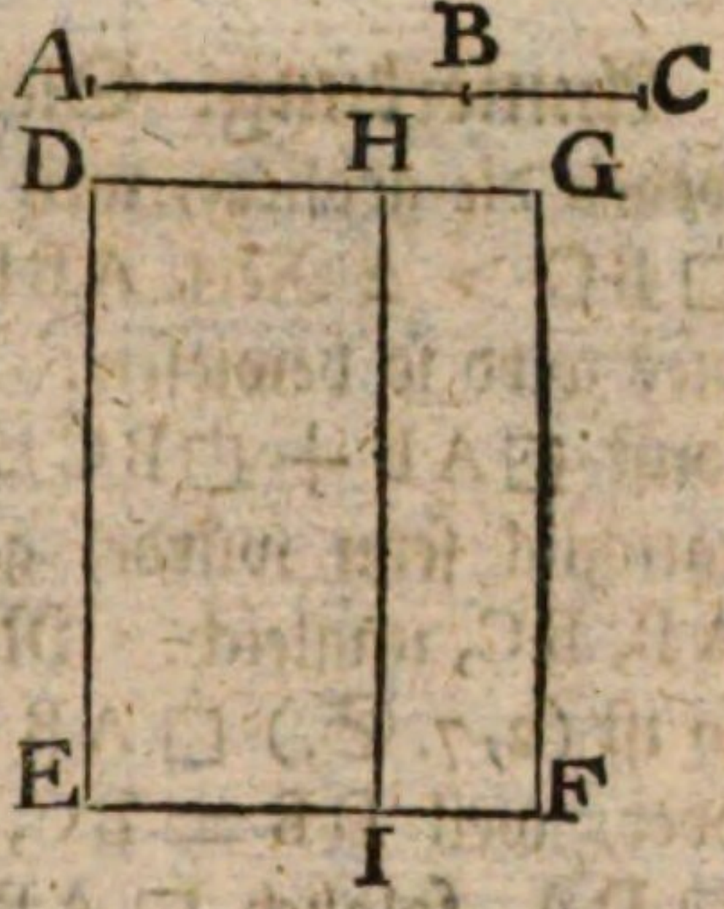


Da AB ∪ BC, so ist (10, 13. S.) □AB + □BC ∪ 2 Rect. ABBC, folglich verbunden □AB + □BC + 2 Rect. ABBC, das ist (2, 4. S.) □AC, ∪ Rect. ABBC. Nun ist Rect. ABBC rational. Folglich ist □AC, und daher auch AC, irrational.

Der 39. Satz.

Eine gerade Linie, AC, welche aus zwey medialen nur in Quadrat commensurabeln Linien, AB, BC, die ein Medialrectangel geben, besteht, ist irrational. Sie heisse die zweyte Bimediale.

Es

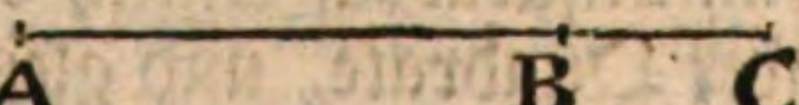


Es sey die Rationale DE. Mache (1, 45. S.) DF = □AC, und EH = □AB + □BC. Nun ist (2, 4. S.) □AC = □AB + □BC + 2 Rect. ABBC. Folglich ist HF = 2 Rect. ABBC. Nun sind AB, BC, medial. Folglich □AB + □BC, das ist, EH; und 2 Rect. ABBC, das ist HF, medial. Nun ist DE rational. Folglich (10, 23. S.) DH, HG, rational und der DE in Länge incommensurabel.

Da AB ∪ BC, und (6, 1. S.) AB : BC = □AB : Rect. ABBC, so ist (10, 10. S.) □AB ∪ Rect. ABBC. Nun ist □AB ∩ □AB + □BC, und Rect. ABBC ∩ 2 Rect. ABBC. Folglich ist □AB + □BC ∪ 2 Rect. ABBC, das ist, EH ∪ HF, folglich auch DH ∪ HG. Nun waren DH, HG, rational, folglich sind DH, HG, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich (10, 37. S.) DG irrational. Nun war ED rational. Folglich ist (10, 21. S.) Rect. EDDG, das ist DF, irrational. Nun ist DF = □AC. Folglich ist AC, die Quadratseite von DF, auch irrational.

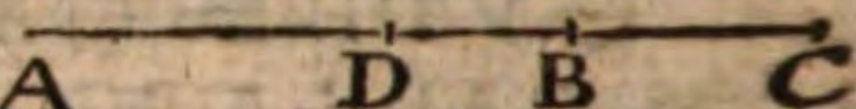
Der 40. Satz.

Eine gerade Linie, AC, welche aus zwey in Quadrat incommensurabeln Linien, AB, BC, die ein rationales Aggregat ihrer Quadrate, aber ein mediales Rectangel geben, besteht, ist irrational. Sie heisse die grössere Irrationale.



Da Rect. ABBC medial, so ist (10, 24. Zus.) auch 2 Rect. ABBC medial. Nun ist □AB + □BC, rational. Folglich ist 2 Rect. ABBC ∪ □AB + □BC, folglich auch (10, 17. S.) □AB + □BC + 2 Rect. ABBC, das ist (2, 4. S.) □AC, ∪ □AB + □BC. Nun ist □AB + □BC, rational. Folglich ist □AC, und daher auch AC, irrational.

Anmerkung. Sie heißt deswegen die grössere, weil □AB + □BC > 2 Rect. ABBC, und

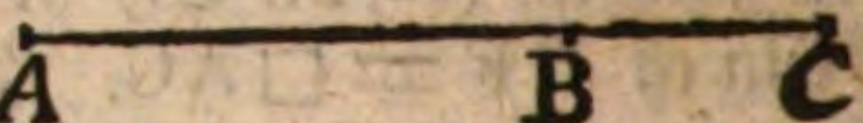


dies wird so bewiesen: AB, BC, können nicht gleich seyn, weil sonst □AB + □BC = 2 Rect. ABBC, folglich Rect. ABBC rational seyn würde, gegen das Angenommene. Folglich sind AB, BC, ungleich. Nun sey AB > BC. Mache BD = BC, so ist (2, 7. S.) □AB + □BD = 2 Rect. ABBD + □DA, oder, weil DB = BC, □AB + □BC = 2 Rect. ABBC + □DA, folglich □AB + □BC > 2 Rect. ABBC.

Der 41. Satz.

Eine gerade Linie, AC, welche aus zwey in Quadrat incommensurabeln Linien, AB, BC, die ein mediales Aggregat ihrer Quadrate, aber ein rationales Rectangel geben, besteht, ist irrational. Sie heisse **des Rationalen und Medialen Quadratseite.**

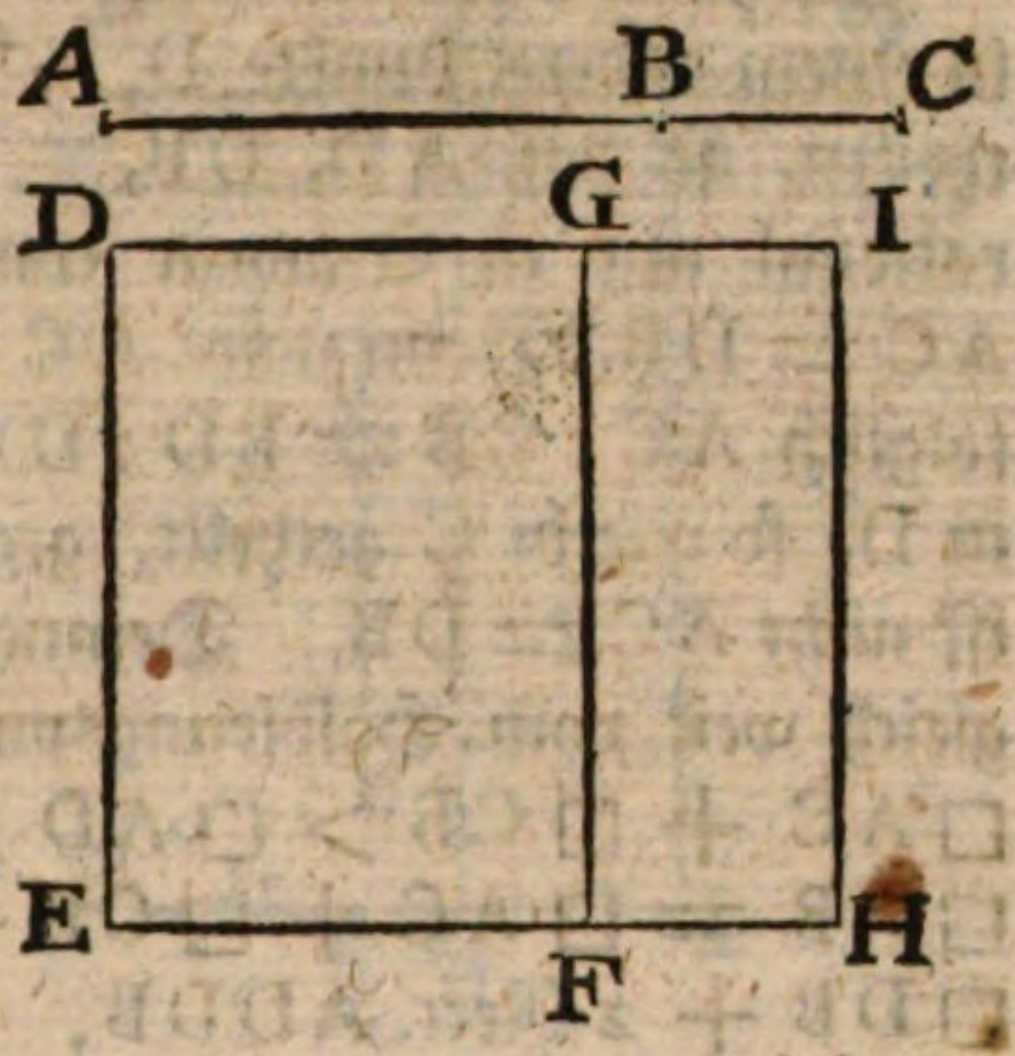
Da □AB + □BC medial, aber Rect. ABBC rational, so ist □AB + □BC ∪ 2 Rect. ABBC, folglich (10, 17. S.) **verbunden** □AC ∪ 2 Rect. ABBC. Nun ist 2 Rect. ABBC rational. Folglich ist □AC, und daher auch AC, irrational.



Der 42. Satz.

Eine gerade Linie, AC, welche aus zwey in Quadrat incommensurabeln Linien, AB, BC, die ein mediales Aggregat ihrer Quadrate, und gleichfalls ein mediales, solchem Aggregat aber incommensurables, Rectangel geben, besteht, ist irrational. Sie heisse **Zweyer Medialen Quadratseite.**

Es sey die Rationale, DE. Mache DF = □AB + □BC, und GH = 2 Rect. ABBC, so ist (2, 4. S.) DH = □AC. Da □AB + □BC, das ist DF, medial, aber DE rational, so ist (10, 23. S.) DG rational und mit DE in Länge incommensurabel.

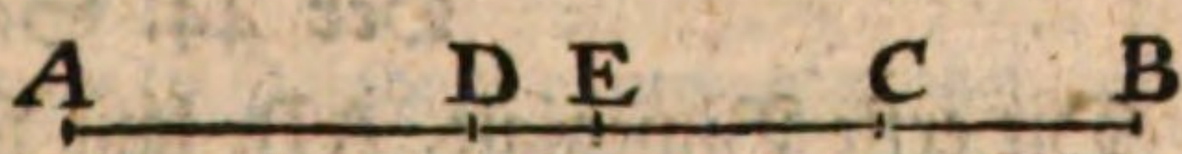


mensurabel. Aus gleichem Grunde ist auch GI rational und mit DE in Länge incommensurabel. Da □AB + □BC ∪ 2 Rect. ABBC, das ist, DF ∪ GH, so ist (6, 1. und 10, 10. S.) DG ∪ GI, aber beyde rational, folglich sind DG, GI, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich ist (10, 37. S.) DI irrational, genannt Binomiale, aber DE rational, folglich (10, 39. Zus.) das Rectangel DH irrational, und dessen Quadratseite AC, irrational.

Lehnsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in zweyen Punkten, C, D, ungleich geschnitten, und man setzt AC > DB, so ist □AC + □CB > □AD + □DB.

Halbire AB in E.



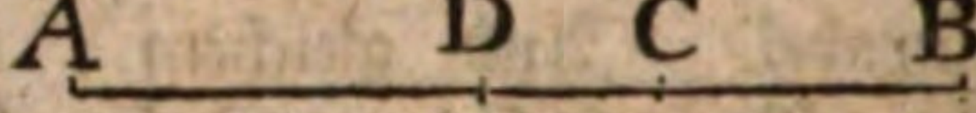
Da AC > DB, so ist (DC subtrahirt) AD > CB, folglich, weil AE = EB, ist DE < EC. Demnach liegen die Punkte C, D, nicht gleichweit vom Halbirungspunkte, E.

Da (2, 5. S.) □EB = Rect. ACCB + □CE = Rect. ADDB + □DE, aber □DE < □CE, so ist Rect. ACCB < Rect. ADDB. Nun ist (2, 4. S.) □AB = □AC + □CB + 2 Rect. ACCB = □AD + □DB + 2 Rect. ADDB. Folglich ist □AC + □CB > □AD + □DB.

Anmerkung. Hiernach kann gezeigt werden, daß die bisher abgehandelten sechs Irrationallinien nur in diejenigen Linien, oder Namen getheilt werden können, woraus sie sind zusammengesetzt worden.

Der 43. Satz.

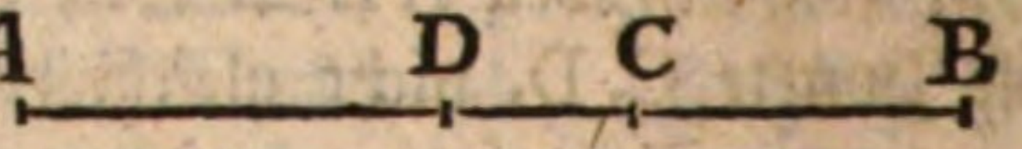
Die Binomiale, AB, läßt sich nur in Einem Punkte, C, in ihre Namen, AC, CB, theilen.



Gesetzt sie liesse sich auch in einem andern Punkte, D, theilen, so daß AD, DB, rational nur in Quadrat commensurabel wären, so ist nicht AC = DB. Denn wäre AC = DB, so wär auch AD = CB, folglich AC : CB = BD : DA, demnach AB auf änliche Art in D, so wie in C getheilt, gegen das Angenommene. Folglich ist nicht AC = DB. Demnach liegen die Punkte, C, D, nicht gleich weit vom Halbirungspunkte, folglich ist (10, 4². Lehns.) □AC + □CB > □AD + □DB. Nun ist (2, 4. S.) □AB = □AC + □CB + 2 Rect. ACCB = □AD + □DB + 2 Rect. ADDB, folglich (□AC + □CB) − (□AD + □DB) = 2 Rect. ADDB − 2 Rect. ACCB, das ist der Unterschied der Quadrate, dem Unterschied der Rectangel gleich. Nun ist der Unterschied der Quadrate rational, weil die Quadrate rational sind. Folglich wär der Unterschied der Rectangel auch rational, welches, weil die Rectangel medial, (10, 27. S.) unmöglich ist.

Der 44. Satz.

Die erste Bimediale, AB, läßt sich nur in Einem Punkte, C, in ihre Namen, AC, CB, theilen.



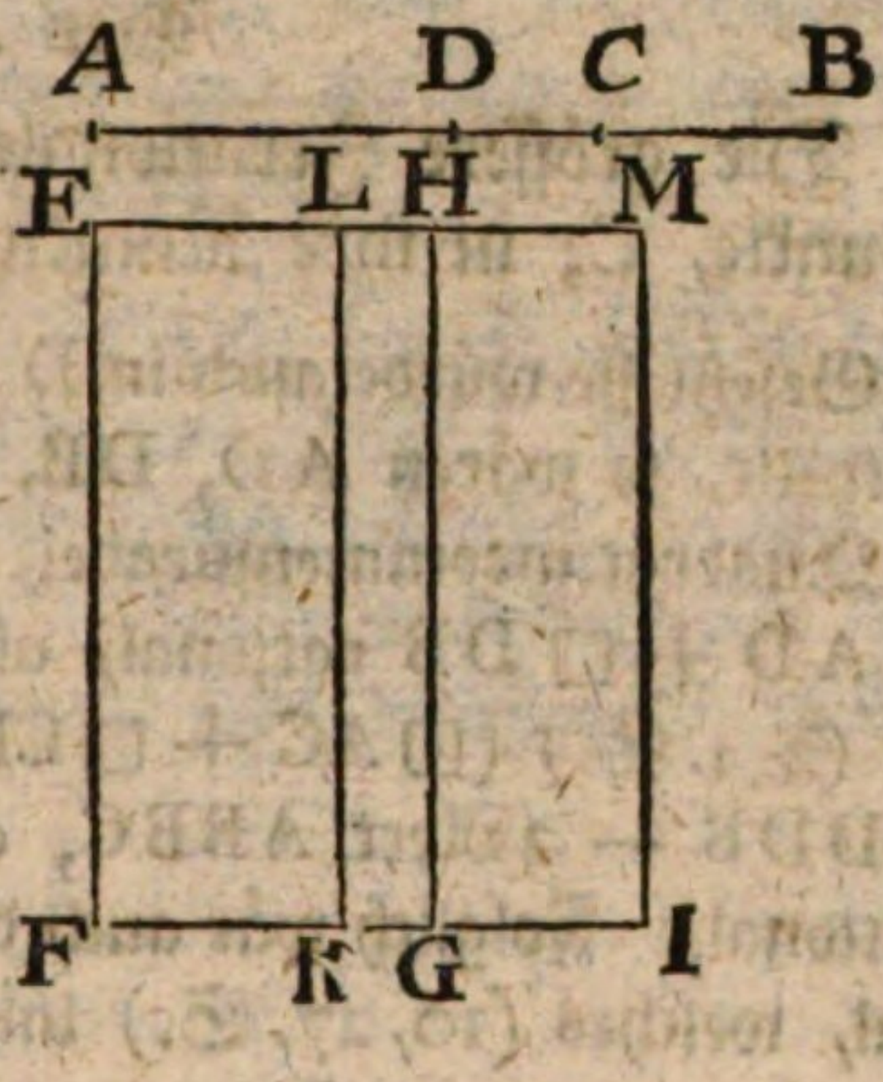
Gesetzt sie liesse sich auch in einem andern Punkte, D, theilen, so daß AD, DB, rational nur in Quadrat commensurabel wären, und ein Rationalrectangel gäben, so wäre, wie beym vorigen Satz, 2 Rect. ADDB − 2 Rect. ACCB = (□AC + □CB) − (□AD + □DB), das ist, der Unterschied der Rectangel dem Unterschied der Quadrate gleich. Nun ist der Unterschied der Rectangel rational, weil die Rectangel rational sind. Folglich wäre der Unterschied der Quadrate auch rational, welches, weil die Quadrate medial, (10, 27. S.) unmöglich ist.

Der 45. Satz.

Die zweyte Bimediale, AB, läßt sich nur in Einem Punkte, C, in ihre Namen, AC, CB, theilen.

Gesetzt

Gesetzt sie liesse sich auch in einem andern Punkte, D, theilen, so daß AD, DB, medial nur in Quadrat commensurabel wären, und ein Medialrectangel gäben, so wäre nicht AC = DB und (10, 43. Lehns.) □AC + CB > □AD + □DB.



Es sey die Rationale, EF. Mache EI = □AB, EG = □AC + □CB, EK = □AD + □DB, so ist EI − EG, das ist HI, = 2 Rect. ACCB, und EI − EK, das ist LI, = 2 Rect. ADDB.

Da EG = □AC + □CB, aber AC, CB, medial, so ist EG medial, aber EF rational, folglich (10, 23. S.) EH rational, und mit EF in Länge incommensurabel. Aus gleichem Grunde ist HM rational, und mit EF in Länge incommensurabel.

Da AC, CB, medial nur in Quadrat commensurabel, so ist AC ∪ CB. Nun ist (6, 1. S.) AC : CB = □AC : Rect. ACCB. Folglich ist (10, 10. S.) □AC ∪ Rect. ACCB, aber (10, 16. S.) □AC ∩ □AC + □CB, weil AC ⌒ CB. Auch ist Rect. ACCB ∩ 2 Rect. ACCB. Folglich ist □AC + □CB ∪ 2 Rect. ACCB, das ist, EG ∪ HI, folglich auch EH ∪ HM. Nun waren aber EH, HM, rational. Folglich sind EH, HM, nur in Quadrat commensurabel, folglich ist (10, 37. S.) EM irrational, genannt Binomiale, in H getheilt.

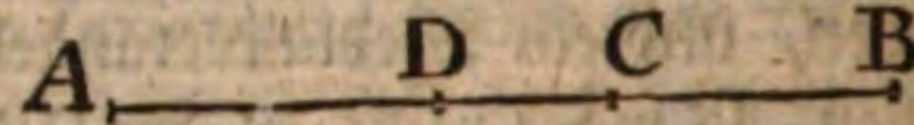
Auf eben die Art wird bewiesen, daß EL, LM, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich EM die Binomiale sey, in L getheilt, so daß nicht EH = LM. Denn (10, 43. Lehns.) □AC + □CB > □AD + □DB > 2 Rect. ADDB, das ist, EG > LI, folglich EH > LM.

Demnach wäre eine Binomiale EM, in zwey verschiednen Punkten, H, L, in ihre Namen getheilt, welches (10, 43. S.) unmöglich.

Der

Der 46. Satz.

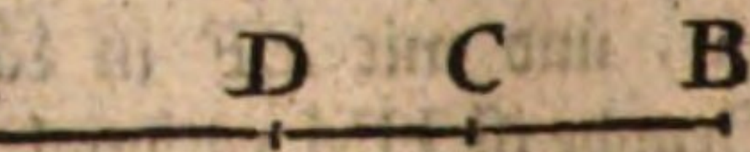
Die grössere Irrationale, AB, läßt sich nur in Einem Punkte, C, in ihre Namen, AC, CB, theilen.



Gesetzt sie würde auch in D getheilt, so wären AD, DB, in Quadrat incommensurabel, □AD + □DB rational, aber Rect. ADDB medial. Nun ist (2, 4. S.) (□AC + □CB) — (□AD + □DB) = 2 Rect. ADDB — 2 Rect. ABBC, aber der Unterschied der Quadrate rational. Folglich wär auch der Unterschied der Rectangel rational, welches (10, 27. S.) unmöglich.

Der 47. Satz.

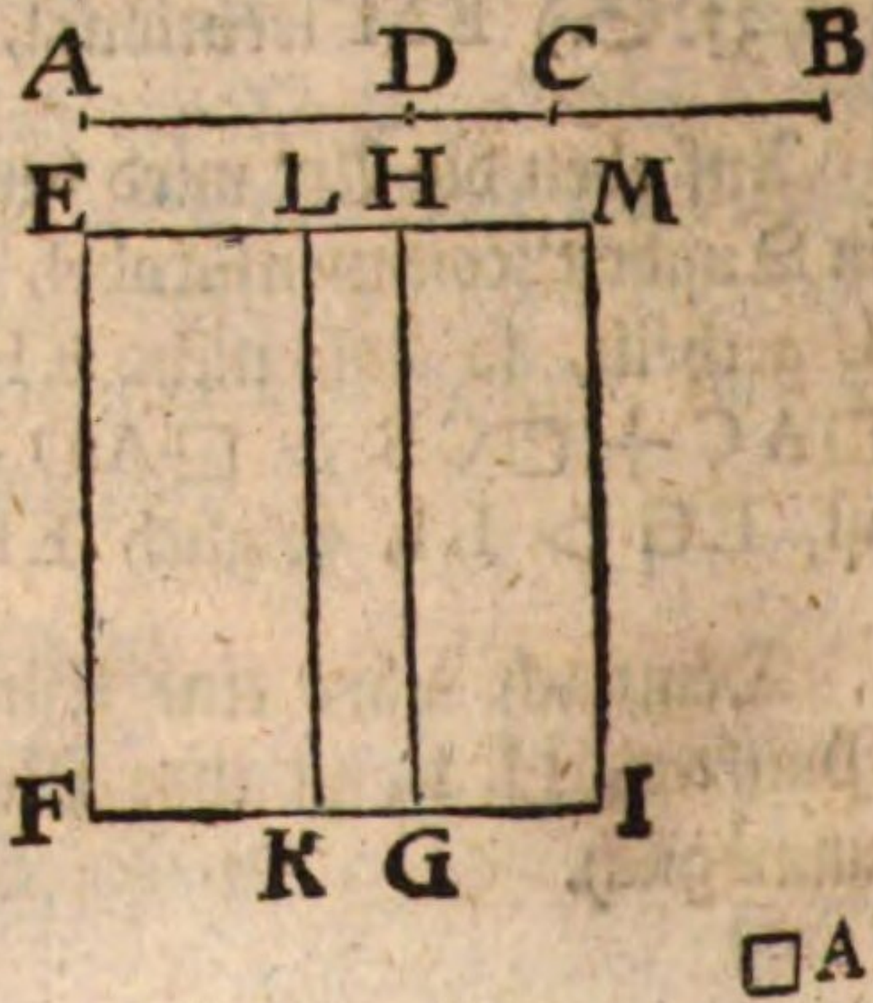
Des Rationalen und Medialen Quadratseite, AB, läßt sich nur in Einem Punkte, C, in ihre Namen, AB, BC, theilen.



Gesetzt sie würde auch in D getheilt, so wären AD, DB, in Quadrat incommensurabel, □AD + □DB medial, aber Rect. ADDB rational. Nun wäre abermals der Unterschied der Quadrate, so wie der Unterschied der Rectangel, das ist, rational, welches (10, 27. S.) unmöglich.

Der 48. Satz.

Zweyer Medialen Quadratseite, AB, läßt sich nur in Einem Punkte, C, in ihre Namen, AC, CB, theilen.



Gesetzt sie würde auch in D getheilt, so würde sowohl das Aggregat der Quadrate, als das Rectangel medial seyn. Nun sey die Rationale EF. Mache EG = □AC + □CB, HI = 2 Rect. ACCB, so ist (2, 4. S.) EI = □AB. Mache EK = □AD + □DB, so ist LI = 2 Rect. ADDB. Nun ist

□AC + □CB, das ist EG, medial, aber EF rational. Folglich ist (10, 23. S.) EH rational und mit EF in Länge incommensurabel. Eben dies gilt von HM.

Da □AC + □CB ∪ 2 Rect. ACCB, das ist, EG ∪ HI, so ist EH ∪ HM. Nun waren beyde rational. Folglich sind EH, HM, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich ist EM die Binomiale in H getheilt. Eben so wird bewiesen, daß sie auch in L getheilt, ohne daß EH = LM, welches (10, 43. S.) unmöglich ist.

Zweyte Klasse der Definitionen.

1. Wenn eine **Binomiale** in ihre Namen getheilt ist, so daß die Quadrate solcher Namen um das Quadrat einer mit dem grössern Namen in Länge commensurabeln Linie unterschieden sind, und es ist der grössere Name mit einer angenommenen Rationale in Länge commensurabel: so heißt solche die **erste Binomiale**;

2. ist aber der kleinere Name mit der angenommenen Rationale in Länge commensurabel: so heißt solche die **zweyte Binomiale**;

3. ist keiner von beyden Namen mit der angenommenen Rationale in Länge commensurabel: so heißt solche die **dritte Binomiale.**

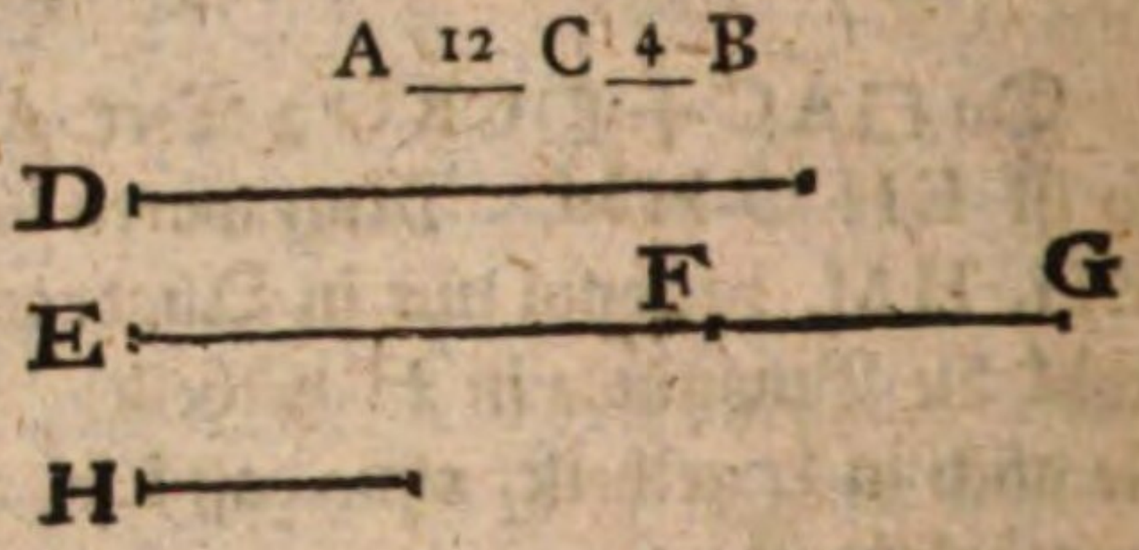
4. Wenn hingegen die Quadrate der Namen um das Quadrat einer mit dem grössern Namen in Länge incommensurabeln Linie unterschieden sind, und es ist der grössere Name mit der angenommenen Rationale in Länge commensurabel: so heißt solche die **vierte Binomiale**;

5. ist es aber der kleinere Name: die **fünfte**;

6. ist es keiner von beyden Namen: die **sechste.**

Der 49. Satz.

Die erste Binomiale zu finden.



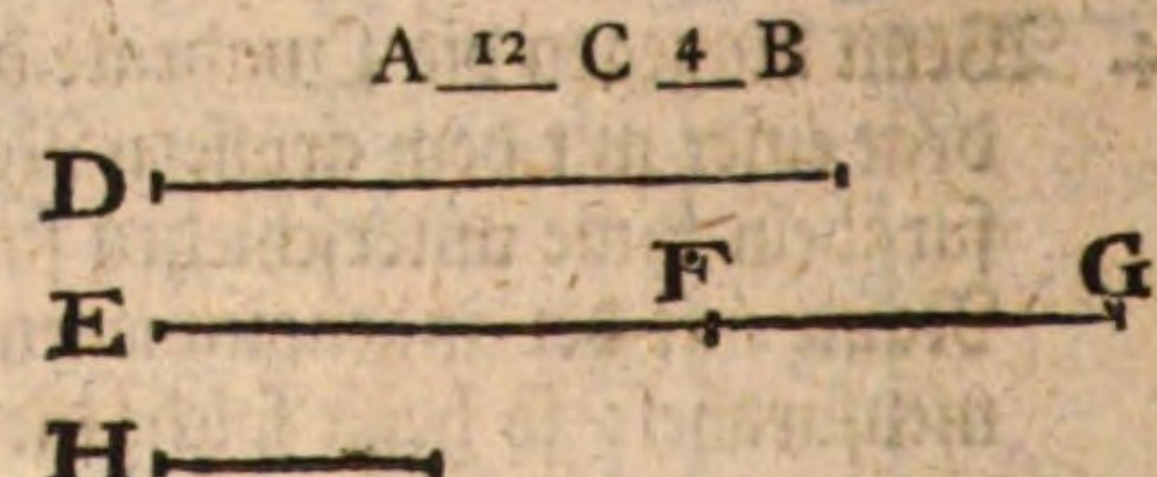
Es seyen zwey Zahlen AC, CB, so daß (10, 30. Zus.) ihre Summe AB zwar zu BC, aber nicht zu CA, die Verhältniß von Quadratzahlen habe. Nun sey auch die Rationale D, desgleichen eine Linie $EF \cap D$, und daher rational. Mache (10, 6. Zus.) BA : AC = □EF : □FG, so ist (10, 6. S.) □EF ∩ □FG und daher FG rational, aber (10, 9. S.) EF ∪ FG. Demnach sind EF, FG, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich (10, 37. S.) EG eine Binomiale, deren Namen EF, FG.

Da BA : AC = □EF : □FG, und BA > AC, so ist □EF > □FG. Nun sey □EF − □FG = □H.

Da BA : AC = □EF : □FG, so ist (5, 19. Zus.) zurückkehrend BA : CB = □EF : □H. Nun verhalten sich BA, CB, und daher auch □EF, □H, wie Quadratzahlen. Folglich ist (10, 9. S.) $EF \cap H$, folglich ist (II. 1. Def.) EG die erste Binomiale.

Der 50. Satz.

Die zweyte Binomiale zu finden.



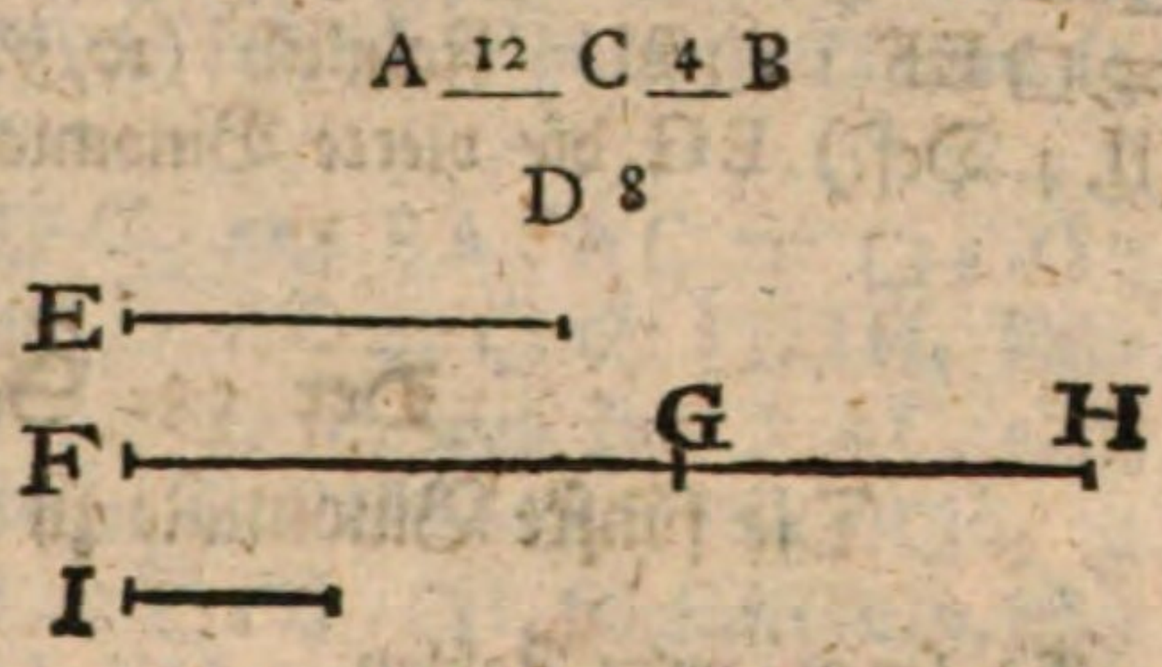
Es seyen zwey Zahlen AC, CB, wie im vorigen, auch die Rationale D, ferner eine Linie $FG \cap D$, und daher rational. Mache (10, 6. Zus.) CA : AB = □FG : □FE, so sind aus eben dem Grunde, wie im vorigen, EF, FG, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich EG eine Binomiale, deren Namen EF, FG.

Da

Da **umgekehrt** BA : AC = □EF : □FG, und BA > AC, so ist □EF > □FG. Nun sey □EF − □FH = □H, so ist **zurückkehrend** BA : CB = □EF : □H, folglich wie im vorigen $EF \cap H$, folglich (II. 2. Def.) EG die zweyte Binomiale.

Der 51. Satz.

Die dritte Binomiale zu finden.



Es seyen wieder zwey Zahlen, AC, CB, wie im vorigen. Auch sey eine dritte Zahl D, welche selbst keine Quadratzahl, auch weder zu AB noch zu AC die Verhältniß von Quadratzahlen habe. Nun sey die Rationale E. Mache D : AB = □E : □FG, so ist, wie im vorigen, □E ∩ □FG, und daher FG rational, aber $E \cup FG$. Mache ferner BA : AC = □FG : □GH, so sind auf eben die Art FG, GH, rational und in Quadrat commensurabel, folglich FH eine Binomiale, deren Namen FG, GH.

Da D : AB = □E : □FG, und BA : AC = □FG : □GH, so ist (5, 22. S.) **gleichförmig** D : AC = □E : □GH, folglich (10, 9. S.) $E \cup GH$. Ferner, weil BA > AC, ist auch □FG > □GH. Es sey □FG − □GH = □I. Nun ist BA : AC = □FG : □GH, folglich (5, 19. Zus.) **zurückkehrend** BA : CB = □FG : □I, folglich (10, 9. S.) $FG \cap I$, folglich (II. 3. Def.) FH die dritte Binomiale.

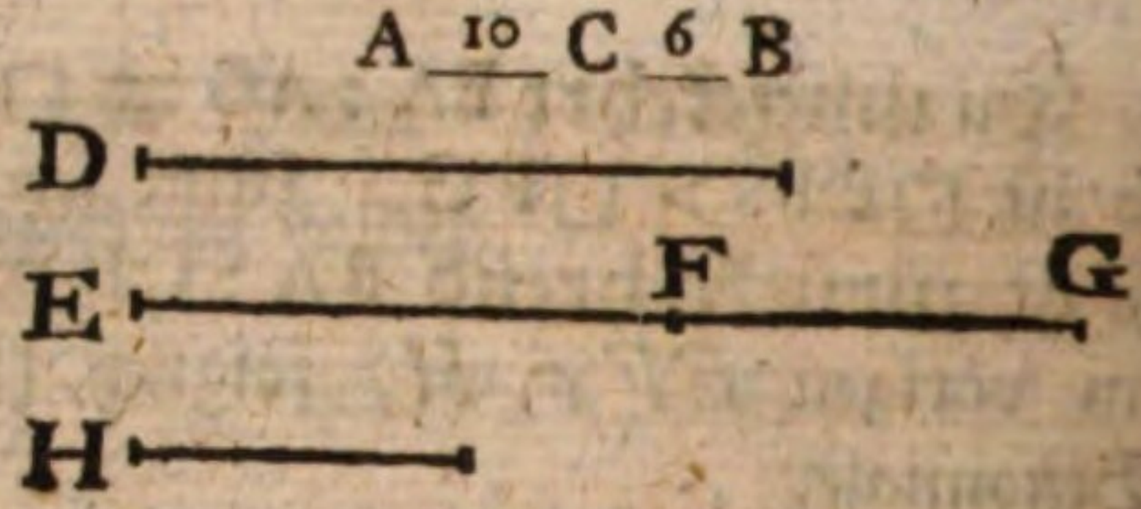
Der 52. Satz.

Die vierte Binomiale zu finden.

Es seyen zwey Zahlen, AC, CB, deren Summe, AB, zu keiner von beyden die Verhältniß von Quadratzahlen habe. Es

sey

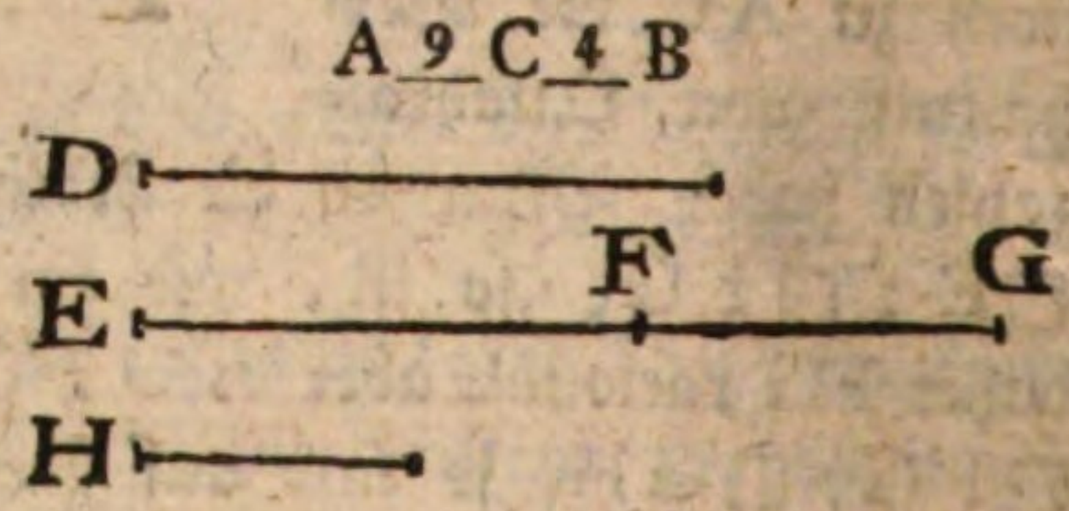
sey die Rationale D, und eine Linie $EF \cap D$, daher auch rational. Mache BA : AC = □EF : □FG, so sind, wie im vorigen, EF, FG, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich EG eine Binomiale, deren Namen EF, FG. Da nun, weil BA > AC, auch □EF > □FG, so sey □EF − □FG = □H, folglich ist zurückkehrend BA : CB = □EF : □H. Folglich (10, 9. S.) $EF \cup H$, folglich (II. 4. Def.) EG die vierte Binomiale.



Der 53. Satz.

Die fünfte Binomiale zu finden.

Es seyen zwey Zahlen, AC, CB, wie (10, 52. S.). Auch sey die Rationale D, desgleichen eine Linie $GF \cap D$, und daher rational. Mache CA : AB = □GF : □FE, so sind, wie vorher, GF, FE, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich EG eine Binomiale, deren Namen EF, FG.



Da umgekehrt BA : AC = □EF : □FG, und BA > AC, so ist □EF > □FG. Es sey □EF − □FG = □H, so ist zurückkehrend BA : CB = □EF : □H, folglich (10, 9. S.) $EF \cup H$, folglich (II. 5. Def.) EG die fünfte Binomiale.

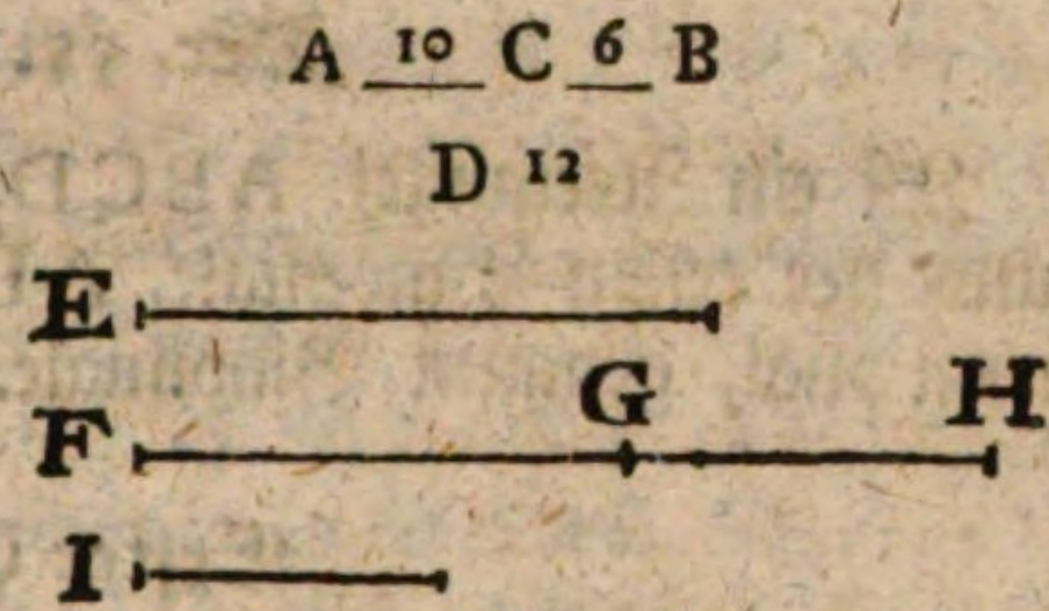
Der 54. Satz.

Die sechste Binomiale zu finden.

Es seyen zwey Zahlen, AC, CB, deren Summe AB, zu keiner von beyden die Verhältniß von Quadratzahlen habe, auch eine Zahl D, welche selbst keine Quadratzahl sey, und weder zu BA

noch

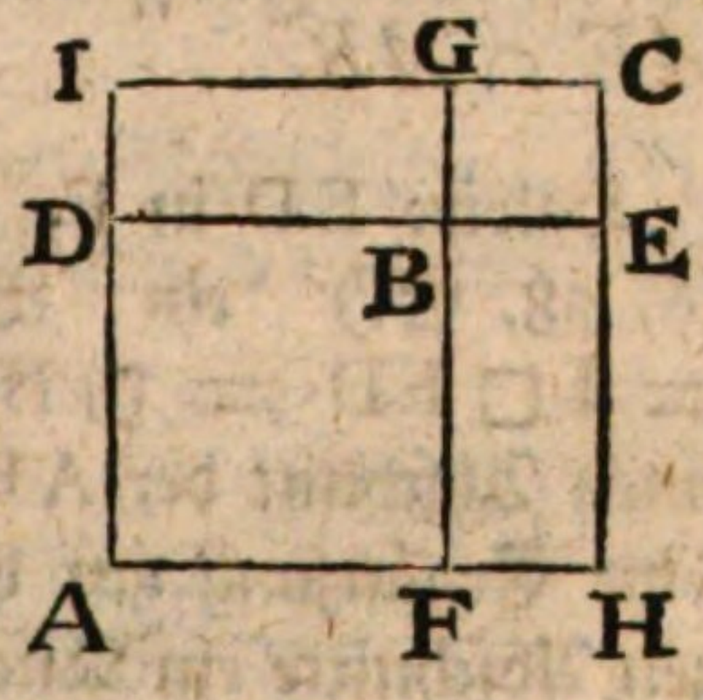
noch zu AC die Verhältniß von Quadratzahlen habe. Ferner sey die Rationale E. Mache D : AB = □E : □FG, so ist, wie im vorigen, □E ∩ □FG, daher FG rational, aber $E \cup FG$. Mache ferner BA : AC = □FG : □GH, so sind, wie im vorigen, FG, GH, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich FH eine Binomiale, deren Namen FG, GH.



Da D : AB = □E : □FG, und BA : AC = □FG : □GH, so ist gleichförmig D : AC = □E : □GH, folglich ist (10, 9. S.) $E \cup GH$. Nun ist, weil BA > AC, auch □FG > □GH. Es sey daher □FG − □GH = □I, so ist zurückkehrend BA : CB = □FG : □I, folglich (10, 9. S.) $FG \cup I$, folglich (II. 6. Def.) FH die sechste Binomiale.

Lehnsatz.

Es seyen zwey Quadrate, AB, BC, so an einander gestellet, daß DB mit BE, folglich (1, 14. S.) auch FB mit BG in Einer geraden Linie liege. Wird nun das Parallelogramm, AC, vollendet: so ist zu beweisen



1.) Daß AC ein Quadrat sey. Da DB = BF, und BE = BG, so ist DE = FG. Nun ist DE = AH = IC, und FG = AI = HC. Demnach ist AC gleichseitig, aber auch rechtwinklich, folglich ein Quadrat.

2.) Daß DG die mittlere Proportionalfläche zwischen den Quadraten, AB, BC, sey. Da FB : BG = DB : BE, aber (6, 1. S.) FB : BG = AB : DG, und DB : BE = DG : BC, so ist (5, 11. S.) AB : DG = DG : BC.

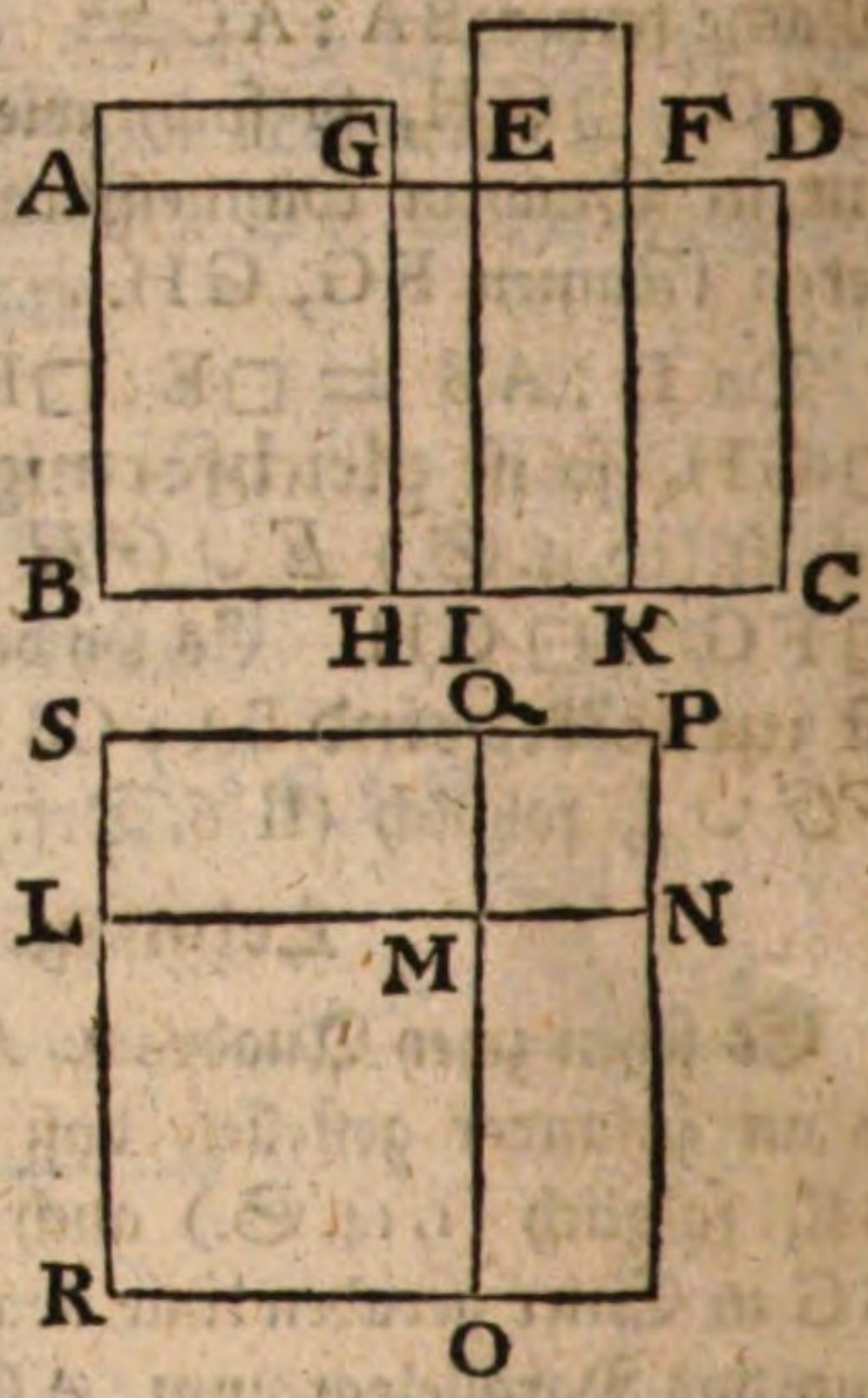
3.) Daß DC die mittlere Proportionalfläche zwischen den Quadraten, AC, CB, sey. Da AD = IG, und DI = GC, folglich AD : DI = IG : GC, so ist verbunden AI : ID = IC : CG. Nun ist (6, 1. S.) AI : ID = AC : CD, und IC : CG = CD : CB. Folglich (5, 11. S.) AC : CD = CD : CB.

Der 55. Satz.

Ist ein Rectangel, ABCD, aus einer Rationalen, AB, und der ersten Binomiale, AD: so ist dessen Quadratseite irrational, genannt Binomiale.

Erster Theil.

Da AD die erste Binomiale, so theile sie in ihre Namen in E, so daß AE der grössere Name sey. Folglich sind (10, 37. S.) AE, ED, rational, nur in Quadrat commensurabel, auch sind (II. 1. Def.) die Quadrate der AE, ED, um das Quadrat einer mit AE commensurabeln Linie unterschieden, ferner ist der grössere Name, $AE \cap AB$.



Halbire ED in F, und stelle (6, 28. S.) ein Rectangel, $= \frac{1}{4} \square ED = \square EF$, auf einen Abschnitt der AE, so daß seine Ergänzung auf dem übrigen Abschnitte ein Quadrat sey. Es sey dies das Rect. AGGE, so ist (10, 18. S.) $AG \cap GE$. Durch die Punkte, G, E, F, ziehe GH, EI, FK, mit AB, CD, parallel. Mache (2, 14. S.) das Quadrat $RM = AH$, und das Quadrat $MP = GI$. Diese Quadrate stelle so an einander, daß LM, MN, und daher auch QM, MO, in Einer geraden Linie seyen. Vollende das Parallelogramm, RP, so ist dasselbe (10, 54. Lehns.) ein Quadrat.

Da Rect. $AGGE = \square EF$, so ist (6, 17. S.) $AG : EF = EF : GE$, folglich (6, 1. S.) $AH : EK = EK : GI$, folglich EK die mittlere Proportionalfläche zwischen AH, GI, das ist, zwischen RM, MP. Nun ist es (10, 54. Lehns.) auch LQ. Demnach $EK = LQ$. Nun ist (1, 36. S.) $EK = FC$, und (1, 43. S.) $LQ = ON$. Folglich $EC = LQ + ON$. Nun ist

ist AH = RM, und GI = MP. Folglich ist EC + AH + GI = LQ + ON + RM + MP, das ist, AC = RP = □LN. Demnach ist LN des Rectangels AC, Quadratseite.

Zweyter Theil.

Da AG ∩ GE, so ist (10, 16. S.) AE ∩ AG, GE. Nun war AE ∩ AB. Folglich sind (10, 12. S.) AG, GE ∩ AB. Aber AB rational. Folglich AG, GE, rational, folglich (10, 20. S.) AH, GI, rational, und (10, 10. S.) AH ∩ GI. Nun ist AH = RM, und GI = MP. Folglich sind RM, MP, das ist □LM, □MN, rational und commensurabel.

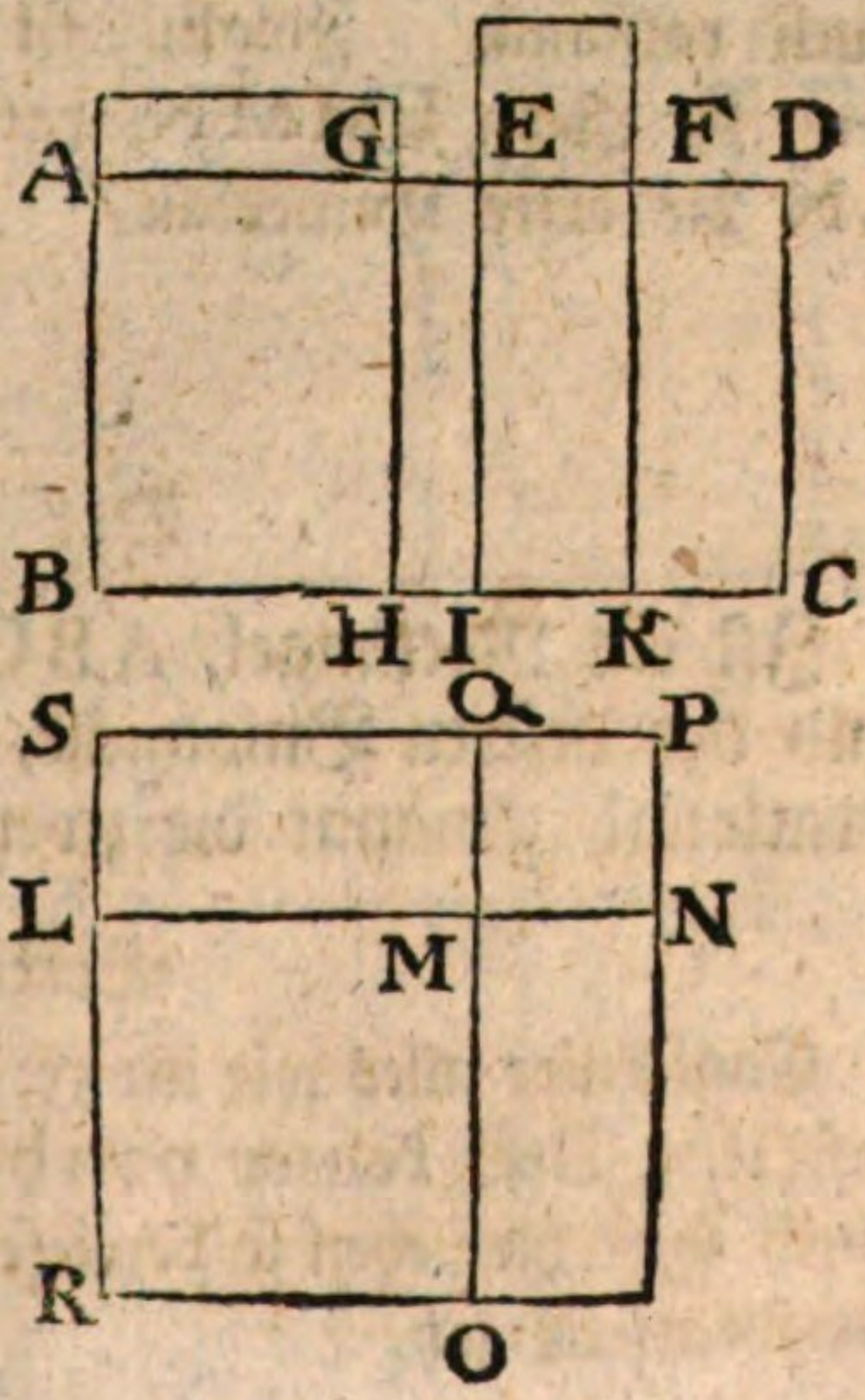
Da (10, 37. S.) AE ∪ ED, aber AE ∩ AG, und ED ∩ EF, so ist AG ∪ EF, folglich AH ∪ EK, das ist, RM ∪ LQ. Nun ist RM : LQ = OM : MQ, folglich ist auch OM ∪ MQ, das ist, LM ∪ MN. Nun wäre □LM, □MN, rational und commensurabel. Demnach sind LM, MN, rational, nur in Quadrat commensurabel, folglich (10, 37. S.) LN eine Binomiale.

Der 56. Satz.

Ist ein Rectangel, ABCD, aus einer Rationalen, AB, und der zweyten Binomiale, AD: so ist dessen Quadratseite irrational, genannt die erste Bimediale.

Erster Theil.

Mache alles wie im vorigen Satze, so ist auch hier alles, wie dort, nur daß (11. 2. Def.) hier der kleinere Name, *ED ∩ AB*. Auch wird hier auf eben die Art bewiesen, daß LN des Rectangels, AC, Quadratseite ist.

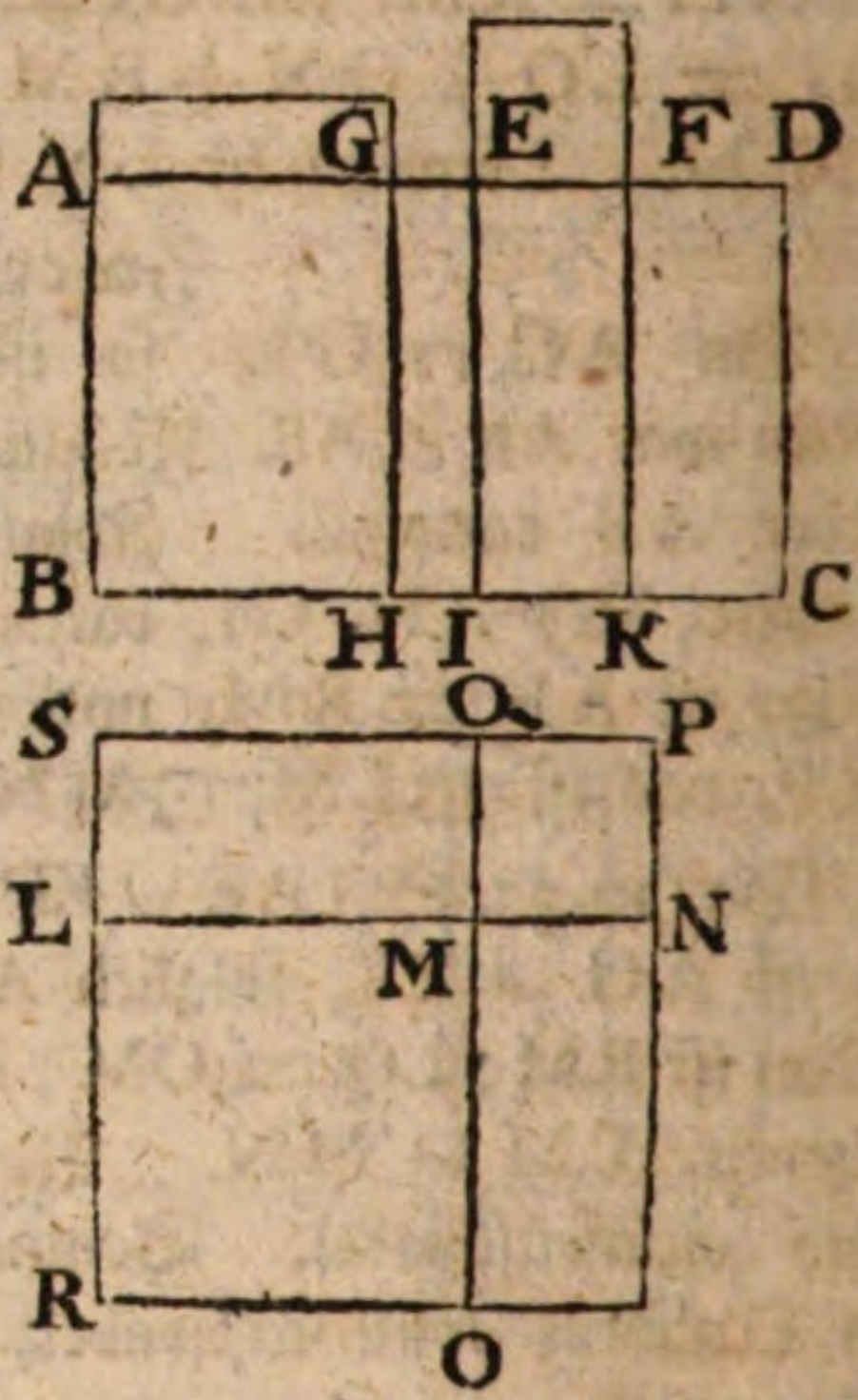


Zweyter Theil.

Da (10, 37. S.) AE ∪ ED, aber ED ∩ AB, so ist (10, 14. S.) AE ∪ AB. Da AG ∩ GE, so ist (10, 16. S.) AE ∩ AG, GE. Nun ist AE rational, folglich sind auch AG, GE, ra-

tional.

tional. Da AE ∪ AB, aber AE ∩ AG, GE, so sind AG, GE ∪ AB. Demnach sind AB, AG, GE, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich (10, 22. S.) AH, GI, das ist, RM, MP, folglich LM, MN, medial. Nun ist AG ∩ GE. Folglich AH ∩ GI, das ist, RM ∩ MP, das ist, □LM ∩ □MN. Demnach sind LM, MN, medial, in Quadrat commensurabel.



Da AE ∪ ED, aber AE ∩ AG, und ED ∩ EF, so ist AG ∪ EF, folglich AH ∪ EK, das ist, RM ∪ LQ, das ist, OM ∪ MQ, das ist, LM ∪ MN. Demnach sind LM, MN, medial, nur in Quadrat commensurabel.

Dritter Theil.

Da DE ∩ AB, EF, so sind EF, EI, commensurabel, aber auch rational. Folglich ist (10, 20. S.) EK, das ist, LQ, das ist, Rect. LMMN, rational. Folglich ist (10, 38. S.) LN die erste Bimediale.

Der 57. Satz.

Ist ein Rectangel, ABCD, aus einer Rationalen, AB, und der dritten Binomiale, AD: so ist dessen Quadratseite irrational, genannt die zweyte Bimediale.

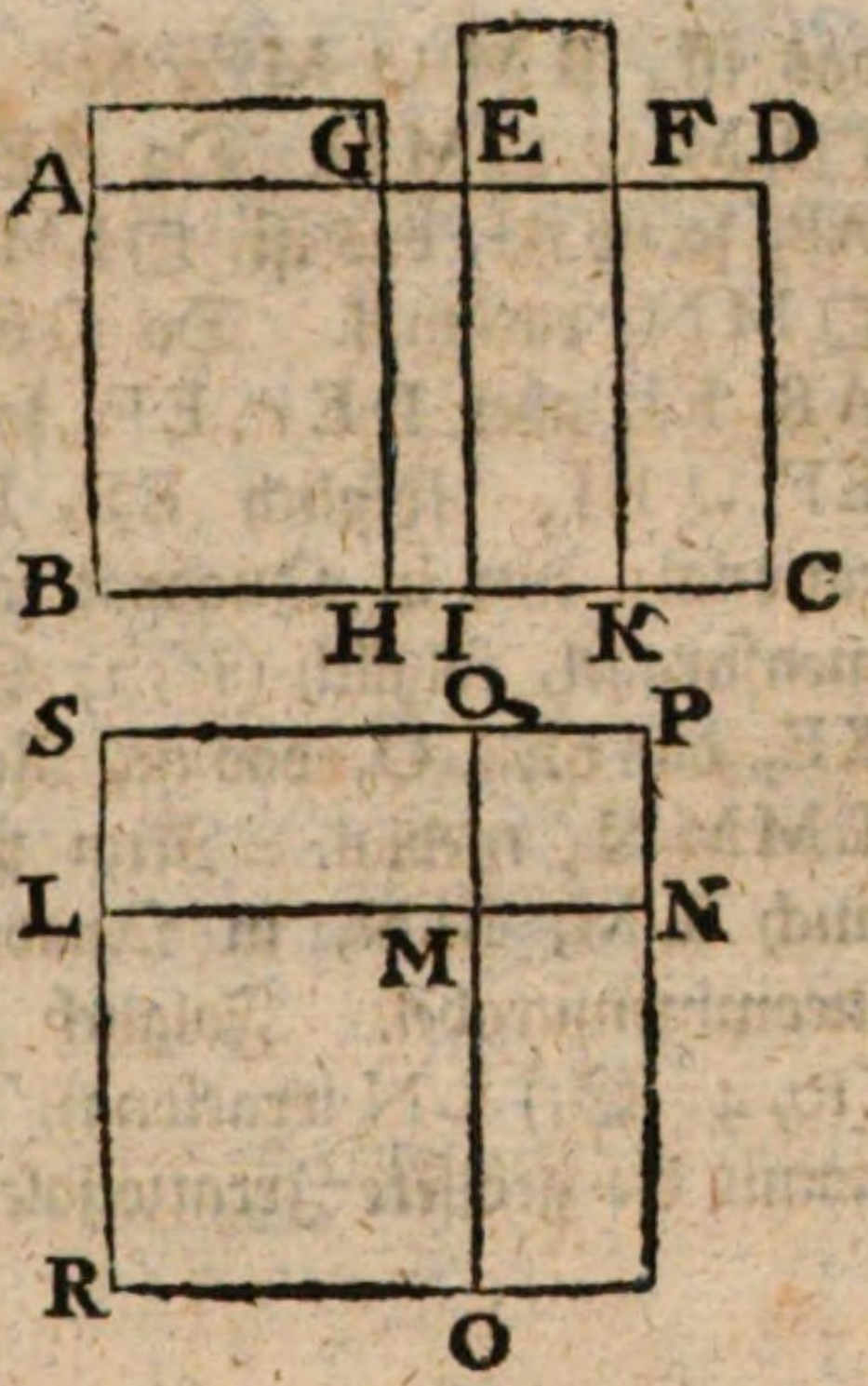
Erster Theil.

Construire alles wie im 55. Satze, so ist hier alles eben so, nur daß (II. 3. Def.) keiner von beyden Namen, *AE*, *ED* ∩ *AB*. Auch wird hier eben so bewiesen, daß LN des Rectangels, AC, Quadratseite sey.

Zweyter

Zweyter Theil.

Auf eben die Art, wie im 56. Satze, wird auch hier bewiesen, daß LM, MN, medial, nur in Quadrat commensurabel, oder daß LN eine Bimediale sey.



Dritter Theil.

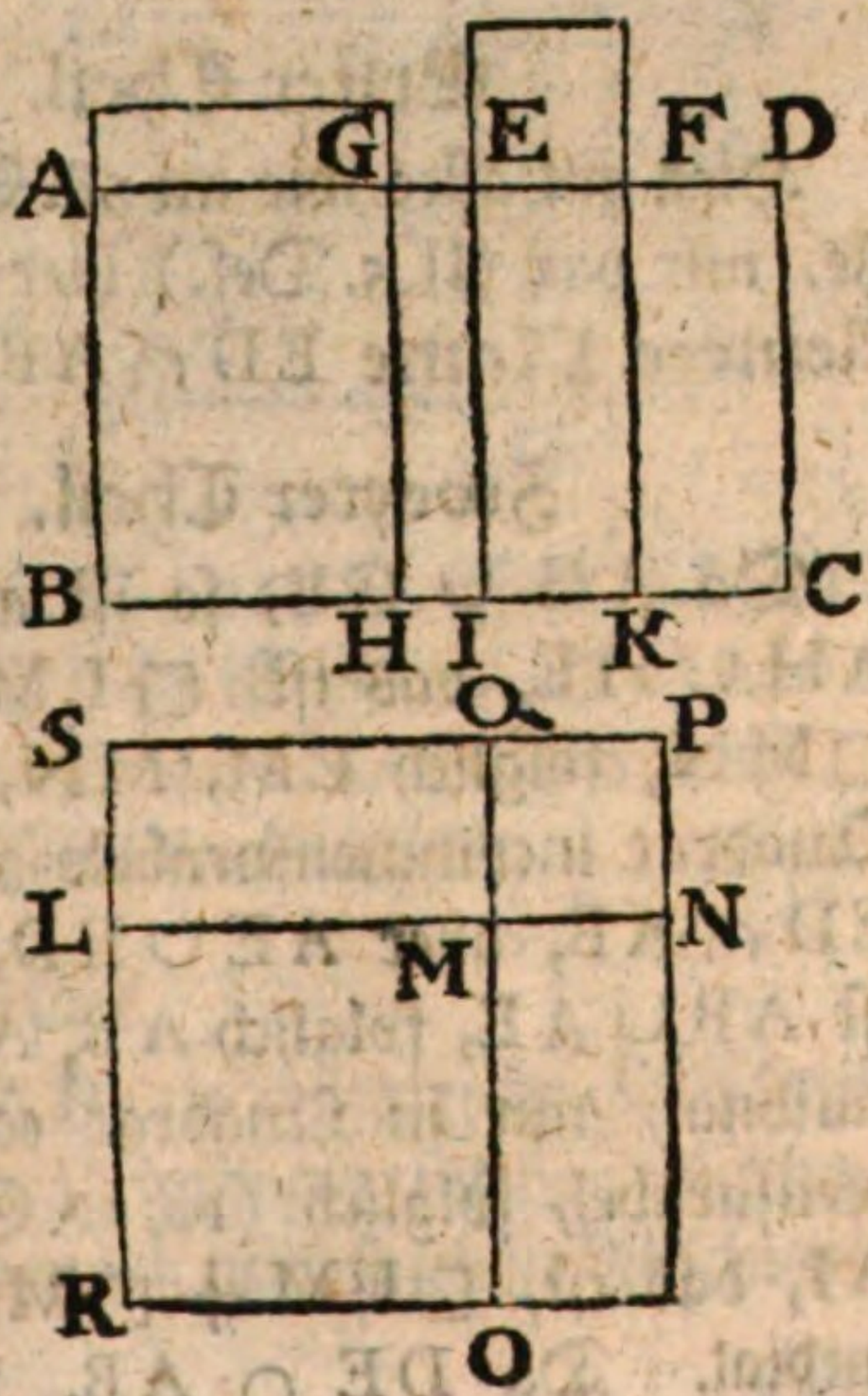
Da DE ∪ AB, EI, aber EF ∩ ED, so ist EF ∪ EI, beyde aber rational, folglich sind EF, EI, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich ist EK, das ist, LQ, das ist, Rect. LMMN, medial, folglich (10, 39. S.) LN die zweyte Bimediale.

Der 58. Satz.

Ist ein Rectangel, ABCD, aus einer Rationalen, AB, und der vierten Binomialen, AD: so ist dessen Quadratseite irrational, genannt die grössere Irrationale.

Erster Theil.

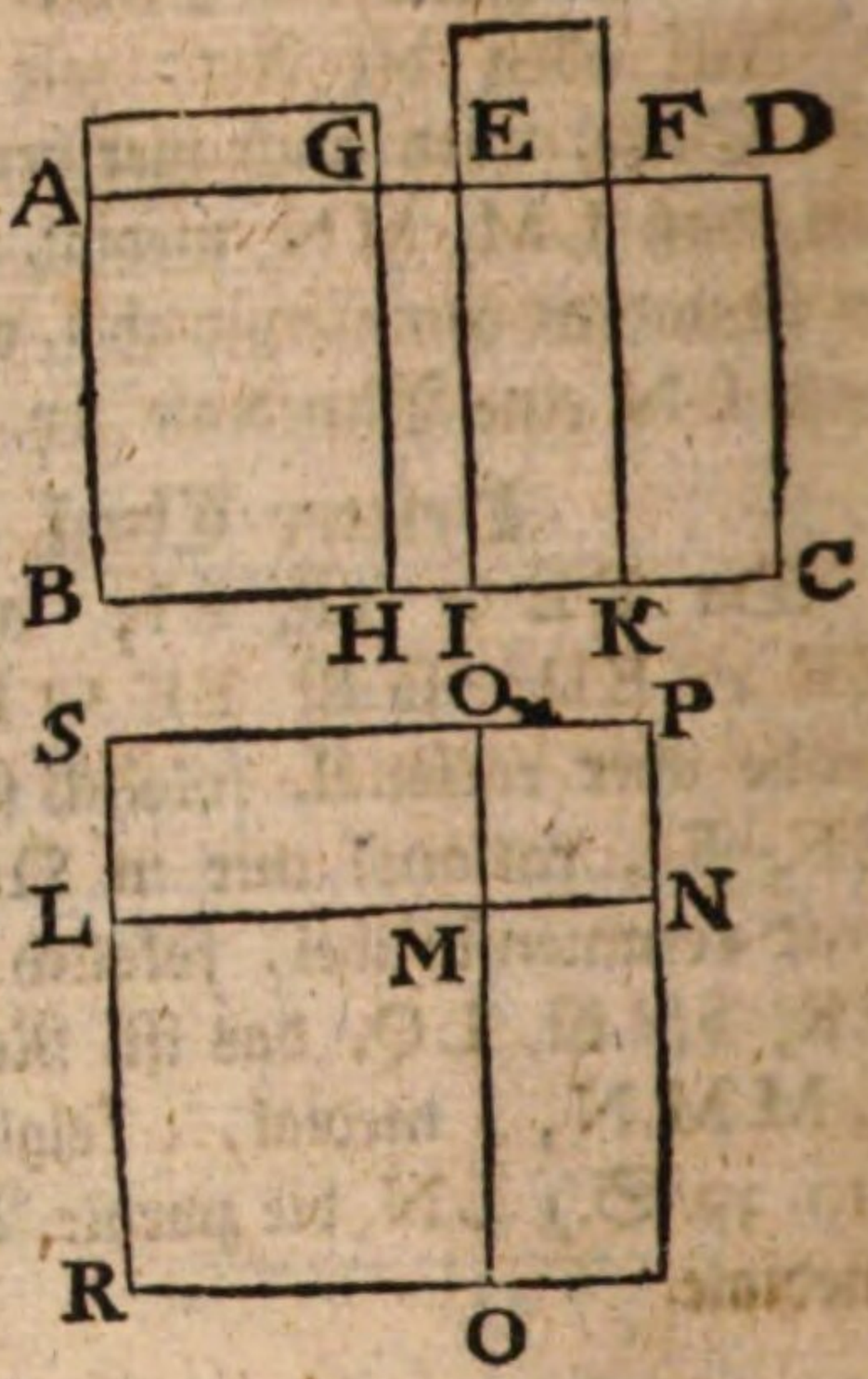
Construire alles wie im 55. Satze, so ist hier alles eben so, nur daß (II. 4. Def.) die Quadrate AE, ED, um das Quadrat einer mit AE incommensurabeln Linie unterschieden sind. Auch ist hier der grössere Name AE ∩ AB. Nun wird eben so bewiesen, daß LN des Rectangels, AC, Quadratseite sey.



Zweyter Theil.

Da AG ∪ GE, so ist (6, 1. und 10, 10. S.) AH ∪ GI,

das ist, RM ∪ MP, das ist, □LM ∪ □MN. Da AE ∩ AB, so ist AI, das ist, □LM + □MN, rational. Da DE ∪ AB, EI, aber DE ∩ EF, so ist EF ∪ EI, folglich EF, EI, rational, nur in Quadrat commensurabel, folglich (10, 22. S.) KE, das ist, LQ, das ist, Rect. LMMN, medial. Nun sind auch LM, MN, in Quadrat incommensurabel. Folglich ist (10, 40. S.) LN irrational, genannt die grössere Irrationale.



Der 59. Satz.

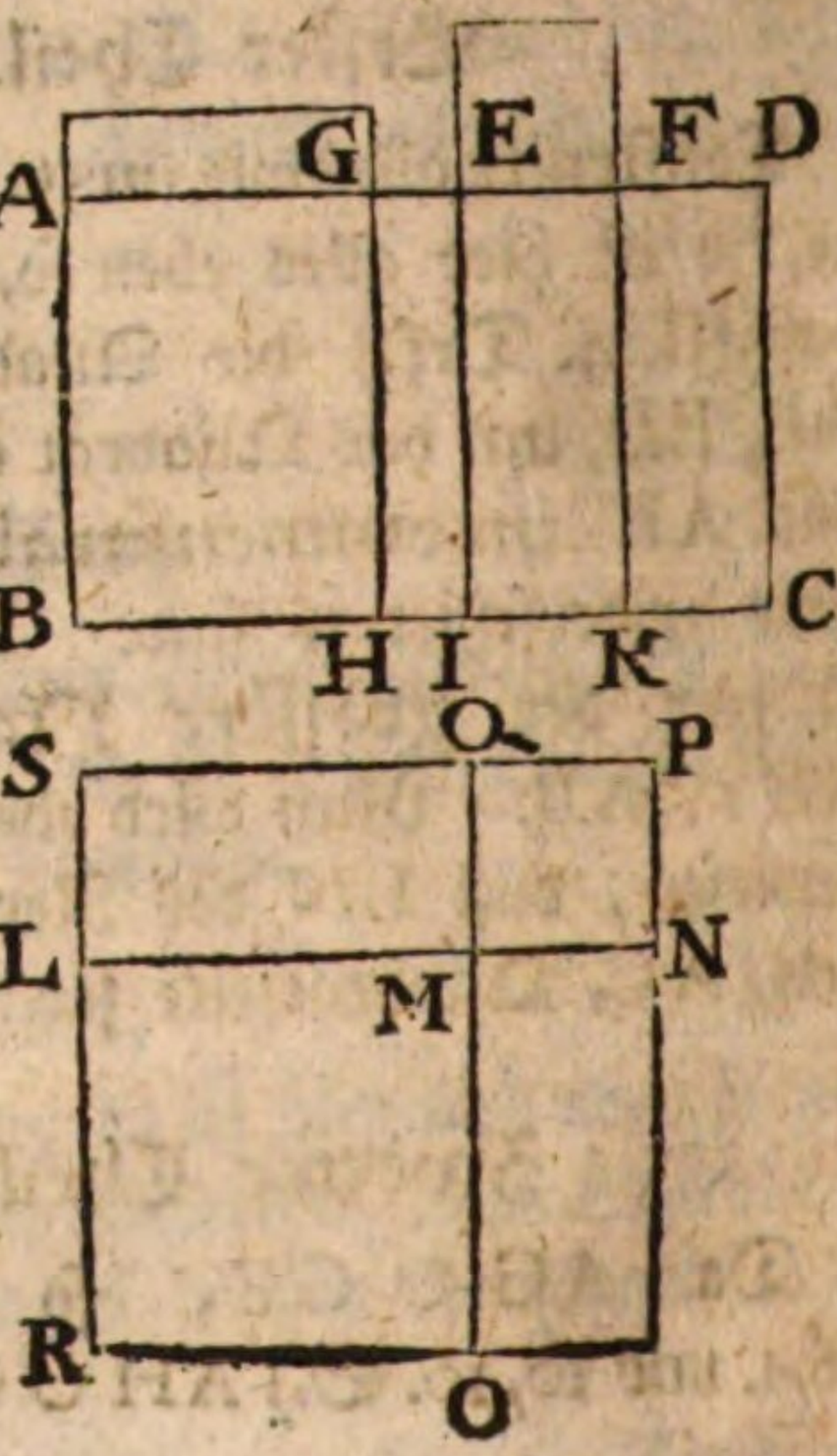
Ist ein Rectangel, ABCD, aus einer Rationale, AB, und der fünften Binomiale, AD: so ist dessen Quadratseite irrational, genannt des Rationalen und Medialen Quadratseite.

Erster Theil.

Hier gilt alles wie im 58. Satze, nur daß (II. 5. Def.) hier der kleinere Name ED ∩ AB.

Zweyter Theil.

Da AG ∪ GE, so ist auch AH ∪ HE, das ist, □LM ∪ □MN, folglich LM, MN, in Quadrat incommensurabel. Da ED ∩ AB, aber AE ∪ ED, so ist AB ∪ AE, folglich AB, AE, rational, nur in Quadrat commensurabel, folglich (10, 22. S.) AI, das ist, □LM + □MN, medial. Da DE ∩ AB, EI,



und

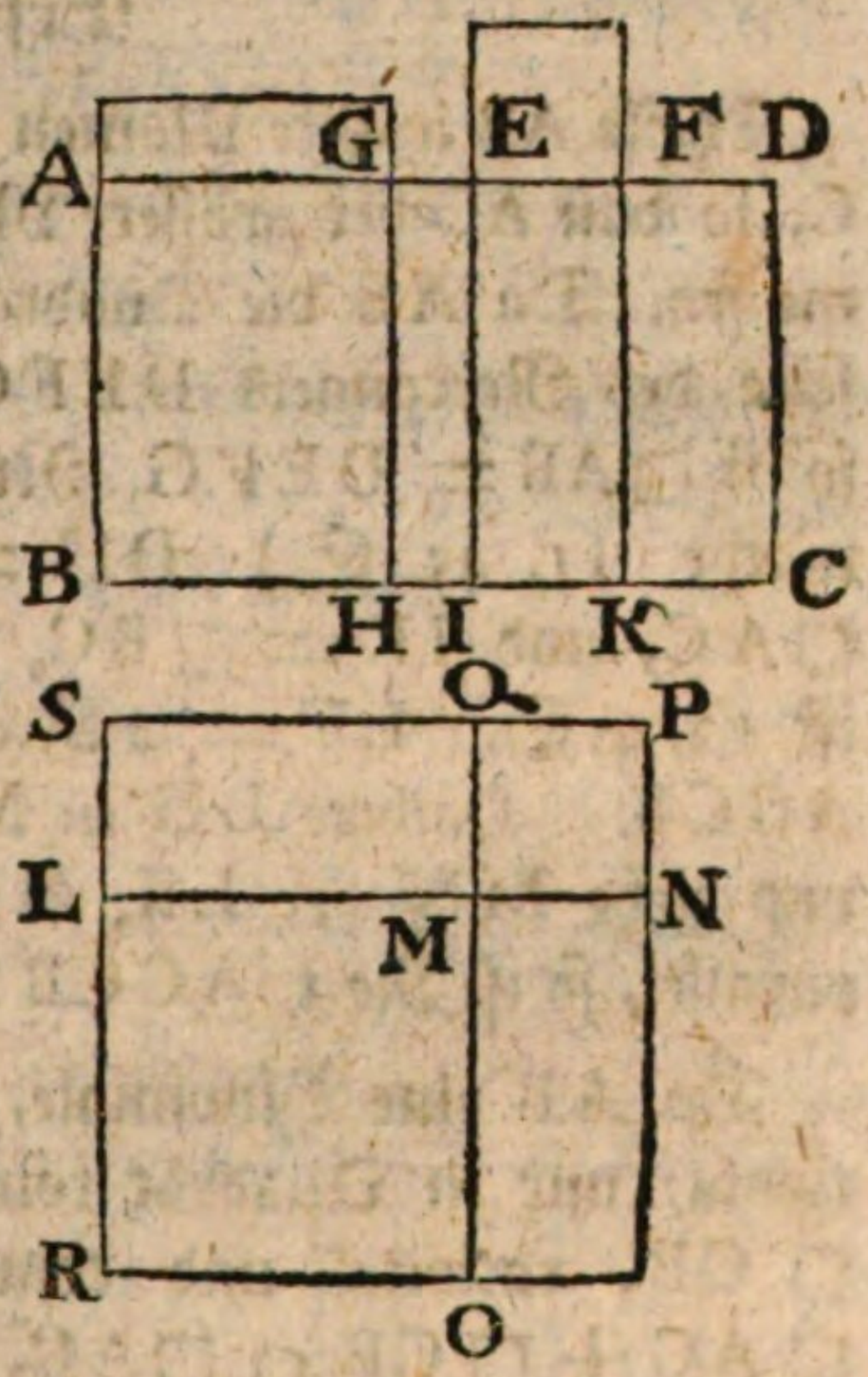
und DE ∩ EF, so ist EF ∩ EI. Nun ist EI rational, folglich (10, 20. S.) EK, das ist, LQ, das ist, Rect. LMMN, rational, folglich ist (10, 41. S.) LN des Rationalen und Medialen Quadratseite.

Der 60. Satz.

Ist ein Rectangel, ABCD, aus einer Rationalen, AB, und der sechsten Binomiale, AD: so ist dessen Quadratseite irrational, genannt zweyer Medialen Quadratseite.

Erster Theil.

Alles wie beym 58. Satze, nur daß hier (II. 6. Def.) keiner von beyden Namen, AE, ED ∩ AB.



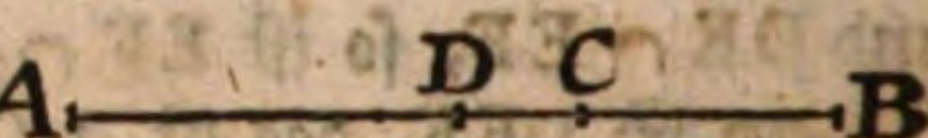
Zweyter Theil.

Da AG ∪ GE, so sind auch hier LM, MN, in Quadrat incommensurabel. Da EA ∪ AB, so sind EA, AB, rational, nur in Quadrat commensurabel. Folglich ist (10, 20. S.) AI, das ist, □LM + □LN, medial. Da ED ∪ AB, EI, aber ED ∩ EF, so sind FE, EI, rational, nur in Quadrat commensurabel. Folglich ist (10, 20. S.) EK, das ist, LQ, das ist, Rect. LMMN, medial. Endlich da EA ∪ EF, so ist AI ∪ EK, das ist, □LM + □MN, ∪ Rect. LMMN. Demnach ist (10, 42. S.) LN zweyer Medialen Quadratseite.

Lehnsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in ungleiche Abschnitte, AC, CB, getheilt: so sind die Quadrate solcher Abschnitte grösser, als das zwiefache Rectangel aus solchen Abschnitten.

Halbire AB in D, so ist (2, 5. S.) Rect. ACCB + □DC = □AD, folglich Rect. ACCB < □AD, folglich auch 2 Rect. ACCB < 2□AD. Nun ist (2, 9. S.) □AC + □CB = 2□AD + 2□CD. Folglich ist □AC + □CB > 2 Rect. ACCB.

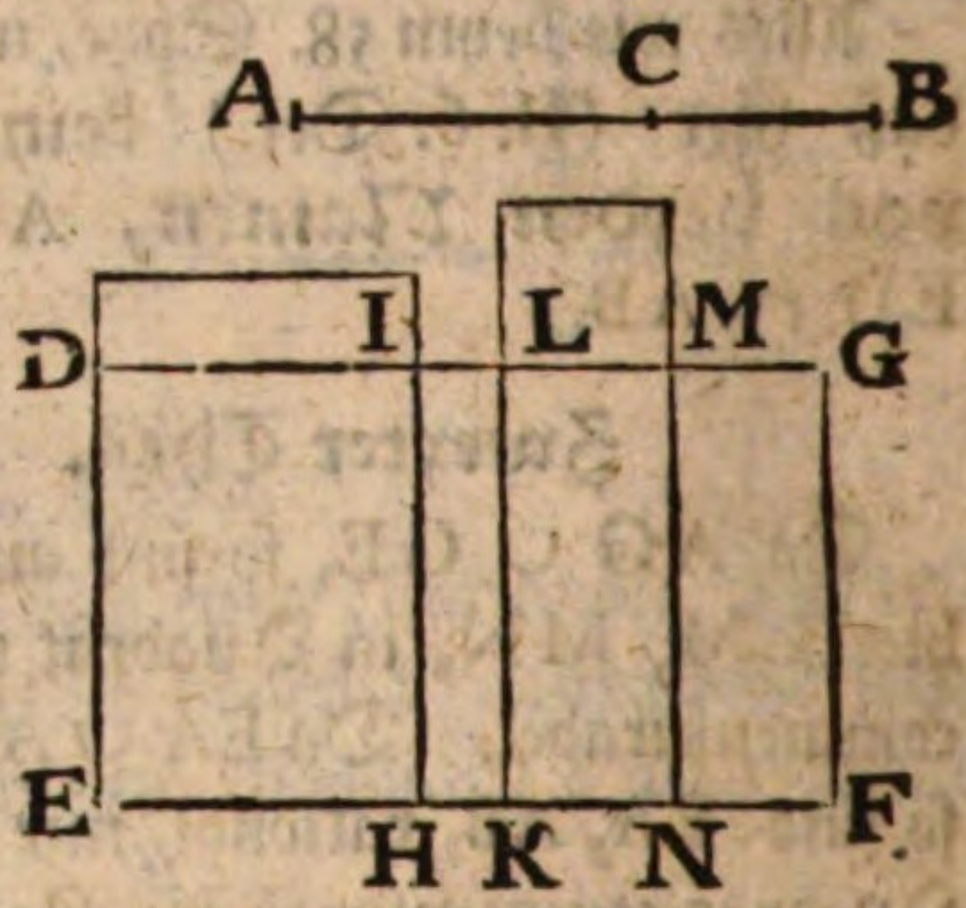


Der 61. Satz.

Ist in einem Rectangel, DEFG, dessen Quadratseite die Binomiale, AB, die eine Seite DE, rational: so ist die andre Seite DG, die erste Binomiale.

Erster Theil.

Theile AB in ihre Namen in C, so daß AC der grössere Name sey. Da AB die Quadratseite des Rectangels DEFG, so ist □AB = DEFG. Nun mache (1, 45. S.) DH = □AC, und IK = □BC, so ist (2, 4. S.) LF = 2 Rect. ACCB. Halbire LG in M, und ziehe MN der LK, GF, parallel, so ist Rect. ACCB = LN = MF.



Da AB eine Binomiale, so sind (10, 37. S.) AC, CB, rational, nur in Quadrat commensurabel, folglich auch □AC, □CB, rational und commensurabel, folglich (10, 16. S.) □AC + □CB ∩ □AC, □CB, folglich □AC + □CB, das ist DK, rational. Nun ist DE rational. Folglich ist (10, 23. S.) DL rational und mit DE commensurabel.

Da AC, CB, rational, nur in Quadrat commensurabel, so ist 2 Rect. ACCB, das ist LF, medial. Aber DE, das ist LK, rational. Folglich ist (10, 23. S.) LG rational und mit DE in Länge incommensurabel. Nun war DL rational und mit DE commensurabel. Folglich ist (10, 13. S.) DL ∪ LG. Aber beyde rational. Folglich sind DL, LG, rational, nur in Quadrat commensurabel, folglich ist (10, 37. S.) DG eine Binomiale.

Zweyter

Zweyter Theil.

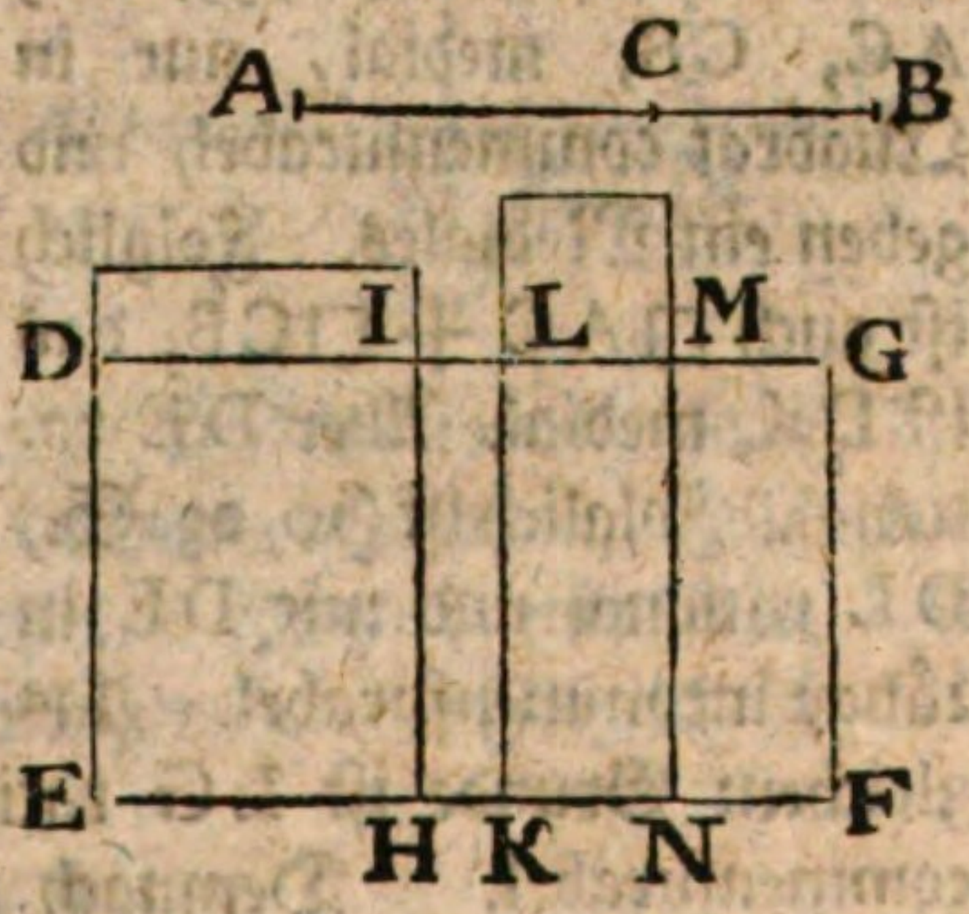
Da (10, 60. Lehns.) □ AC + □ CB > 2 Rect. ACCB, das ist, DK > LF, so ist auch DL > LG. Ferner da □ AC ∩ □ CB, das ist, DH ∩ IK, so ist (10, 14. S.) auch DI ∩ IL. Ferner da (10, 55. Lehns.) Rect. ACCB die mittlere Proportionalfläche zwischen □ AC und □ CB, das ist, LN zwischen DH und IK, so ist DH : LN = LN : IK, folglich auch (6, 1. S.) DI : LM = LM : IL, folglich (6, 17. S.) Rect. DIIL = □ LM = ¼ □ LG, folglich (10, 18. S.) sind die Quadrate von DL, LG, um das Quadrat einer mit DL in Länge commensurabeln Linie unterschieden. Nun war auch DL mit der angenommenen Rationale DE in Länge commensurabel. Folglich ist (II. 1. Def.) DG die erste Binomiale.

Der 62. Satz.

Ist in einem Rectangel, DEFG, dessen Quadratseite die erste Bimediale, AB, die eine Seite, DE, rational: so ist die andre Seite, DG, die zweyte Binomiale.

Erster Theil.

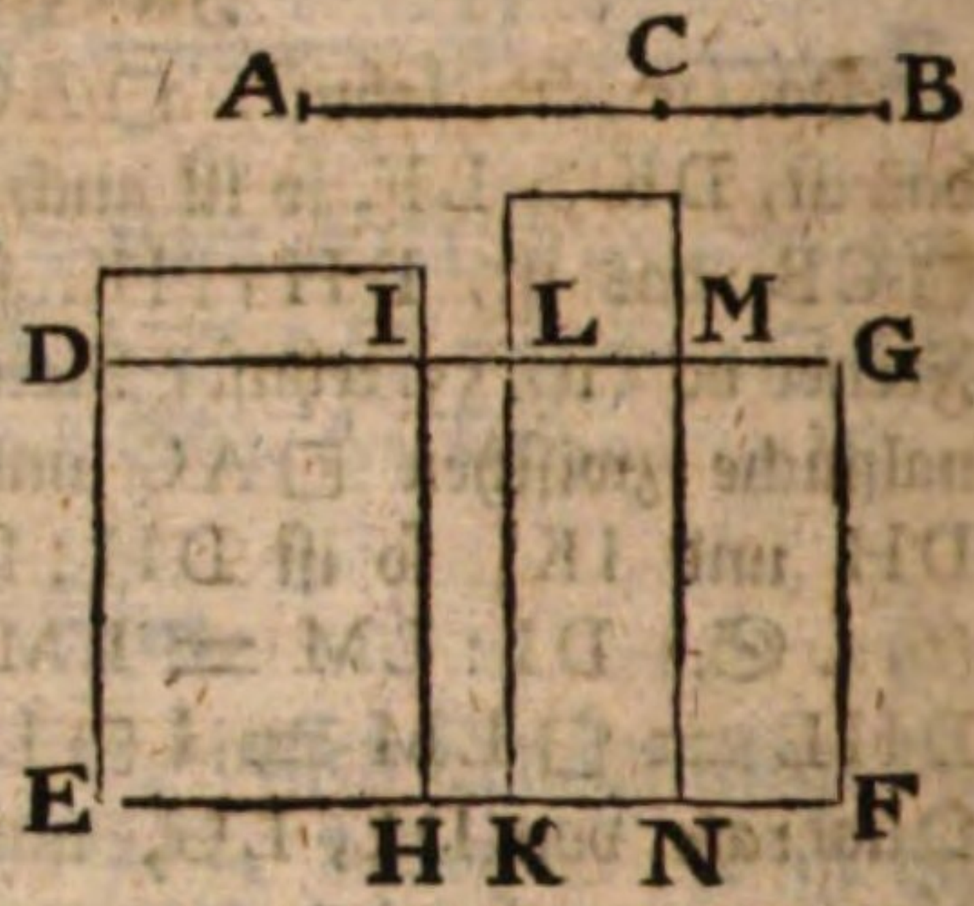
Construire alles wie vorher.



Da AB die erste Bimediale, so sind (10, 38. S.) AC, CB, medial, nur in Quadrat commensurabel, und geben ein Rationales. Folglich sind auch die Quadrate von AC, CB, medial, folglich ist auch DK medial. Nun ist DE rational, folglich ist (10, 23. S.) DL rational und mit DE in Länge incommensurabel. Da 2 Rect. ACCB, das ist LF, rational, auch LK, das ist DE, rational, so ist (10, 21. S.) LG rational und mit DE commensurabel, folglich (10, 13. S.) DL ∪ LG. Aber beyde rational. Demnach sind DL, LG, rational, nur in Quadrat commensurabel, folglich ist (10, 37. S.) DG eine Binomiale.

Zweyter Theil.

Auf eben die Art, wie vorher, wird bewiesen, daß die Quadrate von DL, LG, um das Quadrat einer mit DL in Länge commensurabeln Linie unterschieden sind. Nun war hier LG ∩ DE. Folglich ist (II. 2. Def.) DG die zweyte Binomiale.



Der 63. Satz.

Ist in einem Rectangel, DEFG, dessen Quadratseite die zweyte Bimediale, AB, die eine Seite, DE, rational: so ist die andre Seite, DG, die dritte Binomiale.

Erster Theil.

Construire alles wie im 61. Satze. Da AB die zweyte Bimediale, so sind (10, 39. S.) AC, CB, medial, nur in Quadrat commensurabel, und geben ein Mediales. Folglich ist auch □AC + □CB, das ist DK, medial. Aber DE rational. Folglich ist (10, 23. S.) DL rational und mit DE in Länge incommensurabel. Aus gleichem Grunde ist LG rational und mit DE in Länge incommensurabel. Demnach sind DL, LG, rational, und mit DE in Länge incommensurabel.

Da AC ∪ CB, und (6, 1. S.) AC : CB = □AC : Rect. ACCB, so ist □AC ∪ Rect. ACCB, folglich auch □AC + □CB ∪ 2 Rect. ACCB, das ist, DK ∪ LF, folglich auch DL ∪ LG. Aber beyde rational. Folglich ist DG eine Binomiale.

Zweyter Theil.

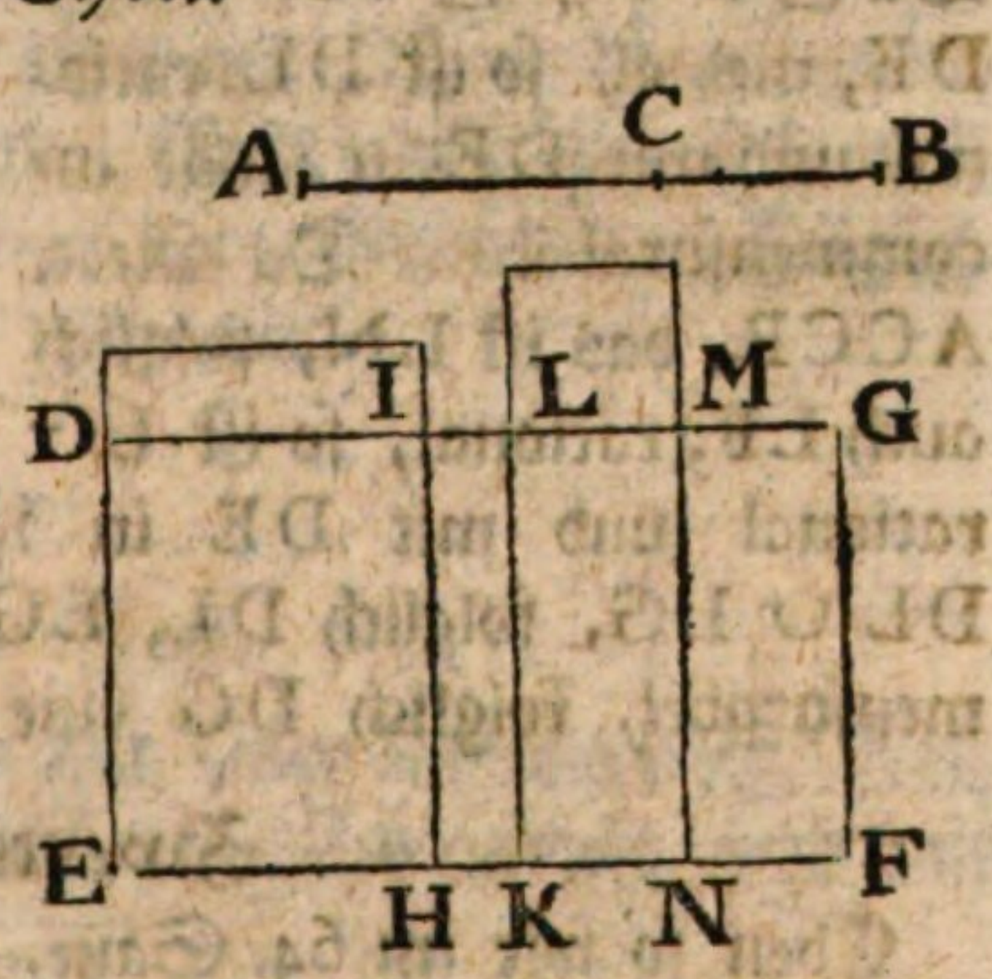
Auf eben die Art, wie im 61. Satze, wird bewiesen, daß die Quadrate von DL, LG, um das Quadrate einer mit DL in Länge commensurabeln Linie unterschieden sind. Nun war weder DL, noch LG, der angenommenen Rationale, DE, in Länge commensurabel. Folglich ist (II. 3. Def.) DG die dritte Binomiale.

Der 64. Satz.

Ist in einem Rectangel, DEFG, dessen Quadratseite die grössere Irrationale, AB, die eine Seite, DE, rational: so ist die andre Seite, DG, die vierte Binomiale.

Erster Theil.

Construire alles wie vorher. Da AB die grössere Irrationale, so sind (10, 40. S.) AC, CB, in Quadrat incommensurabel, und es ist □AC + □CB rational, aber Rect. ACCB medial. Da □AC + □CB, das ist DK, rational, auch DE rational, so ist DL rational und mit DE in Länge commensurabel. Da Rect. ACCB, folglich auch 2 Rect. ACCB, das ist LF, medial, aber DE rational, so ist LG rational und mit DE in Länge incommensurabel. Folglich ist DL ∪ LG. Beyde aber rational. Folglich sind DL, LG, rational, nur in Quadrat commensurabel. Folglich ist DG eine Binomiale.



Zweyter Theil.

Auf eben die Art, wie im 61. Satze, wird bewiesen, daß DL > LG, und daß Rect. DIIL = □LM. Aber hier ist □AC ∪ □CB, das ist, DH ∪ IK, folglich auch DI ∪ IL. Folglich (10, 19. S.) sind die Quadrate von DL, LG, um das Quadrat einer mit DL in Länge incommensurabeln Linie unterschieden. Nun war DL ∩ DE. Folglich ist (II. 4. Def.) DG die vierte Binomiale.

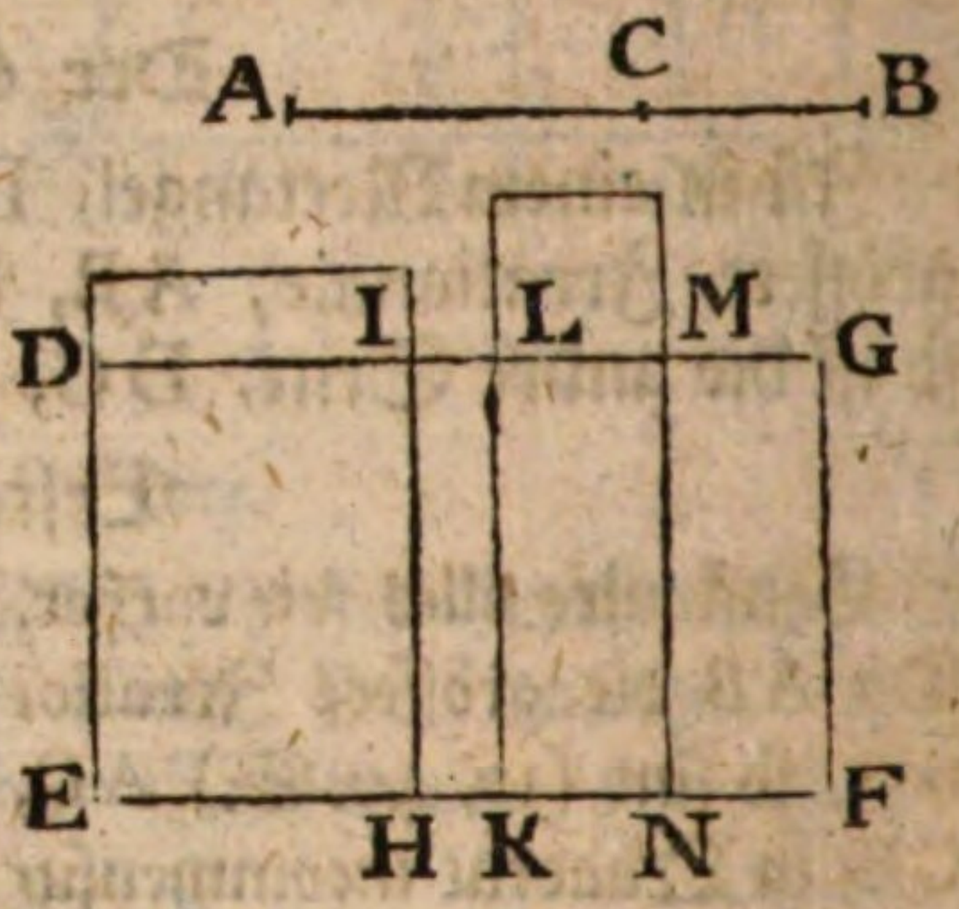
Der

Der 65. Satz.

Ist in einem Rectangel, DEFG, dessen Quadratseite, AB, des Rationalen und Medialen Quadratseite ist, die eine Seite, DE, rational: so ist die andre Seite, DG, die fünfte Binomiale.

Erster Theil.

Construire alles wie vorher. Da AB des Rationalen und Medialen Quadratseite, so ist (10, 41. S.) AC ⌣ CB, auch ist □AC + □CB, medial, aber Rect. ACCB, rational. Da □AC + □CB, das ist DK, medial, so ist DL rational und mit DE in Länge incommensurabel. Da Rect. ACCB, das ist LN, folglich auch LF, rational, so ist LG rational und mit DE in Länge incommensurabel, folglich DL ⌣ LG, folglich DL, LG, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich DG eine Binomiale.



Zweyter Theil.

Eben so wie im 64. Satze, wird bewiesen, daß die Quadrate von DL, LG, um das Quadrat einer mit DL in Länge incommensurabeln Seite unterschieden sind. Nun war LG ∩ DE. Folglich ist (II. 5. Def.) DG die fünfte Binomiale.

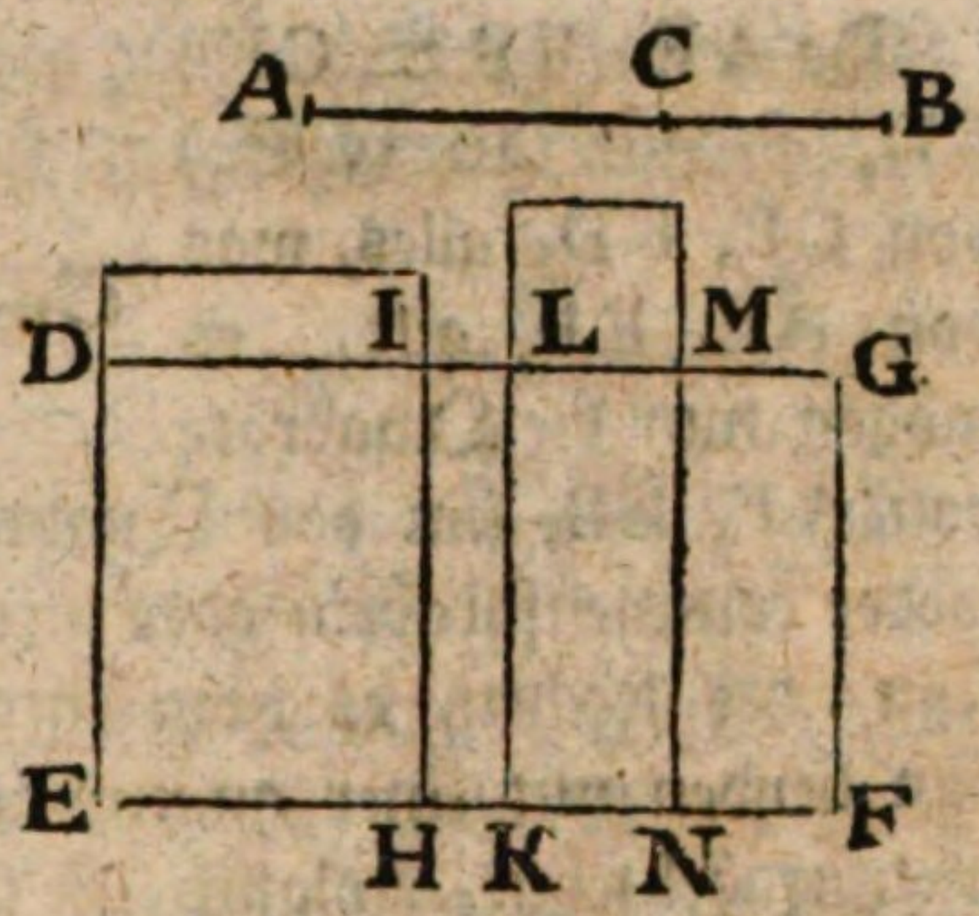
Der 66. Satz.

Ist in einem Rectangel, DEFG, dessen Quadratseite, AB, zweyer Medialen Quadratseite ist, die eine Seite, DE, rational: so ist die andre Seite, DG, die sechste Binomiale.

Erster Theil.

Construire alles, wie vorher. Da AB zweyer Medialen Quadratseite, so ist (10, 42. S.) AC ⌣ CB, auch ist □AC + □CB medial, desgleichen Rect. ACCB medial. Ferner ist

ist □AC + □CB ∪ Rect. ACCB. Demnach ist DK, LI, medial, und DK ∪ LF. Folglich ist DL, LG, rational und mit DE in Länge incommensurabel, desgleichen DL ∪ LG. Folglich sind DL, LG, rational, nur in Quadrat commensurabel, folglich DG eine Binomiale.



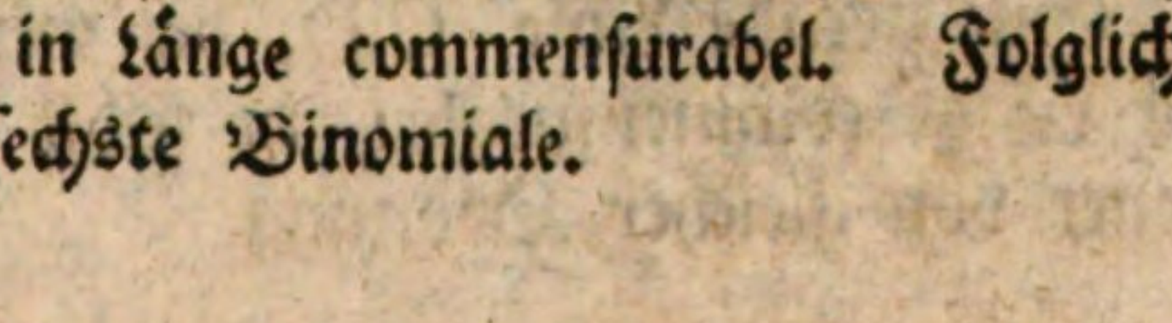
Zweyter Theil.

Eben so wie im 64. Satze wird bewiesen, daß die Quadrate von DL, LG, um das Quadrat einer mit DL in Länge incommensurabeln Linie unterschieden sind. Nun war weder DL noch LG der Rationalien DE in Länge commensurabel. Folglich ist (II. 6. Def.) DG die sechste Binomiale.

Der 67. Satz.

Eine gerade Linie, CD, die mit einer Binomialen, AB, in Länge commensurabel, ist selbst eine Binomiale, und mit jener von gleicher Ordnung.

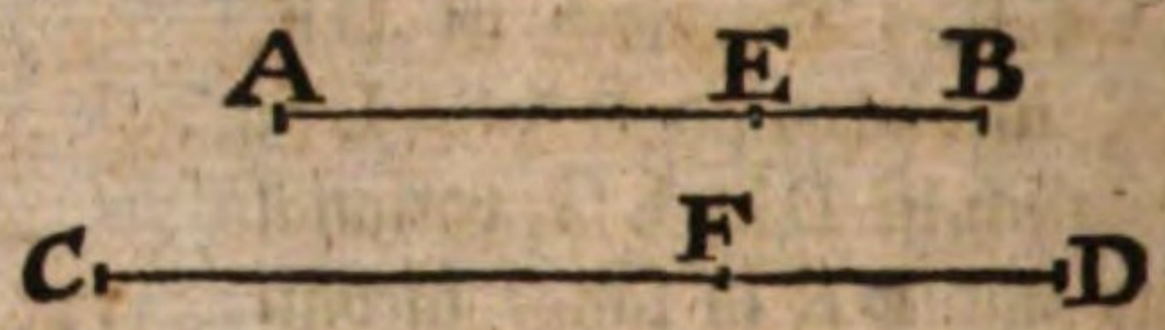
Erster Theil.



Es sey die Binomiale AB in E getheilt, so daß AE der grössere Name. Folglich sind (10, 37. S.) AE, EB, rational, nur in Quadrat commensurabel. Mache (6, 12. S.) AB : CD = AE : CF, so ist (5, 19. S.) EB : FD = AB : CD. Nun ist AB ∩ CD, folglich (10, 10. S.) AE ∩ CF, und EB ∩ FD. Nun sind AE, EB, rational. Folglich sind auch CF, FD, rational. Da AE : CF = EB : FD, folglich verwechselt AE : EB = CF : FD, aber AE ⌒ EB, so ist auch CF ⌒ FD. Beyde aber rational. Folglich ist (10, 37. S.) CD eine Binomiale.

Zweyter

Zweyter Theil.

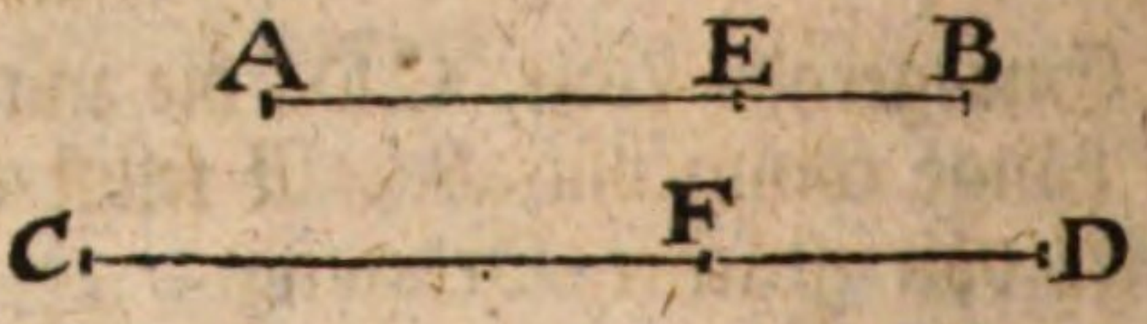


Da AE : EB = CF : FD, so gilt (10, 15. S.) von CF, FD, alles, was von AE, EB, gilt, es mögen nun die Quadrate von AE, EB, um das Quadrat einer mit AE, in Länge entweder commensurabeln oder incommensurabeln Linie unterschieden seyn, desgleichen, es mag entweder AE, oder EB, oder keins von beyden mit einer angenommenen Rationale in Länge commensurabel seyn. Folglich ist CD (II. 1. bis 6. Def.) immer eine Binomiale von derselben Ordnung, von welcher AB ist.

Der 68. Satz.

Eine gerade Linie, CD, die mit einer Bimedialen, AB, in Länge commensurabel, ist selbst eine Bimediale, und mit jener von gleicher Ordnung.

Erster Theil.



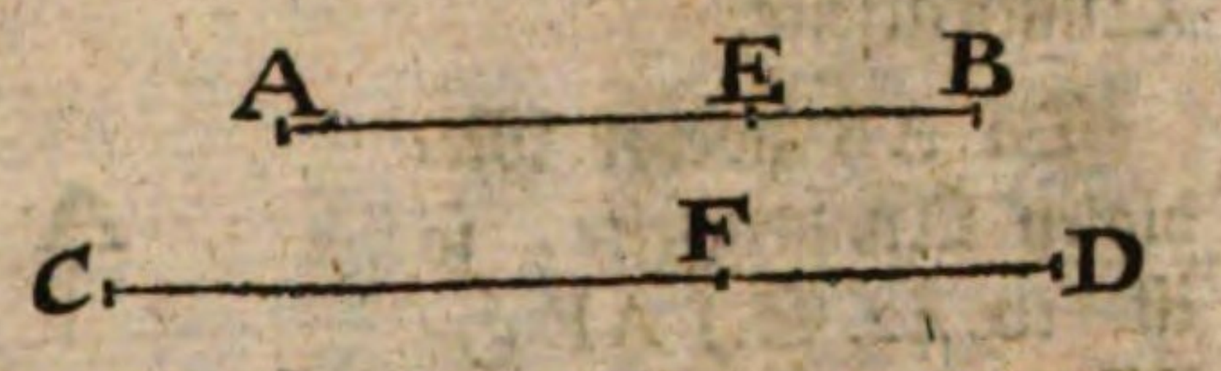
Construire wie vorher.
Da AB eine Bimediale, so sind (10, 38. 39. S.) AE, EB, medial, nur in Quadrat commensurabel.
Nun ist AE : EB = CF : FD. Folglich sind auch CF, FD, medial, nur in Quadrat commensurabel, folglich CD eine Bimediale.

Zweyter Theil.

Da AE : EB = CF : FD, so ist (5, 11. und 6, 1. S.) □ AE : Rect. AEEB = □ CF : Rect. CFFD, folglich verwechselt □ AE : □ CF = Rect. AEEB : Rect. CFFD. Nun ist □ AE ∩ □ CF. Folglich auch Rect. AEEB ∩ Rect. CFFD. Ist daher Rect. AEEB rational, so ist auch Rect. CFFD rational, folglich (10, 38. S.) AB sowohl als CD die erste Bimediale. Ist aber Rect. AEEB medial, so ist auch Rect. CFFD medial, folglich (10, 39. S.) AB sowohl als CD, die zweyte Bimediale.

Der 69. Satz.

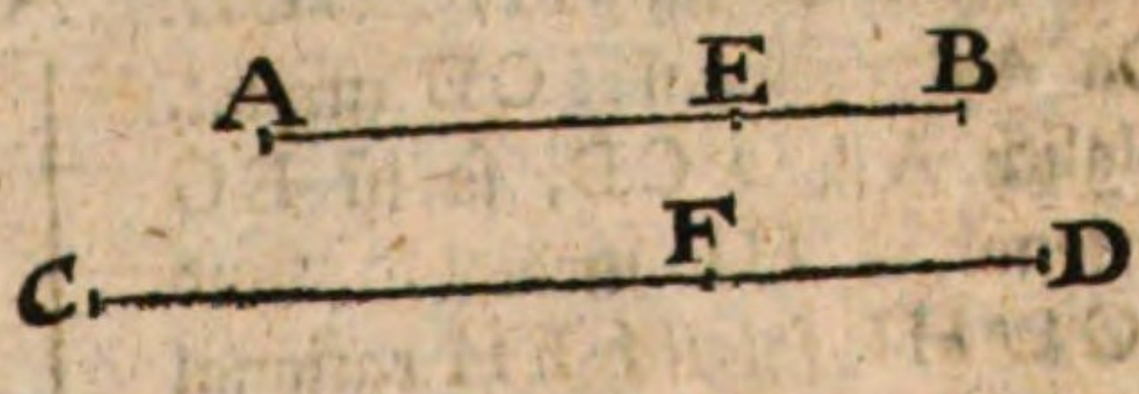
Eine gerade Linie, CD, die der grössern Irrationale, AB, in Länge commensurabel, ist selbst die grössere Irrationale.



Es sey die grössere Irrationale, AB, in E getheilt, so sind (10, 40. S.) AE, EB, in Quadrat incommensurabel, und □AE + □EB, rational, aber Rect. AEEB, medial. Mache alles wie vorher, so ist hier gleichfals AB ∩ CD, und AB : CD = AE : CF = EB : FD, folglich auch verwechselt AE : EB = CF : FD, folglich verbunden AB : BE = CD : DF, folglich (6, 22. S.) □AB : □BE = □CD : □DF. Aus eben dem Grunde ist auch □AB : □AE = □CD : □CF. Folglich ist □AB : □AE + □EB = □CD : □CF + □FD, folglich verwechselt □AB : □CD = □AE + □EB : □CF + □FD. Nun ist □AB ∩ □CD. Folglich auch □AE + □EB ∩ □CF + □FD. Nun ist (10, 40. S.) □AE + □EB rational, folglich ist □CF + □FD auch rational. Auf gleiche Art ist auch 2 Rect. AEEB ∩ 2 Rect. CFFD. Aber Rect. AEEB (10, 40. S.) medial. Folglich ist (10, 24. S.) Rect. CFFD auch medial, folglich CF ⌣ FD. Demnach ist (10, 40. S.) CD die grössere Irrationale.

Der 70. Satz.

Eine gerade Linie, CD, die mit des Rationalen und Medialen Quadratseite, AB, in Länge commensurabel, ist selbst des Rationalen und Medialen Quadratseite.

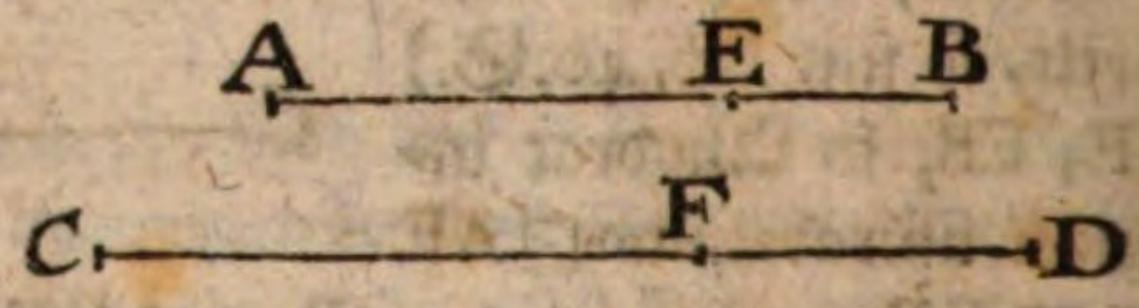


Da AB des Rationalen und Medialen Quadratseite, so ist (10, 41. S.) AE ⌣ EB, und □AE + □EB medial, aber Rect. AEEB rational. Mache alles wie vorher, so wird eben so gezeigt, daß auch CF ⌣ FD, daß □AE + □EB ∩ □CF + □FD, und daß Rect. AEEB ∩ Rect. CFFD, daß folglich (10, 24. S.) □CF + □FD medial und Rect. CFFD, rational, daß folglich (10, 41. S.) CD des Rationalen und Medialen Quadratseite sey.

Der

Der 71. Satz.

Eine gerade Linie, CD, die mit zweyer Medialen Quadratseite, AB, in Länge commensurabel, ist selbst zweyer Medialen Quadratseite.



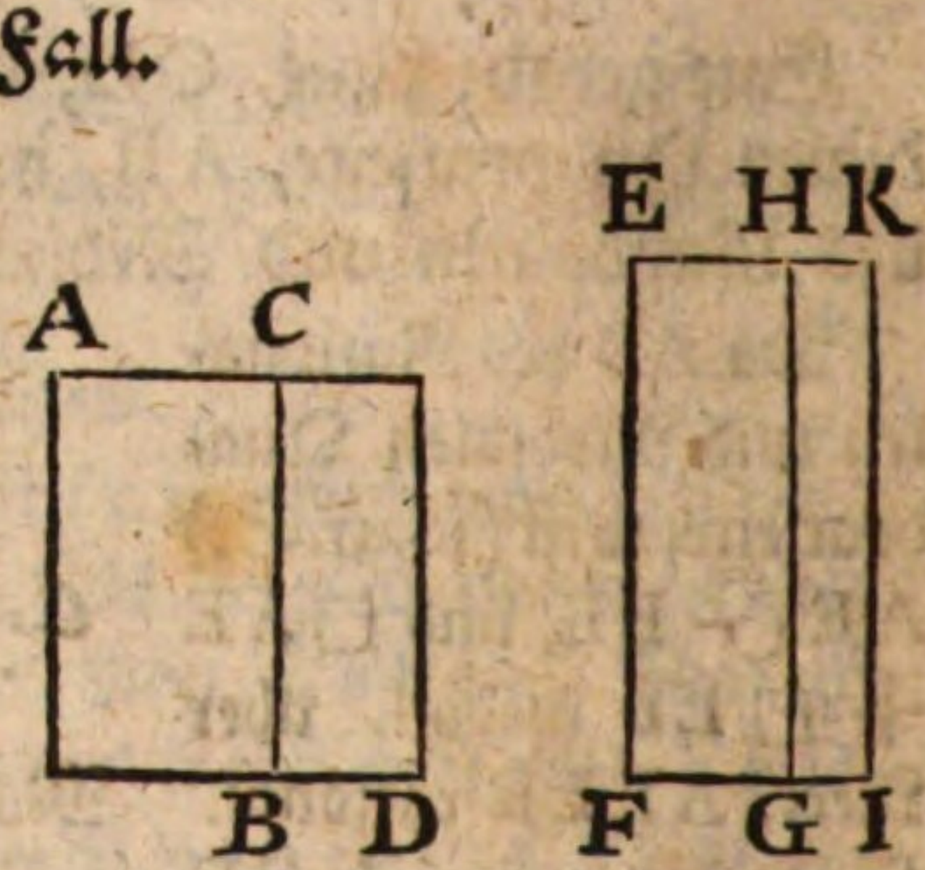
Da AB zweyer Medialen Quadratseite, so ist (10, 42. S.) AE ⌣ EB, □AE + □EB medial, desgleichen Rect. AEEB medial, auch □AE + □EB ∪ Rect. AEEB. Construire alles wie vorher, so wird eben so bewiesen, daß CF ⌣ FD, daß □AE + □EB ∩ □CF + □FD, auch Rect. AEEB ∩ Rect. CFFD, daß folglich (10, 24. S.) □□CF + □FD medial, auch Rect. CFFD medial, und □CF + □FD ∪ Rect. CFFD, daß folglich (10, 42. S.) CD zweyer Medialen Quadratseite sey.

Der 72. Satz.

Durch Zusammensetzung eines rationalen Rectangels, AB, und eines medialen Rectangels, CD, entstehen viererley Irrationallinien: entweder die Binomiale, oder die erste Bimediale, oder die grössere Irrationale, oder des Rationalen und Medialen Quadratseite.

Erster Fall.

Wenn AB > CD. Es sey die Rationale, EF. Mache EG = AB, und HI = CD. Da AB rational, CD medial, folglich AB ∪ CD, so ist EG rational, HI medial, und EG ∪ HI, folglich EH rational und mit EF in Länge commensurabel, HK rational und mit EF in Länge incommensurabel, folglich EH ∪ HK, folglich EH, HK, rational, nur in Quadrat commensurabel, folglich EK eine Binomiale.



Da

Wir Karl Theodor

von Gottes Gnaden Pfalzgraf bey Rhein, Herzog in Ober- und Niederbaiern, des H. R. R. Erztruchseß, und Kurfürst, zu Gülch, Cleve, und Berg Herzog, Landgraf zu Leuchtenberg, Fürst zu Mörs, Marquis zu Bergenopzoom, Graf zu Veldenz, Sponheim, der Mark und Ravensberg, Herr zu Ravenstein ꝛc. ꝛc.

Unsern Gruß, und kurfürstliche Gnade jedermann zuvor.

wo immer von den Justizstellen, von Königl. Instanzen erlassene Rechtserkanntnißen, Verordnungen, Abschiede, Vergleichsbehandlungen und Observanzen, in soweit sie nicht ohnehin mit nachstehender Verordnung übereinstimmen, so, wie selbst die den Tuchscherern, Nestlern, Säcklern, Weißgärbern, Färbern und Schneidern ertheilten und bestättigten Gerechtsame, Befugniße, Artikelsbriefe, und Freyheiten, in soweit sie das Schmitzen weißgearbeiteter Felle, und deren Verkauf betreffen, auch mit nachfolgenden Punkten ebenfalls nicht ohnehin übereinkommen, durchaus von nun an kraftlos angesehen, sondern forthin gänzlich erloschen, und abgethan seyn sollen: Dahingegen sind pro Pragmatica nachfolgende Punkten zur gesetzlicher Vorschrift anzunehmen, darüber genau zu halten und bey sich ergebenden Strittigkeiten nach selben zu entscheiden, und zwar

Erstens wollen Wir, daß den Tuchscherern und

auf vier Stunden weit kein Tuchscherer, oder Nestler vorhanden ist, ertheilen Wir den Weißgärbern hiemit die besondere gnädigste Bewilligung, daß sie ihre weißgearbeiteten Felle selbst schmitzen, und auch als gefärbter vor ihren Häusern und auf Märkten, wo kein Tuchscherer oder Nestler die nämliche Waare feil biethet, verkaufen dürfen: jedoch soll

Fünftens derjenige Weißgärber, der obverstandermassen nach dem IV. §. seine Felle selbst schmitzen darf und will, vorher bey einem Tuchscherer- und Nestlerhandwerke im Lande sich ordentlich einzünftig zu machen und sein Meisterstück über das Fellschmitzen dortselbst abzulegen allerdings verbunden seyn, auch ehender demselben das Schmitzen nicht erlaubt werden. Endlichen wird

Sechstens den Säcklern, Färbern, Schneidern

bisher abgegeben, und noch förthin desselben sich anmassen wollten, so, wie der Verkauf weißer und gefärbter Felle, hiemit bey Konfiskation der Felle, dann unnachläßiger und nachdrücklicher Strafe verbothen, den Tuchscherern und Nestlern mit dergleichen Arbeit den mindesten Eingriff weiters zu machen. Gegeben in Unsrer Haupt- und Residenzstadt München, am 11. Junius im Jahre 1784.

Ex commissione serenis. Dni. Dni.
Ducis, & Electoris speciali.

L. S.

Lict. Ignaz Joseph Wager,
kurpfalzbaierischer obern Landesregierungs-
Sekretar.

Färben der weißgearbeiteten Felle in Wasser und Oel, forthin privative erlaubt seyn und sonst Niemanden zustehen solle.

Zweytens soll den Tuchscherern und Nestlern auch der Verkauf ihrer geschmitzten Felle auf freyen Märkten, wie vor ihren Häusern zugestanden, den Weißgärbern hingegen nur erlaubt seyn, ihre weißgearbeiteten Felle zu verkaufen.

Drittens wird den Weißgärbern künftig ernstlich verbothen, bey Vermeidung wirklicher Konfiskation, und 50 Reichsthaler Strafe nicht mehr selbst einige Felle schwarz oder braun mit Oel oder Wasser zu schmitzen oder zu färben, und solle jedermann freystehen, die weißen Felle den Tuchscherern, oder Nestlern in die Farbe zu geben.

Vier-

seit langer Zeit an verschiedenen Orten Unsers Herzogthums zu Baiern mit dem Färben, oder sogenannten Schmitzen weißgearbeiteter Felle, und deren Verkauf, es verschiedentlich gehalten, und meistens, wenn es darüber zur rechtlichen Klage kam, nach jeden Ort verschiedenen Umständen, und nach den in viele Wege sehr dunkel und undeutlichen bisherigen Handwerksartikeln der Tuchscherer, Nestler, Säckler, Weißgärber und Schneider geurtheilt worden, wodurch aber immer neue Prozesse, Anstände und Schwirigkeiten sich hervorgethan haben, und Unsere Polizeystellen irre gemacht worden sind, in Sachen ein vollständig und gleichförmiges Regulativ machen zu können;

So haben Wir diesen Polizeygegenstand aus den bisherigen Akten in reife Ueberlegung nehmen lassen, und befehlen hiemit gnädigst, daß alle in dieser Sache bisher,

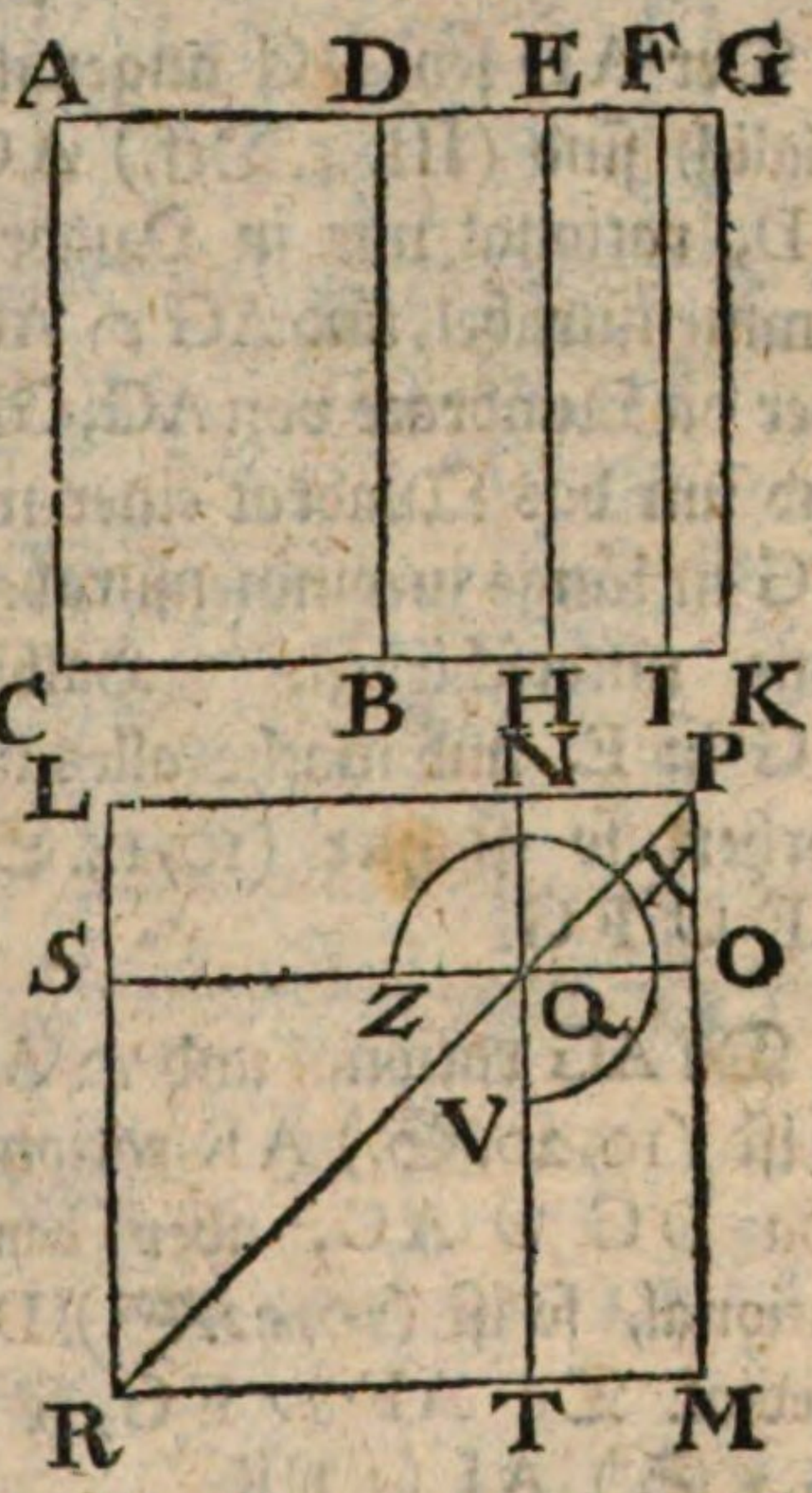
wo

Der 94. Satz.

Ist ein Rectangel, AB, aus einer Rationalen, AC, und der dritten Apotome, AD: so ist dessen Quadratseite die zweyte Medialapotome.

Erster Theil.

Der ‖AD sey DG angepaßt, folglich sind (III. 3. Def.) AG, GD, rational, nur in Quadrat commensurabel, und weder DG noch GD ∩ AC, auch sind die Quadrate von AG, GD, um das Quadrat einer mit AG in Länge commensurabeln Linie unterschieden.



Es sey DG in E halbirt, und alles wie vorher, so ist wiederum AF ∩ FG, folglich AI ∩ FK, und AG ∩ AF, FG. Nun ist AG rational und ∪ AC. Folglich sind auch AF, FG, rational und mit AC in Länge incommensurabel, folglich (10, 22. S.) AI, FK, medial. Da DE ∩ EG, folglich DG ∩ DE, EG, aber DG rational und ∪ AC, so sind auch DE, EG, rational und ∪ AC, folglich (10, 22. S.) DH, EK, medial. Da AG ∪ GD, aber AG ∩ AF und GD ∩ GE, so ist AF ∪ GE. Nun ist AF : GE = AI : EK. Folglich AI ∪ EK.

Zweyter Theil.

Mache das Quadrat LM = AI, und alles wie vorher, so wird eben so bewiesen, daß LN die Quadratseite von AB.

Dritter Theil.

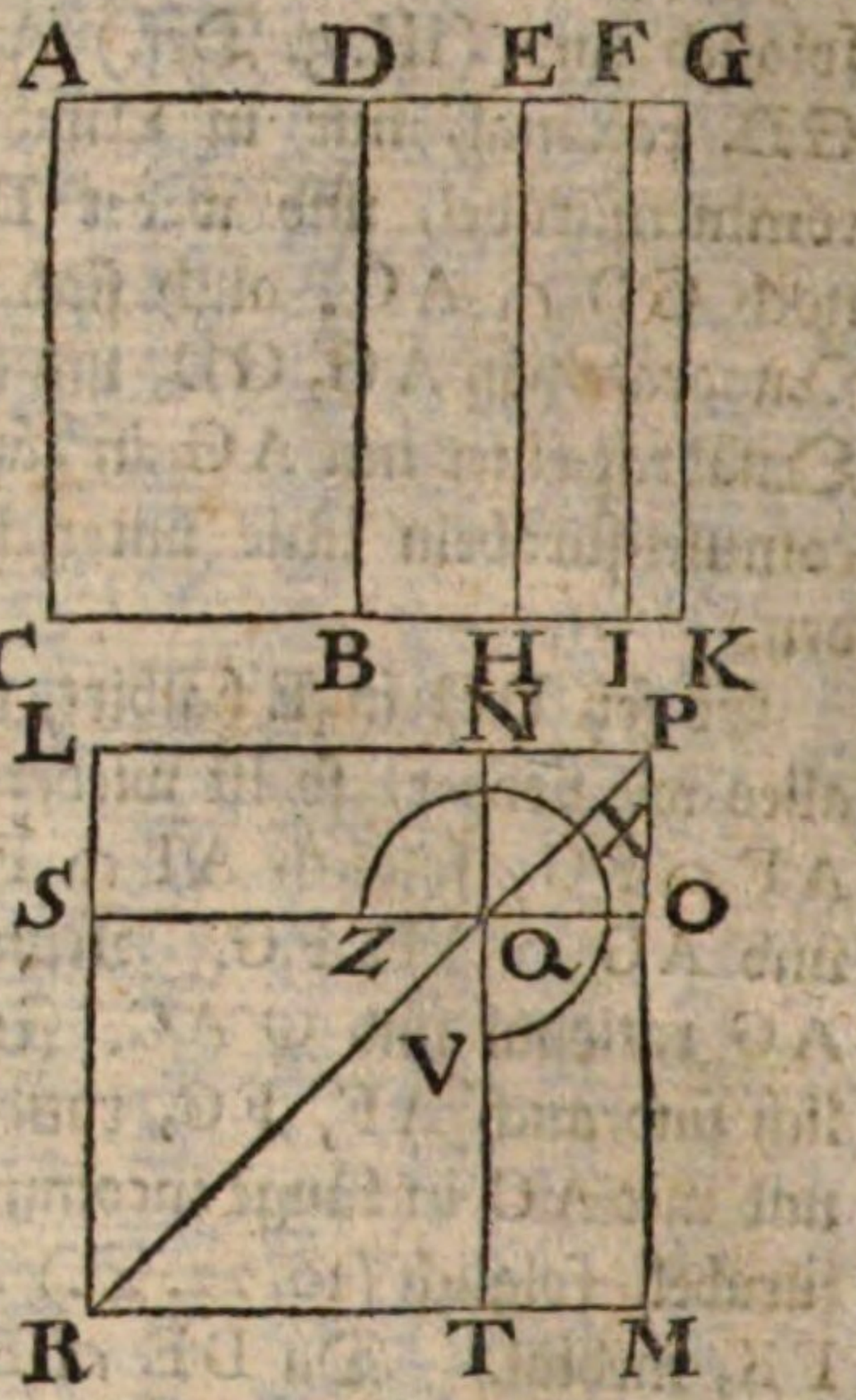
Da AI, FK, das ist □LP, □PN, medial und commensurabel, so sind auch LP, PN, medial. Da AI ∪ EK, das ist LM ∪ MN, das ist □LP ∪ Rect. LPPN, so ist LP ∪ PN. Folglich sind LP, PN, medial nur in Quadrat commensurabel, auch, weil EK medial, Rect. LPPN medial. Folglich ist (10, 76. S.) LN, die Quadratseite von AB, die zweyte Medialapotome.

Der 95. Satz.

Ist ein Rectangel, AB, aus einer Rationalen, AC, und der vierten Apotome, AD: so ist dessen Quadratseite die kleinere Irrationale.

Erster Theil.

Der AD sey DG angepaßt, folglich sind (III. 4. Def.) AG, GD, rational nur in Quadrat commensurabel, und AG ∩ AC, aber die Quadrate von AG, GD, sind um das Quadrat einer mit AG in Länge incommensurabeln Linie unterschieden. Halbire DG in E, und mache alles wie vorher, so ist hier (10, 18. S.) AF ∪ FG.



Da AG rational und ∩ AC, so ist (10, 20. S.) AK rational. Da DG ∪ AC, aber beyde rational, so ist (10, 22. S.) DK medial. Da AF ∪ FG, so ist (6, 1. S.) AI ∪ FK.

Zweyter Theil.

Mache das Quadrat LM = AI, und alles wie vorher, so wird eben so bewiesen, daß LN die Quadratseite von AB.

Dritter Theil.

Da AK, das ist □LP + □PN, rational, aber DK, das ist 2 Rect. LPPN, medial, auch AI ∪ FK, und daher □LP ∪ □PN, folglich LP ⌣ PN, ⌣ = so ist (10, 77. S.) LN, die Quadratseite von AB, die kleinere Irrationale.

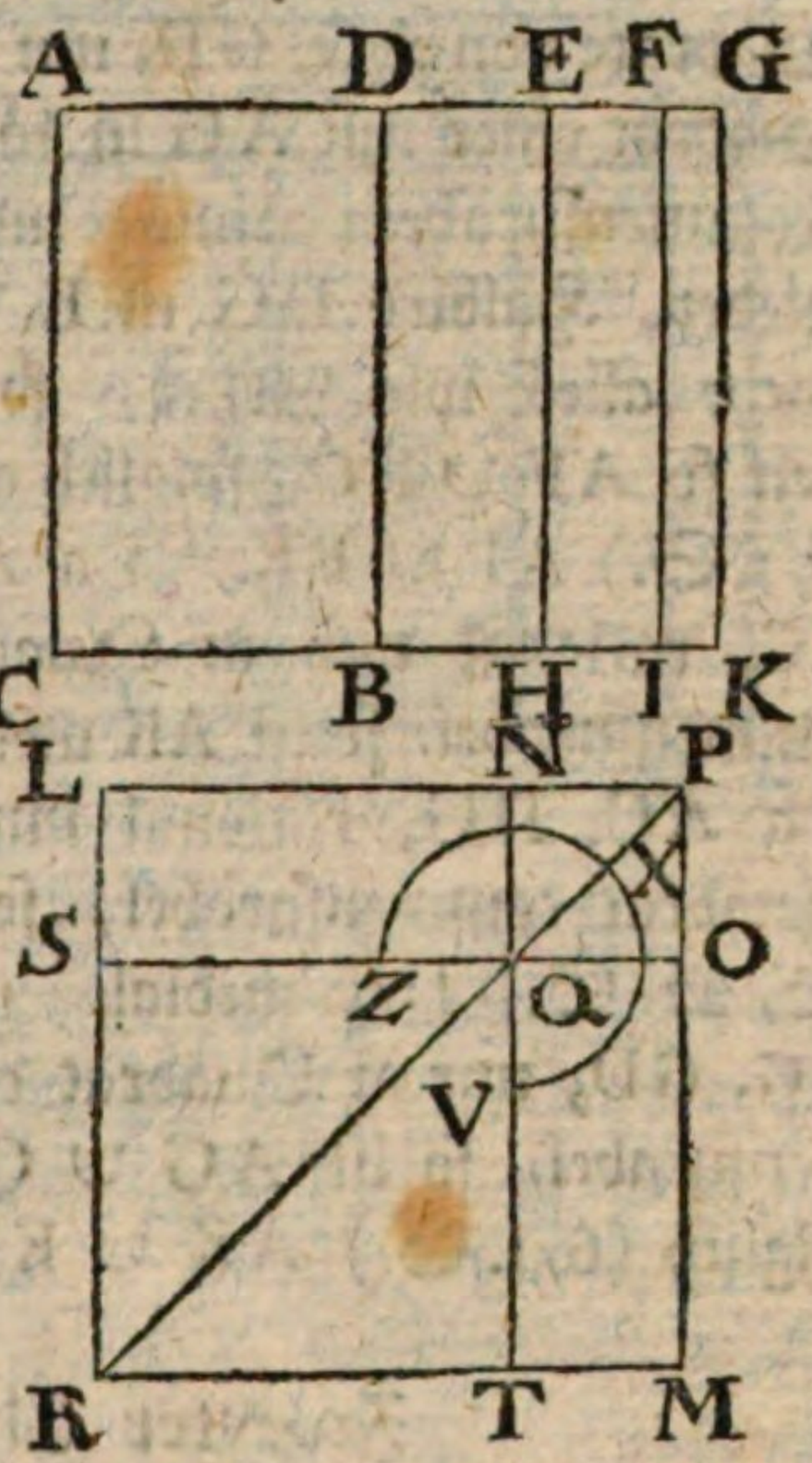
Der 96. Satz.

Ist ein Rectangel, AB, aus einer Rationalen, AC, und der fünften Apotome, AD: so ist dessen Quadratseite die ein Rationales und Mediales Gebende.

Erster

Erster Theil.

Der AD sey DG angepaßt, folglich sind (III. 5. Def.) AG, GD, rational nur in Quadrat commensurabel, auch ist DG ∩ AC, und die Quadrate von AG, GD, um das Quadrat einer mit AG in Länge incommensurabeln Linie unterschieden. Halbire DG in E, und mache alles wie vorher, so ist eben so AF ∪ FG.



Da AG ∪ AC, und beyde rational, so ist AK medial. Da DG rational und ∩ AC, so ist DK rational.

Zweyter Theil.

Mache das Quadrat LM = AI, und alles wie vorher, so ist eben so LN die Quadratseite von AB.

Dritter Theil.

Da AK, das ist □LP + □PN, medial, aber DK, das ist 2 Rect. LPPN, rational, aber AI ∪ FK, das ist □LP ∪ □PN, und daher LP ∪ PN, so ist (10, 78. S.) LN, die Quadratseite von AB, die ein Rationales und Mediales Gebende.

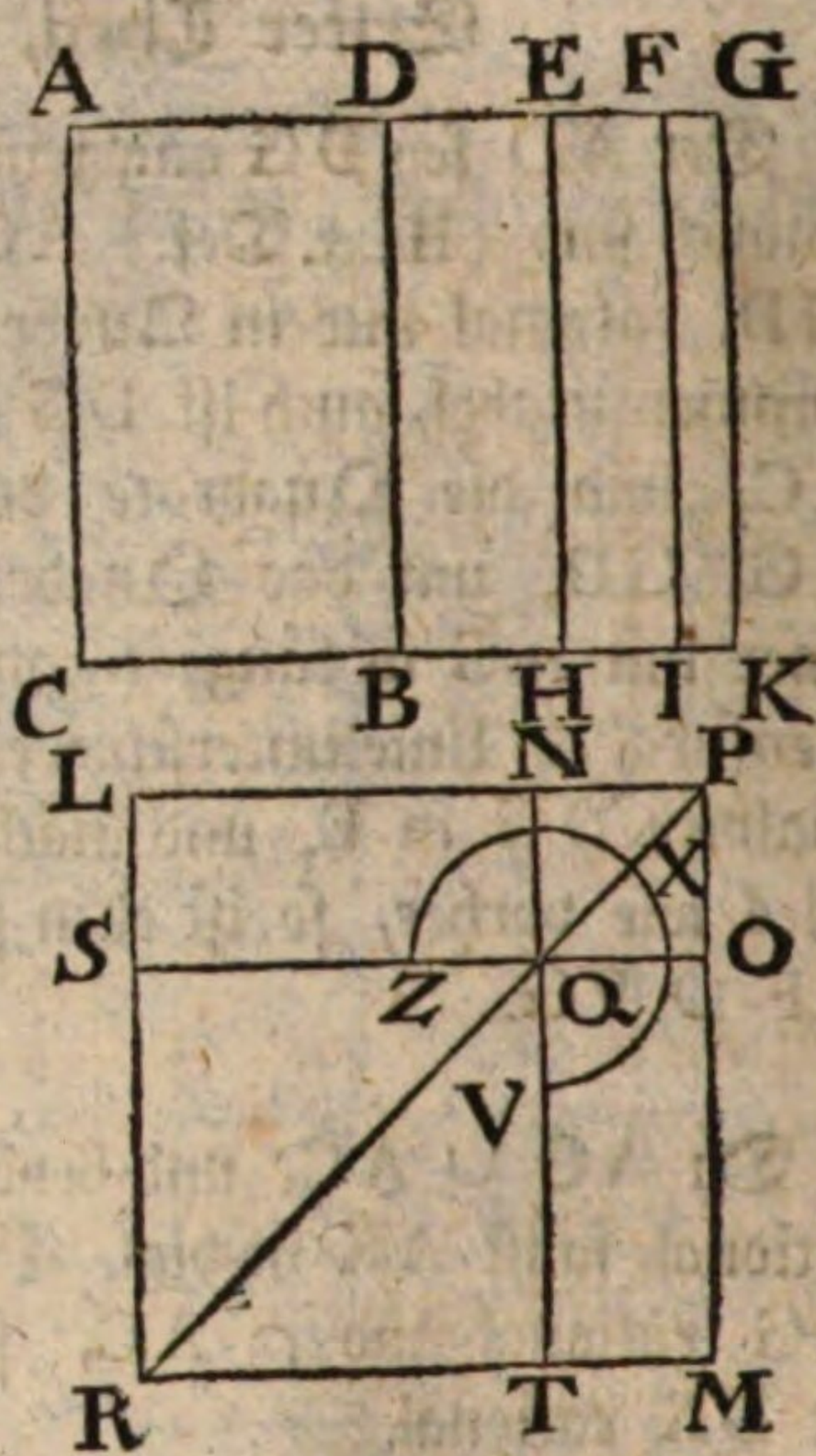
Der 97. Satz.

Ist ein Rectangel, AB, aus einer Rationalen, AC, und der sechsten Apotome, AD: so ist dessen Quadratseite die zwey Mediale Gebende.

Erster Theil.

Der AD sey DG angepaßt, folglich sind (III. 6. Def.) AG, GD, rational nur in Quadrat commensurabel, aber weder AG

noch GD ∩ AC, auch sind die Quadrate von AG, GD, um das Quadrat einer mit AG in Länge incommensurabeln Linie unterschieden. Halbire DG in E, und mache alles wie vorher, so ist eben so AF ∪ FG, folglich auch (6, 1. S.) AI ∪ FK. Da AG, AC, rational nur in Quadrat commensurabel, so ist AK medial. Da AC, DG, rational nur in Quadrat commensurabel, so ist (10, 22. S.) DK medial. Da AG, GD, nur in Quadrat commensurabel, so ist AG ∪ GD, folglich (6, 1. S.) AK ∪ KD.



Zweyter Theil.

Mache ein Quadrat LM = AI, und alles wie vorher, so ist eben so LN die Quadratseite von AB.

Dritter Theil.

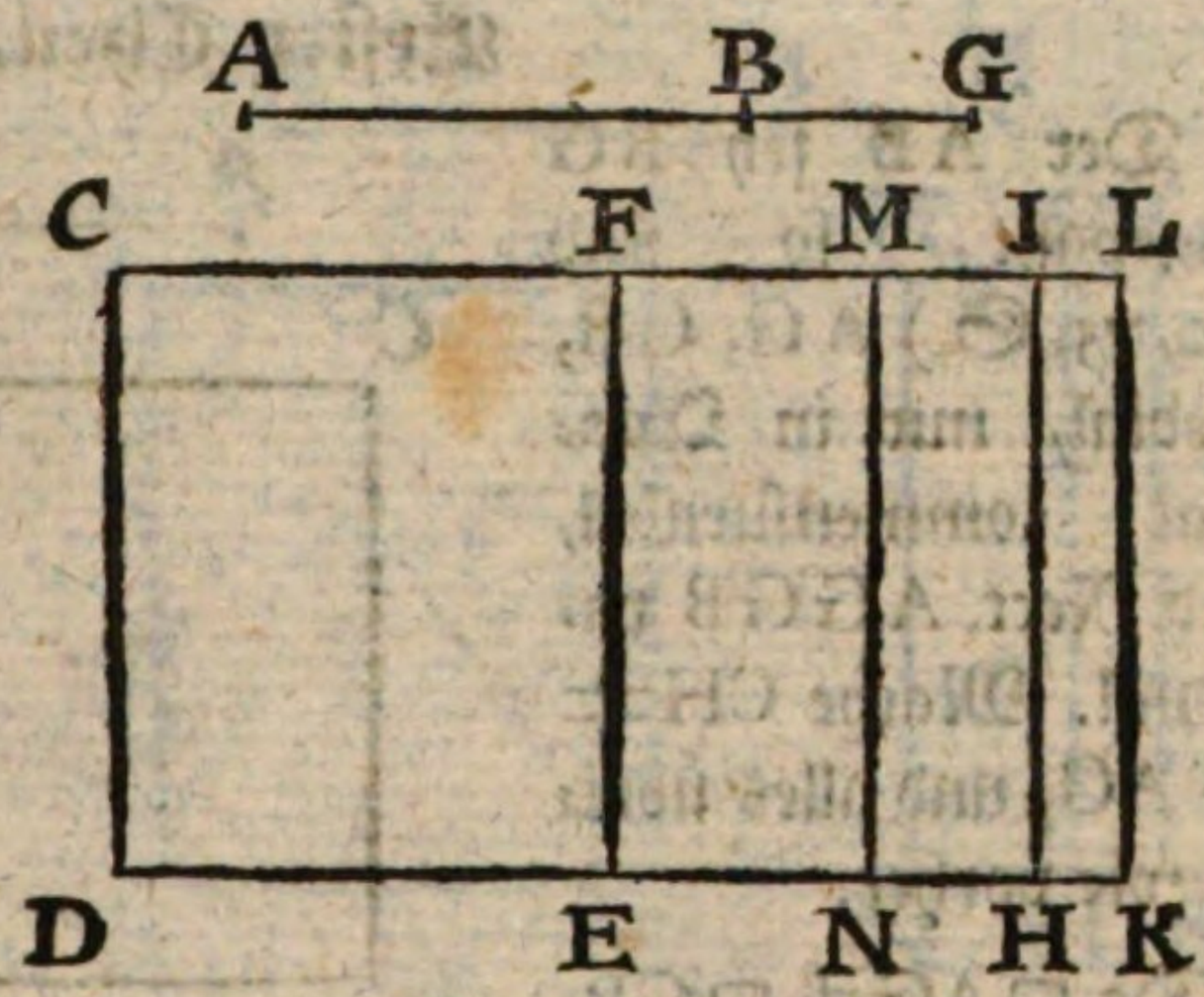
Da AK, das ist, □ LP + □ PN, medial, auch DK, das ist 2 Rect. LPPN, medial, desgleichen AK ∪ KD, das ist □ LP + □ PN ∪ 2 Rect. LPPN, ferner AI ∪ FK, das ist □ LP ∪ □ PN, und daher LP, PN, in Quadrat commensurabel, so ist (10, 79. S.) LN, die Quadratseite von AB, die zwey Mediale Gebende.

Der 98. Satz.

Ist in einem Rectangel, CE, dessen Quadratseite die Apotome, AB, die eine Seite, CD, rational: so ist die andre Seite, CF, die erste Apotome.

Erster Theil.

Der AB sey BG angepaßt, folglich (10, 74. S.) sind AG, GB, rational nur in Quadrat commensurabel. Mache (1, 45. S.) CH =



$CH = \square AG$, und $IK = \square BG$, so ist $CK = \square AG + \square GB$. Nun ist $CE = \square AB$. Folglich (2,7. S.) $FK =$ 2 Rect. AGGB. Halbire FL in M, und ziehe durch M die MN der CD parallel, so ist $FN = MK =$ Rect. AGGB.

Da $\square AG + \square GB$, das ist CK, rational, und CD rational, so ist (10, 21. S.) CL rational und mit CD in Länge commensurabel. Da 2 Rect. AGGB, das ist FK, (10, 22. S.) medial, aber CD rational, so ist (10, 23. S.) FL rational und mit CD in Länge incommensurabel. Da $\square AG + \square GB$, das ist CK, rational, aber 2 Rect. AGGB, das ist FK, medial, so ist $CK \cup FK$, folglich (6, 1. S.) $CL \cup LF$. Beyde aber waren rational. Folglich sind CL, LF, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich ist (10, 74. S.) CF eine Apotome.

Zweyter Theil.

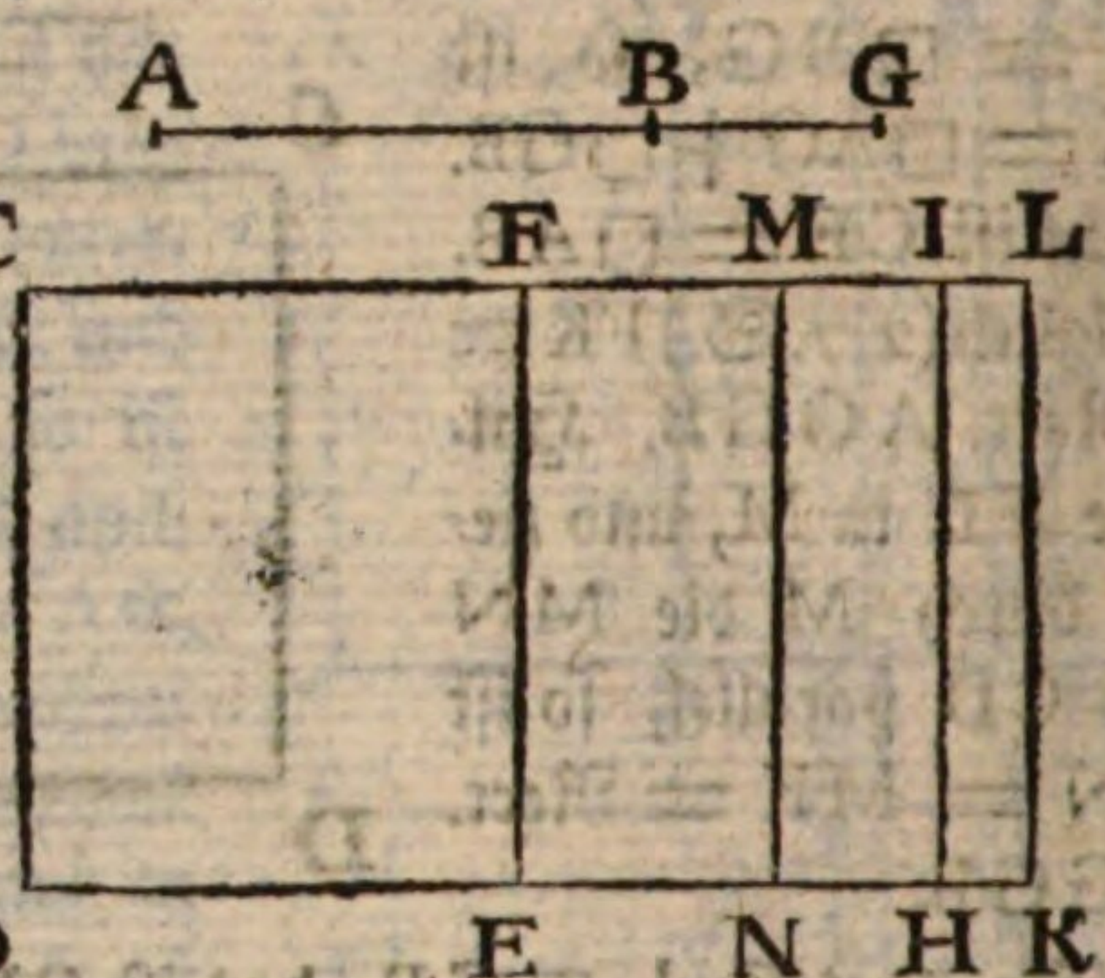
Da (10, 55. Lehns.) zwischen $\square AG$, $\square GB$, die mittlere Proportionalfläche Rect. AGGB, das ist, zwischen CH, IK, die mittlere Proportionalfläche MK, so ist $CH : MK = MK : IK$. Nun ist $CH : MK = CI : LM$, und $MK : IK = ML : LI$. Folglich ist $CI : LM = LM : LI$, folglich Rect. $CIIL = \square ML = \frac{1}{4} \square FL$. Nun ist auch $CI \frown IL$, weil $\square AG$, $\square GB$, das ist CH, IK, commensurabel sind. Folglich sind (10, 18. S.) die Quadrate von CL, LF, um das Quadrat einer mit CL in Länge commensurabeln Linie unterschieden. Nun war auch $CL \frown CD$. Folglich ist (III. 1. Def.) CF die erste Apotome.

Der 99. Satz.

Ist in einem Rectangel, CE, dessen Quadratseite die erste Medialapotome, AB, die eine Seite, CD, rational: so ist die andre Seite, CF, die zweyte Apotome.

Erster Theil.

Der AB sey BG angepaßt, so sind (10, 75. S.) AG, GB, medial, nur in Quadrat commensurabel, und Rect. AGGB rational. Mache CH = □ AG, und alles übrige wie vorher,



Da □AG + □GB, das ist CK, medial, aber CD rational, so ist CL rational und ∪CD. Da 2 Rect. AGGB, das ist FK, rational, und FE, das ist CD, rational, so ist FL rational und ∩CD. Da CK medial und FK rational, so ist CK ∪ FK, folglich (6, 1. S.) CL ∪ LF. Beyde aber waren rational. Folglich sind CL, LF, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich ist CF eine Apotome.

Zweyter Theil.

Auf eben die Art, wie vorher, wird bewiesen, daß Rect. CIIL = ¼ □FL. Nun war, wie vorher, □AG ∩ □GB, das ist, CH ∩ IK, und daher CI ∩ IL, folglich sind (10, 18. S.) wie vorher, die Quadrate von CL, LF, um das Quadrat einer mit CL in Länge commensurabeln Linie unterschieden. Nun war FM ∩ CD, folglich ist (III. 2. Def.) CF die zweyte Apotome.

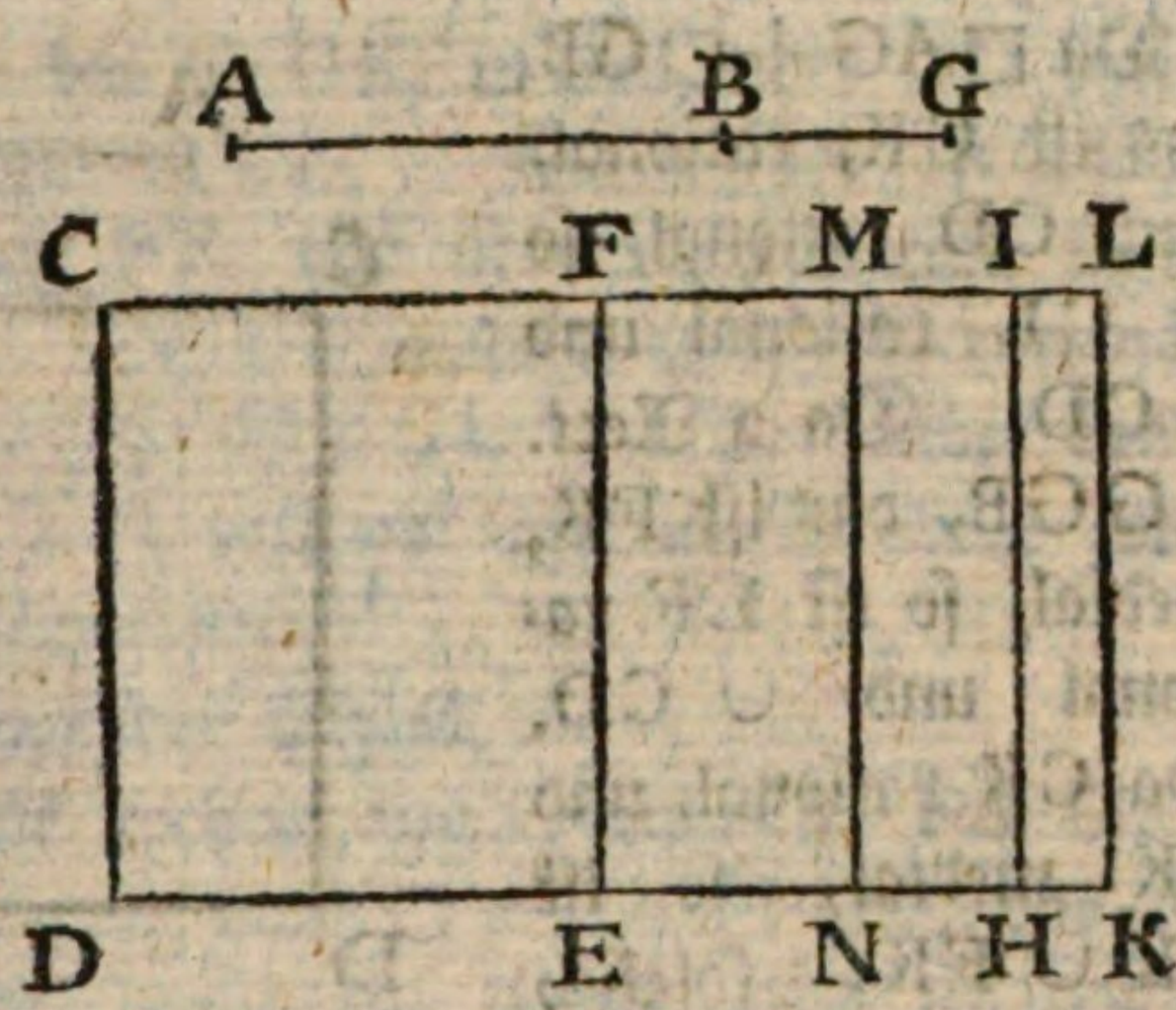
Der 100. Satz.

Ist in einem Rectangel, CE, dessen Quadratseite die zweyte Medialapotome, AB, die eine Seite, CD, rational: so ist die andre Seite, CF, die dritte Apotome.

Erster Theil.

Der AB sey BG angepaßt. Folglich sind (10, 76. S.) AG, GB, medial nur in Quadrat commensurabel, und Rect. AGGB medial. Mache CH = □AG und alles übrige wie vorher.

Da



Da □AG + □GB, das ist CK, medial, aber CD rational, so ist CL rational und ∪ CD. Da 2 Rect. AGGB, das ist FK, medial, so ist eben so FL rational und ∪ CD. Da AG ⌒ GB, so ist AG ∪ GB, folglich (6, 1. und 10, 10. S.) □AG ∪ Rect. AGGB. Nun ist □AG ∩ □AG + □GB, und Rect. AGGB ∩ 2 Rect. AGGB. Folglich ist □AG + □GB ∪ 2 Rect. AGGB, das ist, CK ∪ FK, folglich (6, 1. S.) CL ∪ LF. Aber beyde rational. Folglich sind CL, LF, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich CF eine Apotome.

Zweyter Theil.

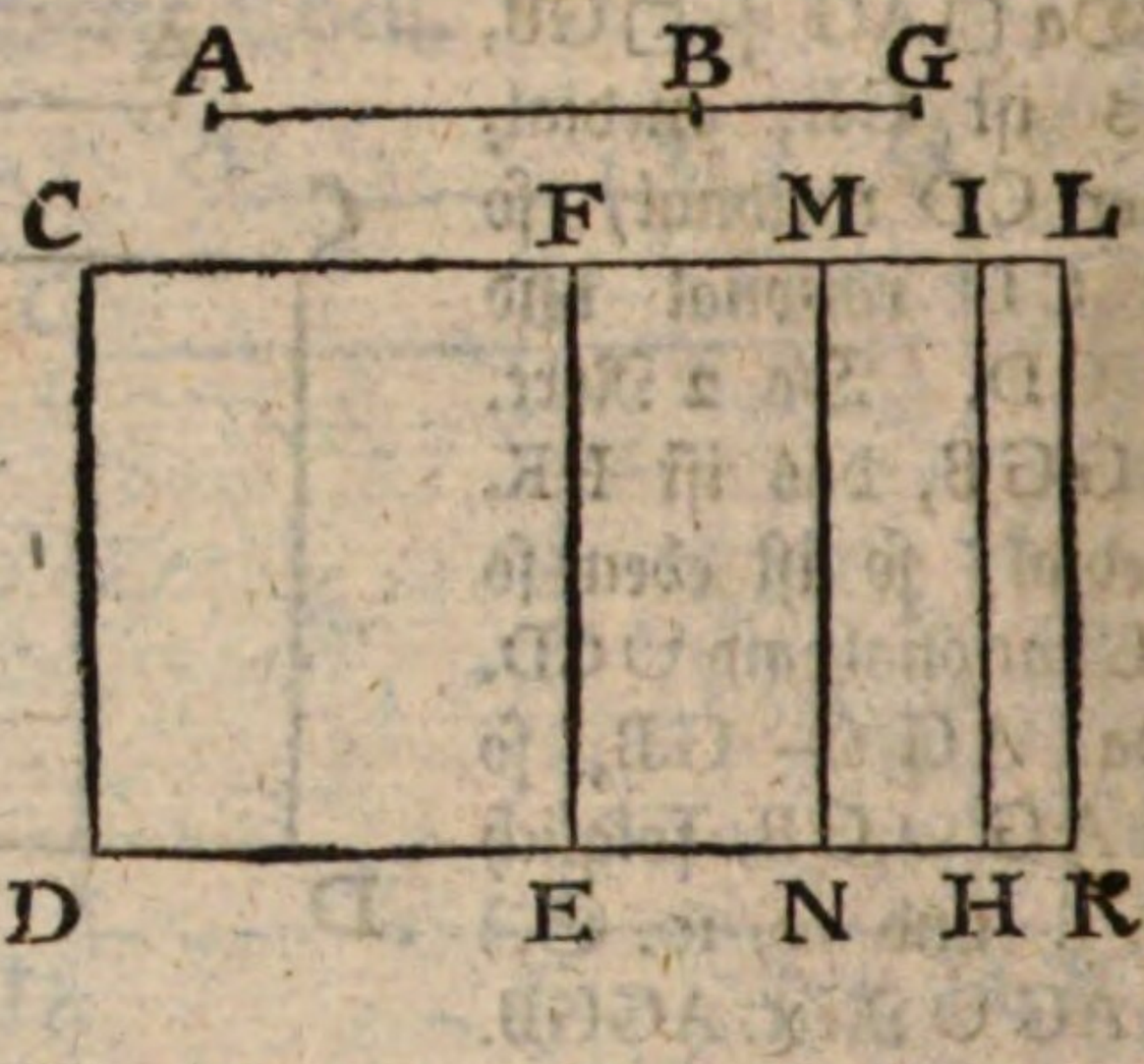
Auf eben die Art, wie vorher, wird bewiesen, daß Rect. CIIL = ¼ □FL. Nun war auch, wie vorher, □AG ∩ □GB, das ist, CH ∩ IK, und daher CI ∩ IL. Folglich sind, wie vorher, (10, 18. S.) die Quadrate von CL, LF, um das Quadrat einer mit CL in Länge commensurabeln Linie unterschieden. Nun war weder CL noch LF ∩ CD. Folglich ist (III. 3. Def.) CF die dritte Apotome.

Der 101. Satz.

Ist in einem Rectangel, CE, dessen Quadratseite die kleinere Irrationale, AB, die eine Seite, CD, rational: so ist die andre Seite, CF, die vierte Apotome.

Erster Theil.

Der AB sey BG angepaßt, so sind (10, 77. S.) AG, GB, in Quadrat incommensurabel, und □AG + □GB rational, aber 2 Rect. AGGB medial. Mache CH = □AG, und alles wie vorher.



Da □AG + □GB, das ist CK, rational, auch CD rational, so ist CL rational und ∩ CD. Da 2 Rect. AGGB, das ist FK, medial, so ist LF rational und ∪ CD. Da CK rational, und FK medial, so ist CK ∪ FK, folglich (6, 1. S.) CL ∪ LF, aber beyde rational, folglich sind CL, LF, rational, nur in Quadrat commensurabel, folglich CF eine Apotome.

Zweyter Theil.

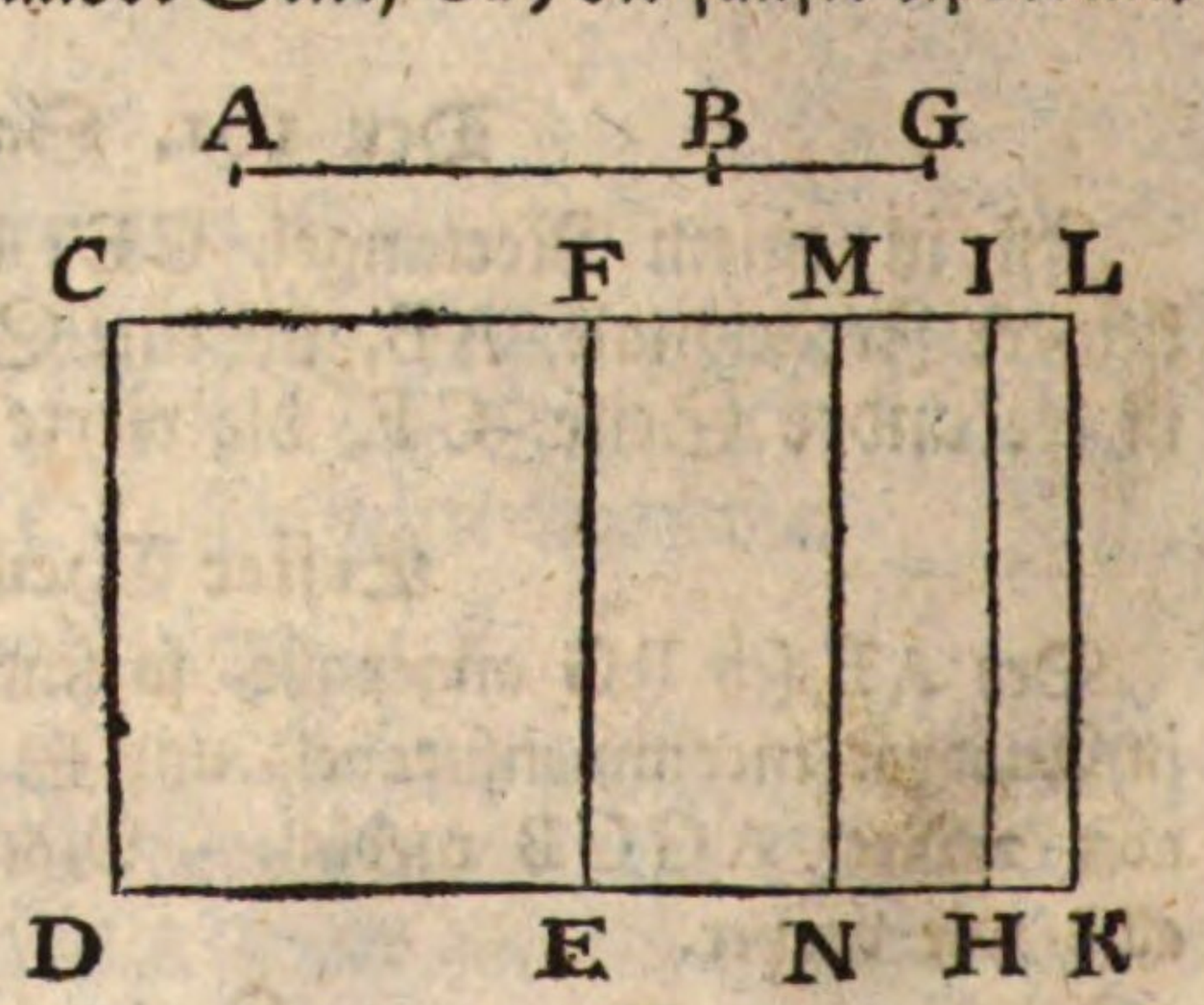
Auf eben die Art, wie vorher, wird bewiesen, daß Rect. CIIL = ¼ □FL. Nun war □AG ∪ □GB, das ist, CH ∪ IK, und daher (6, 1. S.) CI ∪ IL. Folglich sind (10, 19. S.) die Quadrate von CL, LF, um das Quadrat einer mit CL in Länge incommensurabeln Linie unterschieden. Nun war CL ∩ CD. Folglich ist (III. 4. Def.) CF die vierte Apotome.

Der 102. Satz.

Ist in einem Rectangel, CE, dessen Quadratseite die mit dem Rationalen ein Mediales Gebende, AB, die eine Seite, CD, rational: so ist die andre Seite, CF, die fünfte Apotome.

Erster Theil.

Der AB sey BG angepaßt, so sind (10, 78. S.) AG, GB, in Quadrat incommensurabel, und □AG + □GB medial, aber 2 Rect. AGGB rational. Mache CH = □AG, und alles wie vorher.



Da

Da □ AG + □ GB, das ist CK, medial, aber CD rational, so ist CL rational und ∪ CD. Da 2 Rect. AGGB, das ist FK, rational, auch FE, das ist CD, rational, so ist LF rational und ∩ CD. Da CK medial, und FK rational, so ist CK ∪ FK, folglich (6, 1. S.) CL ∪ LF. Aber beyde rational. Folglich CL, LF, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich CF Apotome.

Zweyter Theil.

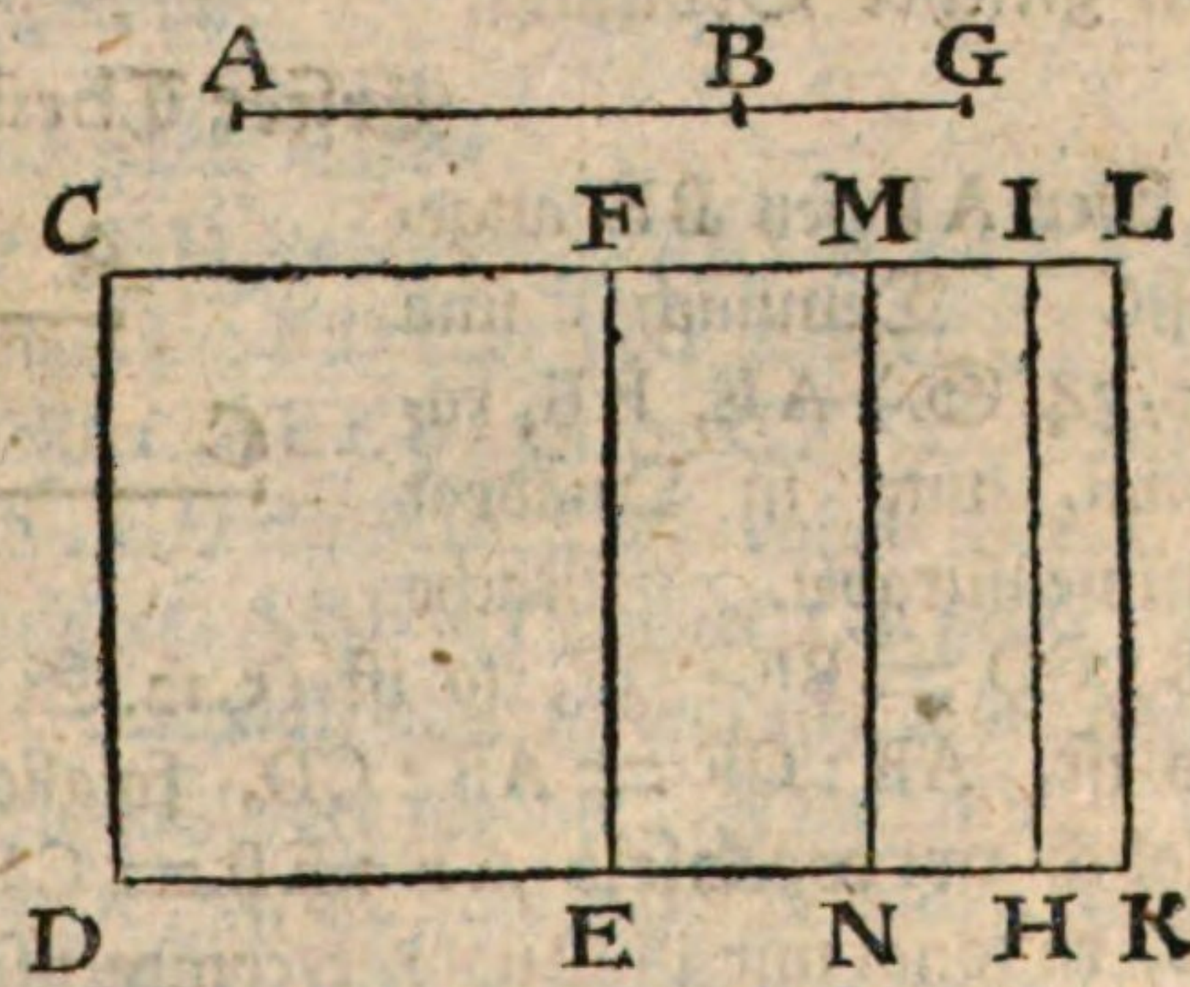
Auf eben die Art, wie vorher, wird bewiesen, daß Rect. CIIL = ¼ □ FL. Nun war auch □ AG ∪ □ GB, das ist, CH ∪ IK, und daher (6, 1. S.) CI ∪ IL. Folglich sind (10, 19. S.) die Quadrate von CL, LF, um das Quadrat einer mit CL in Länge incommensurabeln Linie unterschieden. Nun war LF ∩ CD. Folglich ist (III. 5. Def.) CF die fünfte Apotome.

Der 103. Satz.

Ist in einem Rectangel, CE, dessen Quadratseite die zwey Mediale Gebende, AB, die eine Seite, CD, rational: so ist die andre Seite, CF, die sechste Apotome.

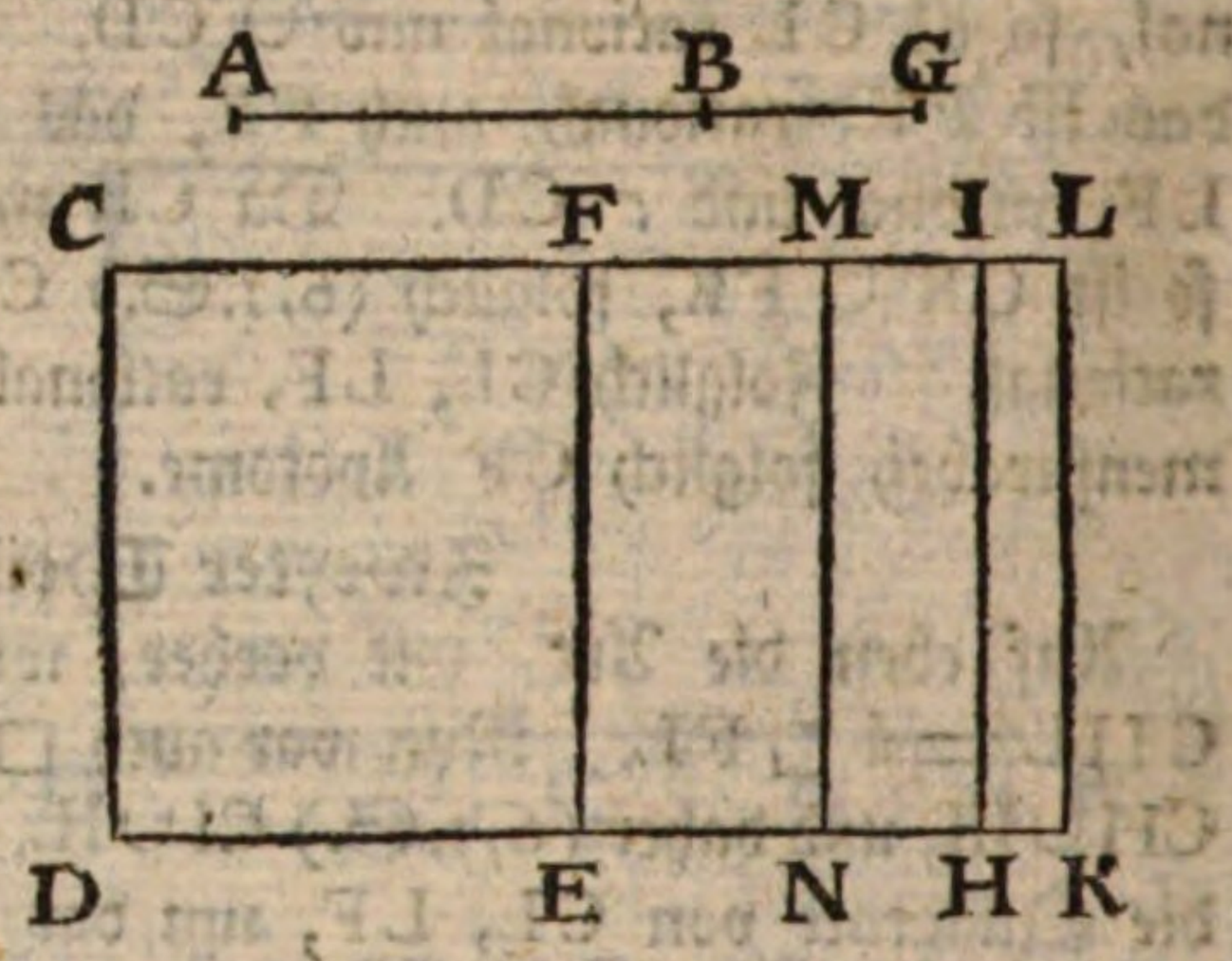
Erster Theil.

Der AB sey BG angepaßt, so sind (10, 79. S.) AG, GB, in Quadrat incommensurabel, und □ AG + □ GB medial, auch 2 Rect. AGGB, medial, ferner □ AG + □ GB ∪ 2 Rect. AGGB. Mache CH = □ AG, und alles wie vorher.



Da □ AG + □ GB, das ist CK, medial, und CD rational, so ist CL rational und ∪ CD. Da 2 Rect. AGGB, das ist FK, medial, und FE, das ist CD, rational, so ist LF rational und ∪ CD. Da □ AG + □ GB ∪ 2 Rect. AGGB, das ist, CK ∪ FK, so ist (6, 1. S.) CL ∪ LF. Aber beyde rational. Folglich sind CL, LF, rational, nur in Quadrat commensurabel, folglich ist CF eine Apotome.

Zweyter Theil.

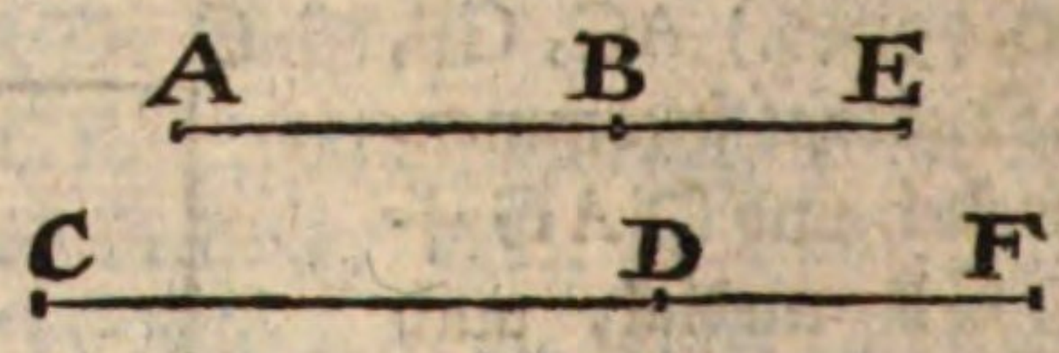


Auf eben die Art, wie vorher, wird bewiesen, daß Rect. CIIL = ¼ □ FL. Nun war auch □ AG ∪ □ GB, das ist, CH ∪ IK, und daher CI ∪ IL. Folglich sind (10, 19. S.) die Quadrate von CL, LF, um das Quadrat einer mit CL in Länge incommensurabeln Linie unterschieden. Nun war weder CL noch LF ∩ CD. Folglich ist (III. 6. Def.) CF die sechste Apotome.

Der 104. Satz.

Eine gerade Linie, CD, die mit einer Apotome, AB, in Länge commensurabel, ist selbst eine Apotome, und mit jener von gleicher Ordnung.

Erster Theil.



Der AB sey BE angepaßt. Demnach sind (10, 74. S.) AE, EB, rational, nur in Quadrat commensurabel. Mache AB : CD = BE : DF, so ist (5, 12. S.) AB + BE : CD + DF, das ist, AE : CF = AB : CD, folglich AE : CF = BE : DF, folglich verwechselt AE : EB = CF : FD. Nun sind AE, EB, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich sind auch (10, 10. S.) CF, FD, rational, nur in Quadrat commensurabel, folglich (10, 74. S.) CD eine Apotome.

Zweyter Theil.

Da AE : EB = CF : FD, so gilt von CF, FD, alles, was von AE, EB, gilt; es mögen nun die Quadrate von AE, EB, um das Quadrat einer mit AE in Länge entweder commensu-

rabeln

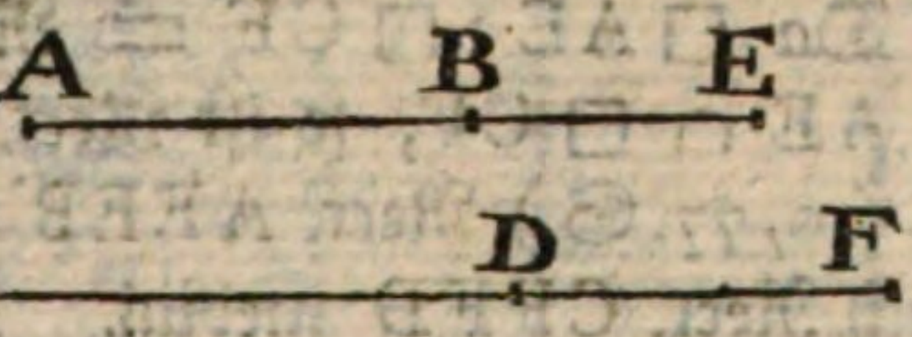
rabeln oder incommensurabeln Linie unterschieden seyn, desgleichen es mag AE, oder EB, oder keines von beyden mit einer angenommenen Rationale in Länge commensurabel seyn, folglich ist (III. 1. bis 6. Def.) CD immer eine Apotome von derselben Ordnung, von welcher AB ist.

Der 105. Satz.

Eine gerade Linie, CD, die mit einer Medialapotome, AB, in Länge commensurabel, ist selbst eine Medialapotome, und mit jener von gleicher Ordnung.

Erster Theil.

Der AB sey BE angepaßt, so sind (10, 75. 76. S.) AE, EB, medial, nur in Quadrat commensurabel.



Mache wie vorher AB : CD = BE : DF, so ist auch AE : EB = CF : FD. Nun sind AE, EB, medial, nur in Quadrat commensurabel. Folglich sind auch CF, FD, medial, nur in Quadrat commensurabel, folglich CD eine Medialapotome.

Zweyter Theil.

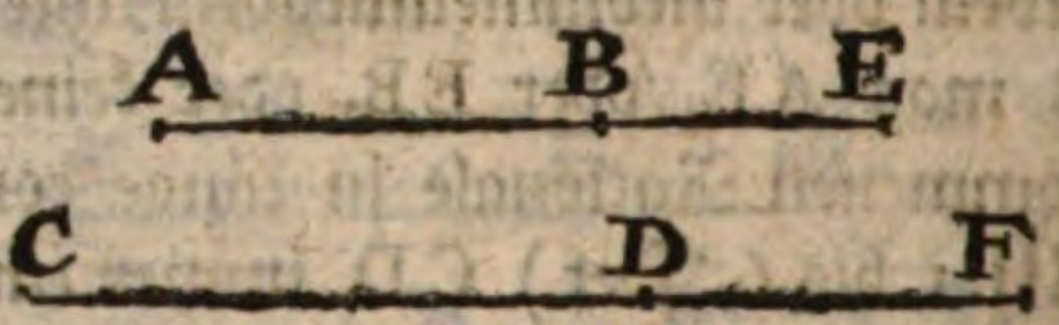
Da AE : EB = CF : FD, aber (6, 1. S.) AE : EB = □ AE : Rect. AEEB, und CF : FD = □ CF : Rect. CFFD, so ist □ AE : □ CF = Rect. AEEB : Rect. CFFD. Nun war AB ∩ CD, und AB : CD = AE : CF, daher □ AE ∩ □ CF. Folglich ist auch Rect. AEEB ∩ Rect. CFFD. Je nachdem nun Rect. AEEB rational, oder medial ist, je nachdem ist auch Rect. CFFD rational, oder medial. Folglich ist CD, so wie AB, im ersten Fall (10, 75. S.) die erste Medialapotome, im andern Fall (10, 76. S.) die zweyte Medialapotome.

Der 106. Satz.

Eine gerade Linie, CD, die mit der kleinern Irrationale, AB, in Länge commensurabel, ist selbst die kleinere Irrationale.

Mache

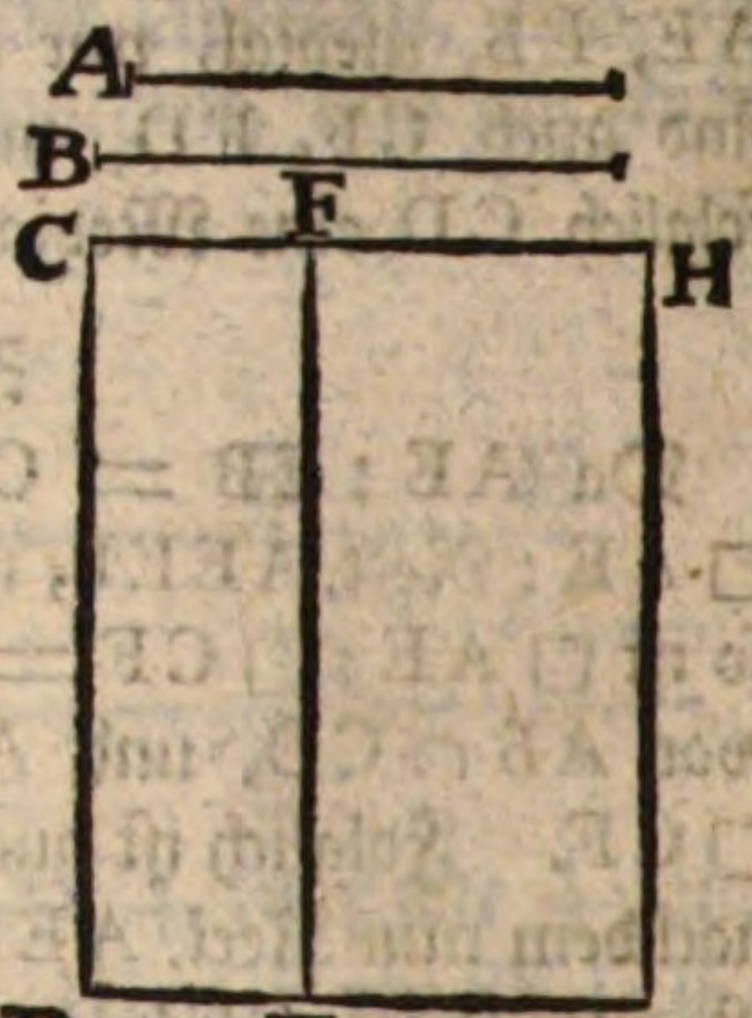
Mache alles wie vorher, so ist wiederum AE : EB = CF : FD. Nun ist (10, 77. S.) AE ⌣ EB. Folglich ist auch CF ⌣ FD.



Da AE : EB = CF : FD, so ist (6, 22. S.) □AE : □EB = □CF : □FD, folglich (5, 18. S.) verbunden □AE + □EB : □EB = □CF + □FD : □FD, und verwechselt □AE + □EB : □CF + □FD = □EB : □FD. Nun ist □EB ∩ □FD. Folglich ist auch □AE + □EB ∩ □CF + □FD. Nun ist (10, 77. S.) □AE + □EB rational. Folglich ist auch □CF + □FD rational.

Da □AE : □CF = Rect. AEEB : Rect. CFFD, aber □AE ∩ □CF, so ist Rect. AEEB ∩ Rect. CFFD. Nun ist (10, 77. S.) Rect. AEEB medial. Folglich ist (10, 24. S.) auch Rect. CFFD medial. Demnach ist CD die kleinere Irrationale.

Ein andrer Beweis. Es sey mit der kleinern Irrationale A, die Linie B, in Länge commensurabel: so ist B auch die kleinere Irrationale.



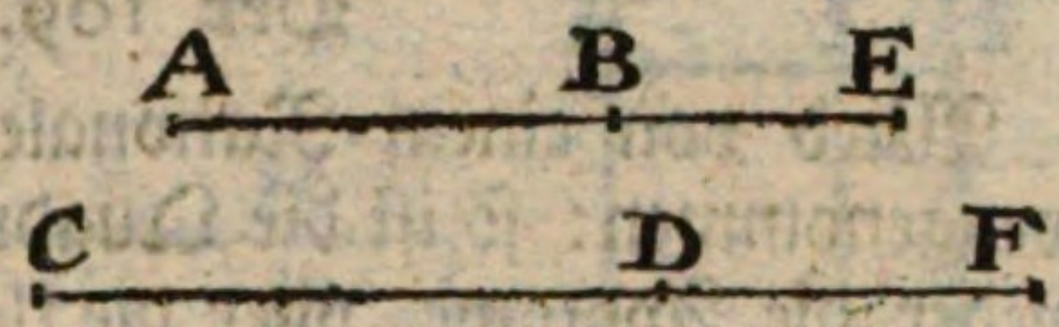
Es sey die Rationale CD. Mache CE = □A, so ist (10, 101. S.) CF die vierte Apotome. Mache FG = □B, so ist, weil A ∩ B, und daher □A ∩ □B, auch CE ∩ FG, folglich (6, 1. S.) CF ∩ FH. Nun war CF die vierte Apotome. Folglich ist (10, 104. S.) auch FH die vierte Apotome. Nun ist CD, das ist FE, rational. Folglich ist (10, 95. S.) B, die Quadratseite von FG, die kleinere Irrationale.

Der 107. Satz.

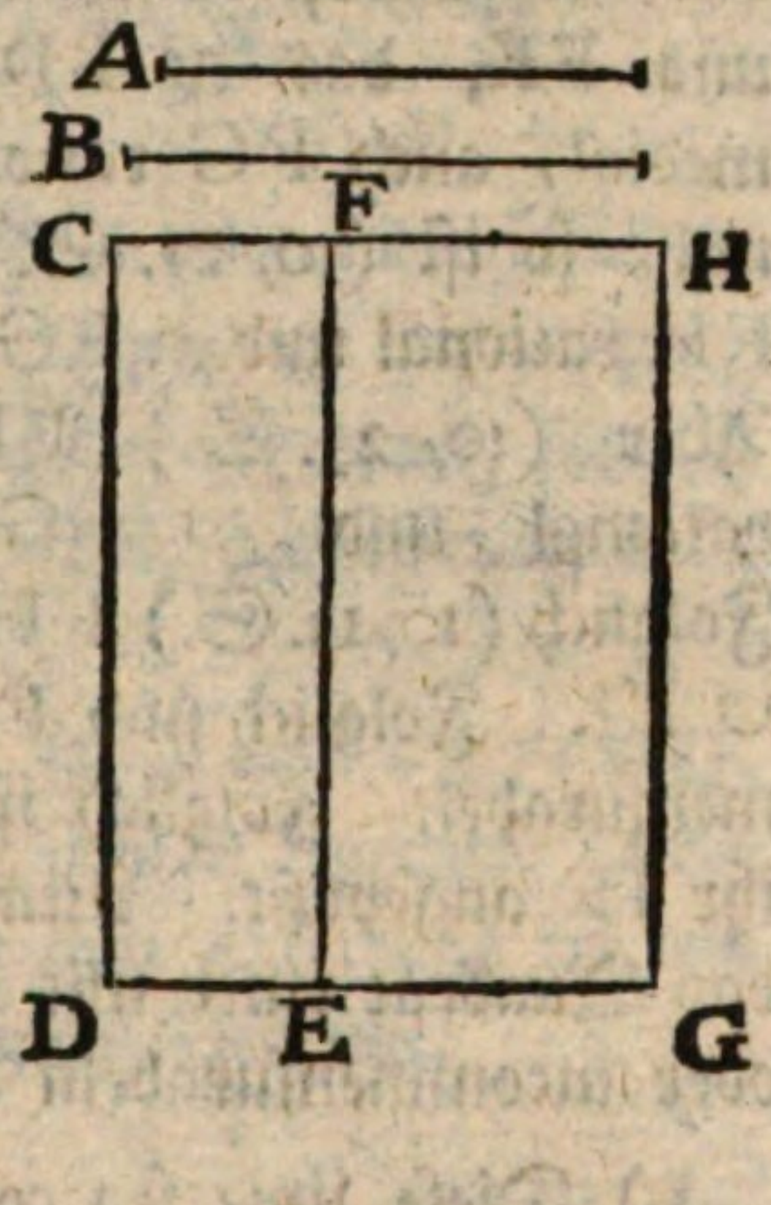
Eine gerade Linie, CD, die mit einer ein Rationales und Mediales Gebenden, AB, in Länge commensurabel, ist selbst die ein Rationales und Mediales Gebende.

Mache

Mache alles wie vorher, so ist wiederum AE : EB = CF : FD. Nun ist (10, 78. S.) AE ∪ EB, und □AE + □EB, medial, aber Rect. AEEB rational. Folglich gilt, wie vorher, eben dies von CF, FD. Folglich ist CD die ein Rationales und Mediales Gebende.



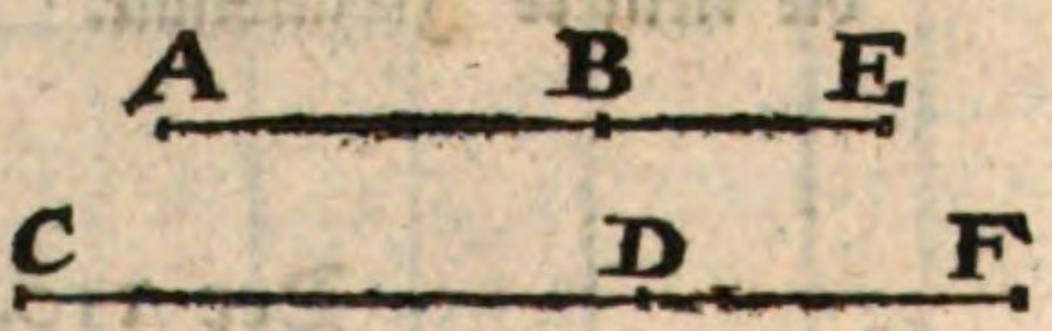
Ein andrer Beweis. Es sey mit der ein Rationales und Mediales Gebenden A, die Linie B, in Länge commensurabel. Mache CE = □A, und FG = □B, so ist (10, 102. S.) CF die fünfte Apotome, und weil CE ∩ FG, und daher CF ∩ FH, (10, 104. S.) auch FH die fünfte Apotome. Nun ist CD, das ist EF, rational. Folglich ist (10, 96. S.) B, die Quadratseite von FG, die ein Rationales und Mediales Gebende.



Der 108. Satz.

Eine gerade Linie, CD, die mit der zwey Mediale Gebenden, AB, in Länge commensurabel, ist selbst die zwey Mediale Gebende.

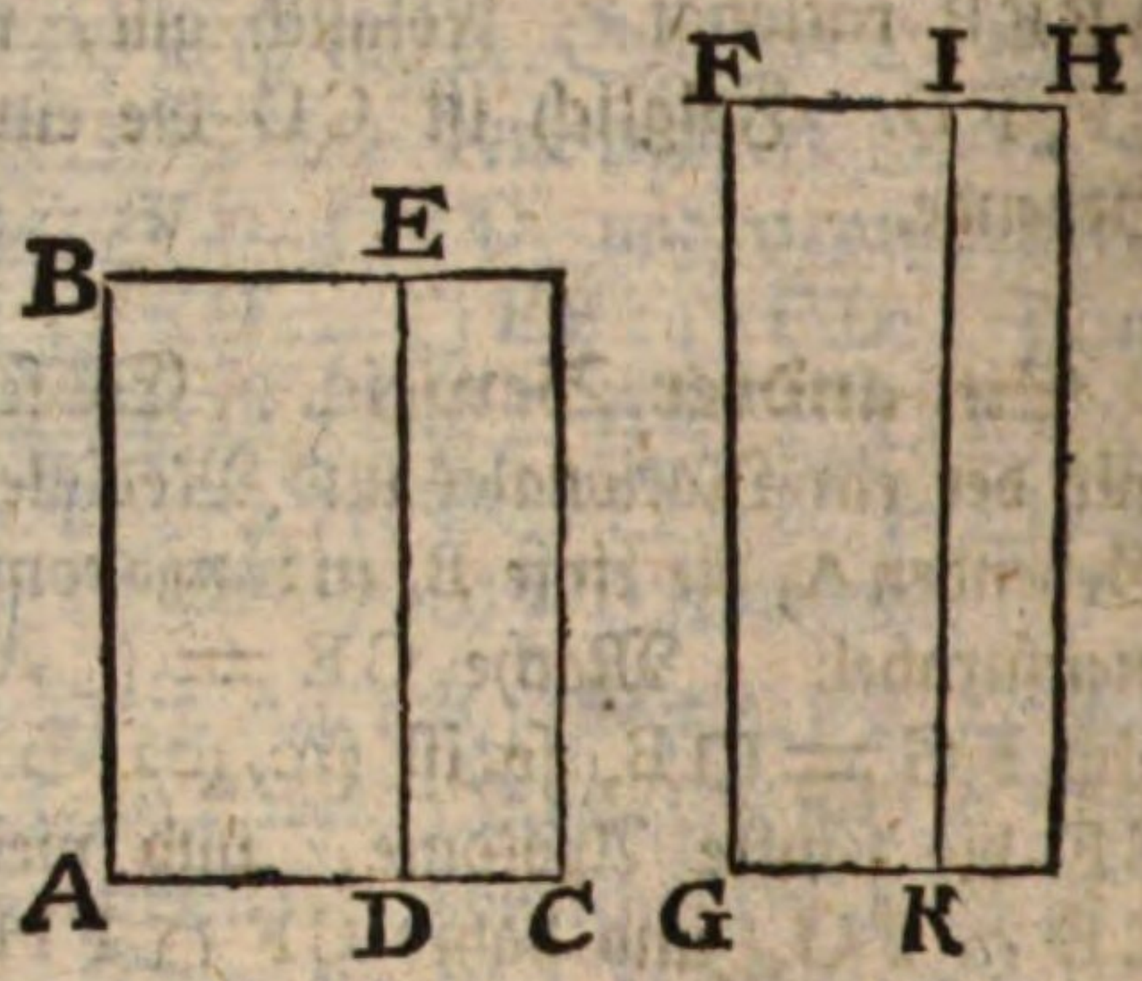
Mache alles wie vorher, so ist auch AE : EB = CF : FD. Nun ist (10, 79. S.) AE ∪ EB, und □AE + □EB, medial, auch Rect. AEEB medial, ferner □AE + □EB ∪ Rect. AEEB. Folglich gilt auch eben dies von CF, FD. Folglich ist (10, 79. S.) CD die zwey Mediale Gebende.



Der

Der 109. Satz.

Wird von einem Rationalen, BC, ein Mediales, BD, weggenommen: so ist die Quadratseite des Rests, EC, entweder die Apotome, oder die kleinere Irrationale.



Es sey die Rationale, FG. Mache GH = BC, und FK = BD, so ist KH = EC. Da BC, das ist GH, rational, und FK, das ist BD, medial, auch FG rational, so ist (10, 21. S.) FH rational und ∩ FG. Aber (10, 23. S.) FI rational und ∪ FG. Folglich (10, 13. S.) FH ∪ FI. Folglich sind FH, FI, rational nur in Quadrat commensurabel. Folglich ist (10, 74. S.) IH eine Apotome, und ihr IF angepaßt. Nun sind die Quadrate von HF, FI, um das Quadrat einer mit HF in Länge entweder commensurabeln oder incommensurabeln Linie unterschieden.

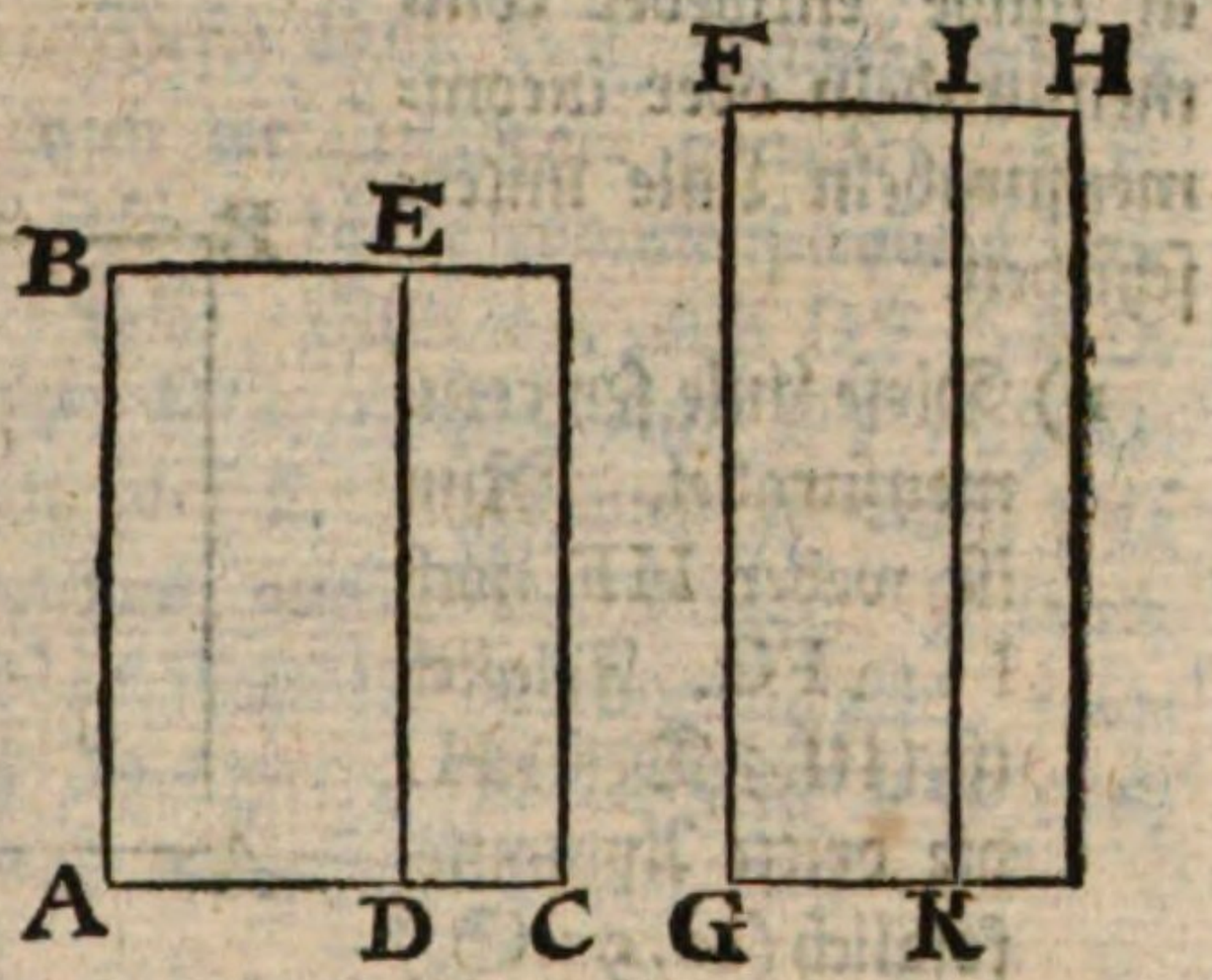
1.) Diese Linie sey commensurabel. Nun ist HF ∩ FG. Folglich (III. 1. Def.) IK die erste Apotome. Aber FG, das ist IK, rational. Folglich ist (10, 92. S.) die Quadratseite von HK, das ist von EC, eine Apotome.

2.) Diese Linie sey incommensurabel. Nun ist HF ∩ FG. Folglich ist (III. 4. Def.) IH die vierte Apotome, folglich (10, 95. S.) die Quadratseite von HK, das ist von EC, die kleinere Irrationale.

Der 110. Satz.

Wird von einem Medialen, BC, ein Rationales, BD, weggenommen: so ist die Quadratseite des Rests, EC, entweder die erste Medialapotome, oder die ein Rationales und Mediales Gebende.

Mache



Mache alles, wie vorher, so ist FH rational und ∪ FG. Aber FI rational und ∩ FG. Folglich sind HF, FI, rational nur in Quadrat commensurabel. Folglich ist HI eine Apotome, und ihr IF angepaßt. Nun sind die Quadrate von HF, FI, um das Quadrat einer mit HF in Länge entweder commensurabeln, oder incommensurabeln Linie unterschieden.

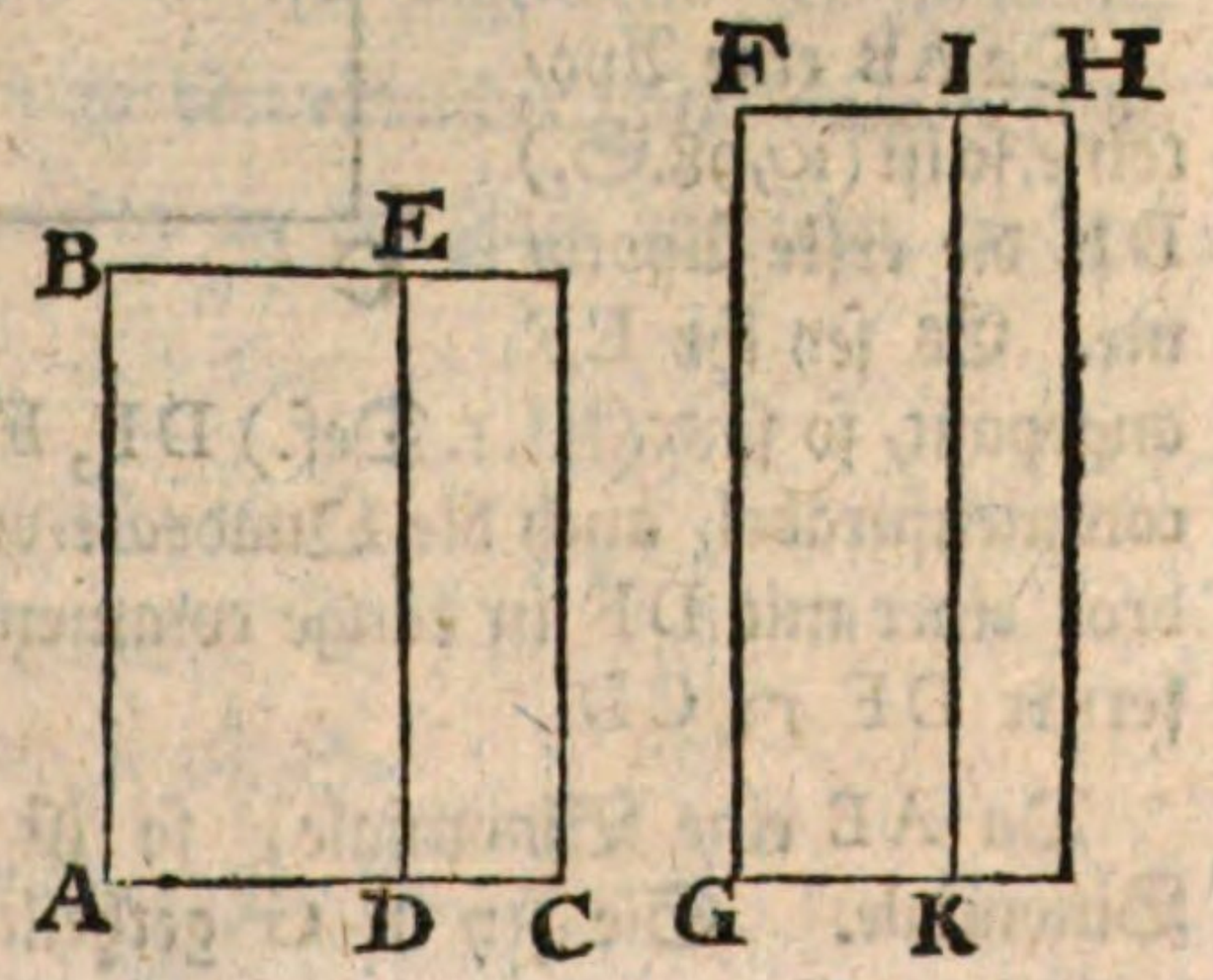
1.) Diese Linie sey commensurabel. Nun ist FI ∩ FG. Folglich ist (III. 2. Def.) HI die zweyte Apotome, folglich (10, 93. S.) die Quadratseite von HK, das ist von EC, die erste Medialapotome.

2.) Diese Linie sey incommensurabel. Nun war FI ∩ FG. Folglich ist (III. 5. Def.) HI die fünfte Apotome, folglich (10, 96. S.) die Quadratseite von HK, das ist von EC, die ein Rationales und Mediales Gebende.

Der 111. Satz.

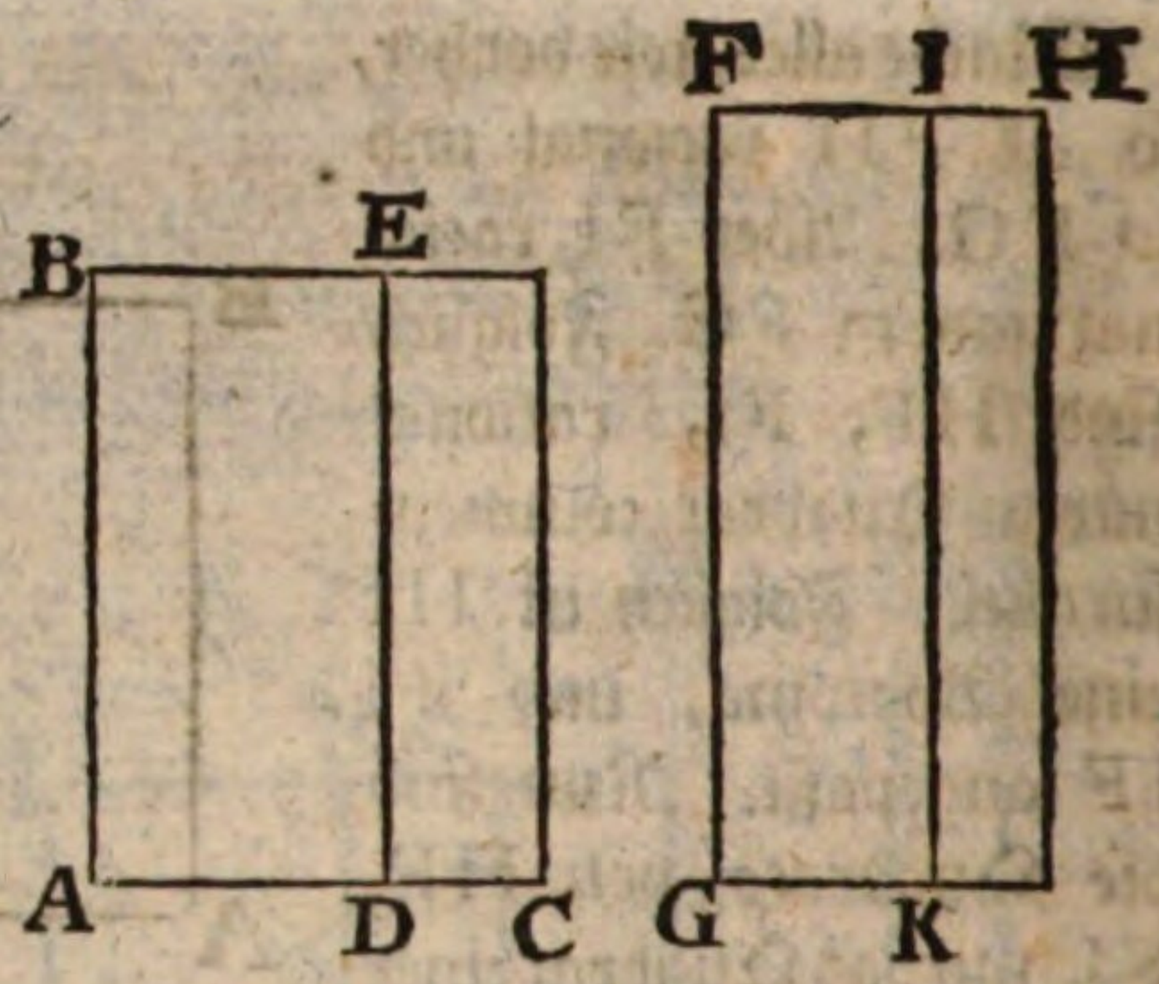
Wird von einem Medialen, BC, ein Mediales, BD, weggenommen: so ist die Quadratseite des Rests, EC, entweder die zweyte Medialapotome, oder die zwey Mediale Gebende.

Mache alles wie vorher. Da BC, BD, das ist GH, FK, medial und in Länge incommensurabel, so ist HF ∪ FI, folglich HF, FI, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich HI eine Apotome. Nun sind die Quadrate von HF, FI, um das Quadrat einer mit HF



in

in Länge entweder commensurabeln oder incommensurabeln Linie unterschieden.

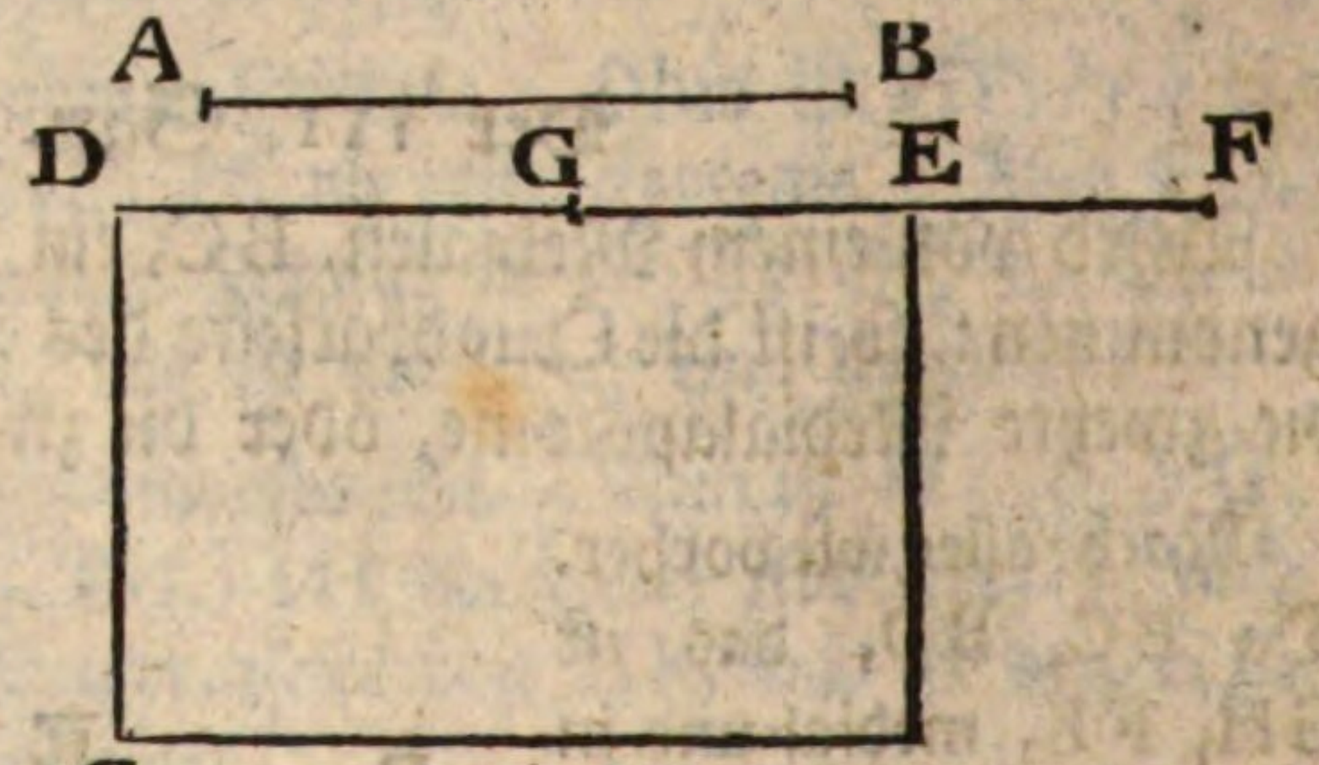


1.) Diese Linie sey commensurabel. Nun ist weder HF noch FI ∩ FG. Folglich ist (III. 3. Def.) HI die dritte Apotome, folglich (10, 94. S.) die Quadratseite von HK, das ist von EC, die zweyte Medialapotome.

2.) Diese Linie sey incommensurabel. Nun war weder HF noch FI ∩ FG. Folglich ist (III. 6. Def.) HI die sechste Apotome, folglich (10, 97. S.) die Quadratseite von HK, das ist von EC, die zwey Mediale Gebende.

Der 112. Satz.

Die Apotome, AB, ist mit der Binomialen nicht einerley.



Wär es möglich, daß AB eine Apotome und zugleich eine Binomiale wäre, so sey die Rationale, DC. Mache CE = □AB.

Da AB eine Apotome, so ist (10, 98. S.) DE die erste Apotome. Es sey ihr EF angepaßt, so sind (III. 1. Def.) DF, FE, rational nur in Quadrat commensurabel, auch die Quadrate von DF, FE, um das Quadrat einer mit DF in Länge commensurabeln Linie unterschieden, ferner DF ∩ CD.

Da AB eine Binomiale, so ist (10, 61. S.) DE die erste Binomiale. Sie sey in G getheilt, so daß DG ihr grösserer

Name,

Name, folglich sind (III. 1. Def.) DG, GE, rational nur in Quadrat commensurabel, auch die Quadrate von DG, GE, um das Quadrat einer mit DG in Länge commensurabeln Linie unterschieden, ferner DG ∩ DC. Nun war auch DF ∩ CD. Folglich ist (10, 12. S.) DF ∩ DG, folglich auch DF ∩ FG. Nun war DF rational und ∪ FE. Folglich ist auch FG rational und ∪ FE. Nun war auch FE rational. Folglich sind GF, FE, rational nur in Quadrat commensurabel, folglich (10, 74. S.) EG eine Apotome. Nun war EG auch rational; welches offenbar sich widerspricht.

Zusatz.

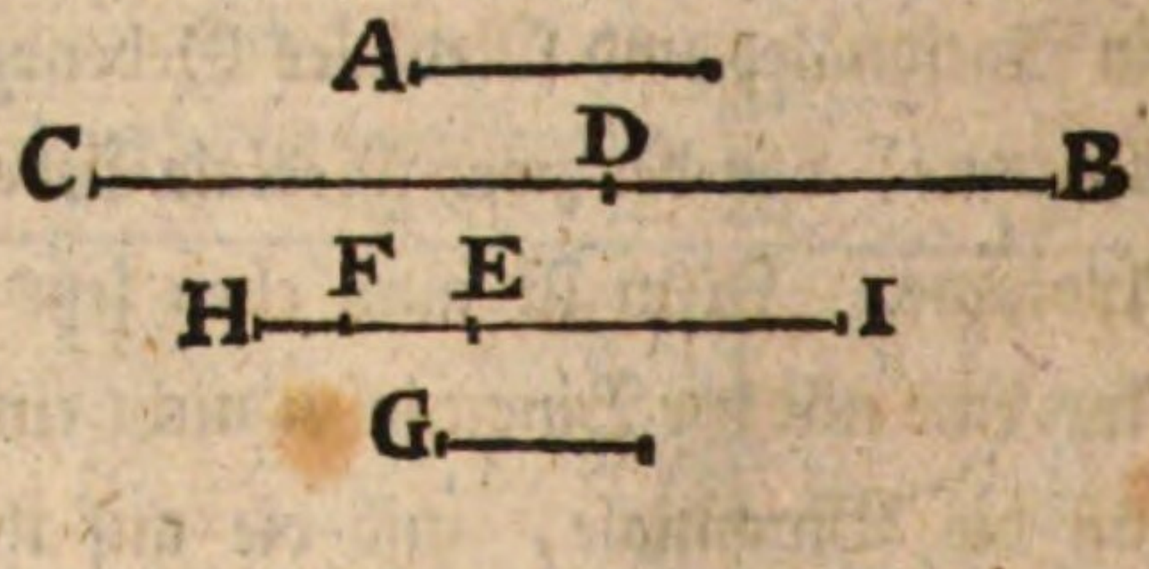
Die Apotome, und die auf ihr folgenden Irrationalen, sind sowohl von den Medialen, als auch von einander selbst, unterschieden. Denn das Quadrat der Medialen giebt (10, 23. S.) eine Rationale; der Apotome (10, 98. S.) die erste Apotome; der ersten Medialapotome (10, 99. S.) die zweyte Apotome; der zweyten Medialapotome (10, 100. S.) die dritte Apotome; der kleinern Irrationale (10, 101. S.) die vierte Apotome; von der ein Rationales und Mediales Gebenden (10, 102. S.) die fünfte Apotome; von der zwey Mediale Gebenden (10, 103. S.) die sechste Apotome. Nun ist auch eben jetzt bewiesen worden, daß die Apotome mit der Binomialen nicht einerley sey, und (10, 73. Zus.) daß die Binomiale, und die auf ihr folgenden Irrationalen, gleichfals von der Medialen und von einander unterschieden sind. Demnach sind diese Irrationalen an der Zahl dreyzehn, welche also auf einander folgen:

1. Die Mediale. 22. S.
2. Die Binomiale. 37. S.
3. Die erste Bimediale. 38. S.
4. Die zweyte Bimediale. 39. S.

5. Die grössere Irrationale. 40. S.
6. Des Rationalen und Medialen Quadratseite. 41. S.
7. Zweyer Medialen Quadratseite. 42. S.
8. Die Apotome. 74. S.
9. Die erste Medialapotome. 75. S.
10. Die zweyte Medialapotome. 76. S.
11. Die kleinere Irrationale. 77. S.
12. Die ein Rationales und Mediales Gebende. 78. S.
13. Die zwey Mediale Gebende. 79. S.

Der 113. Satz.

Ist in einem Rectangel, dessen Quadratseite eine Rationale, A, die eine Seite, BC, binomial: so ist die andre Seite, EF, eine Apotome, deren Namen mit den Namen der Binomialen commensurabel und in gleicher Verhältniß sind; auch ist die Apotome mit der Binomialen von gleicher Ordnung.



Die Binomiale, BC, sey in D getheilt, so daß CD der grössere Name. Auch sey Rect. BD, G = □A. Nun ist Rect. BCEF = □A, folglich ist Rect. BD, G = Rect. BCEF, folglich (6, 16. S.) CB : BD = G : EF. Nun ist CB > BD, folglich auch G > EF. Es sey daher EH = G. Demnach ist Rect. EHBD = □A, und CB : BD = EH : EF, folglich (5, 17. S.) getrennt CD : DB = HF : FE. Mache HF : FE = FI : IE. Folglich ist (5, 12. S.) HI : IF = FI : IE. Nun war FI : IE = CD : DB. Folglich HI : IF = CD : DB. Nun ist (10, 37. S.) □CD ∩ □DB. Folglich (10, 10. S.) □HI ∩ □IF. Nun war HI : IF = IF : IE, und daher (6, 20. Zus.) □HI : □IF = HI : IE, folglich HI ∩ IE. Folglich (10, 16. S.) HE ∩ EI.

Da

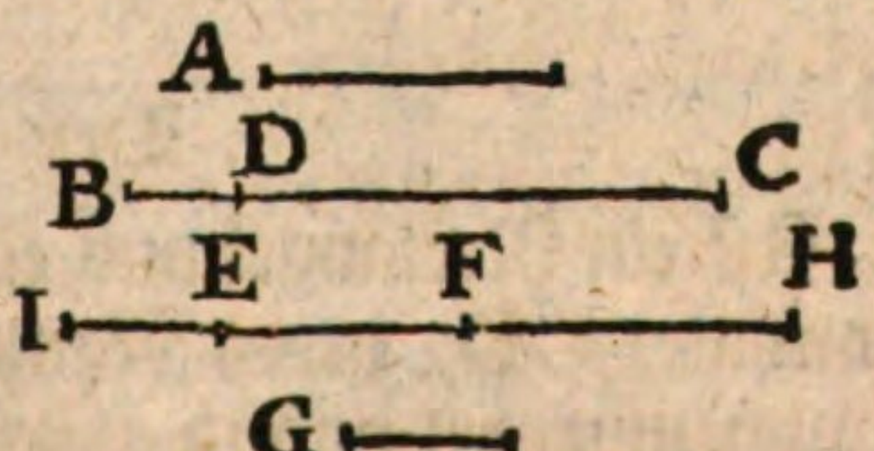
Da □ A = Rect. EHBD, und □ A rational, so ist Rect. EHBD rational. Nun war auch BD rational. Folglich ist (10, 21. S.) HE rational und ∩ BD. Nun war HE ∩ EI. Folglich ist auch EI rational und ∩ BD.

Da CD : DB = FI : IE, und CD ⌢ DB, so ist auch FI ⌢ IE. Nun ist IE rational und ∩ BD. Folglich ist auch FI rational und ∩ CD, folglich (10, 74. S.) EF eine Apotome, deren Namen, FI, IE, mit der Binomiale BC Namen, CD, DB, commensurabel und in gleicher Verhältniß sind.

Da CD : DB = FI : IE, so gilt alles von FI, IE, was von CD, DB, gilt; es mögen nun die Quadrate von CD, DB, um das Quadrat einer mit CD in Länge commensurabeln oder incommensurabeln Linie unterschieden seyn; auch mag entweder CD, oder DB, oder keines von beyden mit einer angenommenen Rationale in Länge commensurabel seyn. Demnach ist (III. 1. bis 6. Def.) die Apotome EF immer von der Ordnung, von welcher die Binomiale BC ist.

Der 114. Satz.

Ist in einem Rectangel, dessen Quadratseite eine Rationale, A, die eine Seite, BD, eine Apotome: so ist die andre Seite, IH, eine Binomiale, deren Namen mit den Namen der Apotome commensurabel und in gleicher Verhältniß sind; auch ist die Binomiale mit der Apotome von gleicher Ordnung.



Der Apotome BD, sey DC angepaßt. Folglich sind (10, 74. S.) BC, CD, rational nur in Quadrat commensurabel. Auch sey Rect. BC, G = □ A. Nun ist □ A rational, folglich auch Rect. BC, G rational, aber BC ratio-

nal, folglich (10, 21. S.) G rational und ∩ BC. Da Rect. BDIH = □A = Rect. BC, G, so ist (6, 16. S.) CB : BD = IH : G, aber CB > BD, folglich auch IH > G. Es sey daher IE = G. Demnach IE ∩ BC, und Rect. BCIE = □A, auch CB : BD = HI : IE, folglich zurückkehrend BC : CD = IH : HE. Mache IH : HE = HF : FE, so ist (5, 19. S.) IF : FH = IH : HE = BC : CD. Nun sind BC, CD, folglich auch IF, FH, nur in Quadrat commensurabel.

Da IF : FH = IH : HE, und IH : HE = HF : FE, so ist IF : FH = HF : FE, folglich (6, 20. Zus.) IF : FE = □IF : □FH. Nun sind IF, FH, in Quadrat commensurabel, das ist, □IF ∩ □FH, folglich IF ∩ FE, folglich (10, 16. S.) FI ∩ IE. Nun ist IE rational und ∩ BC. Folglich ist auch FI rational und ∩ BC.

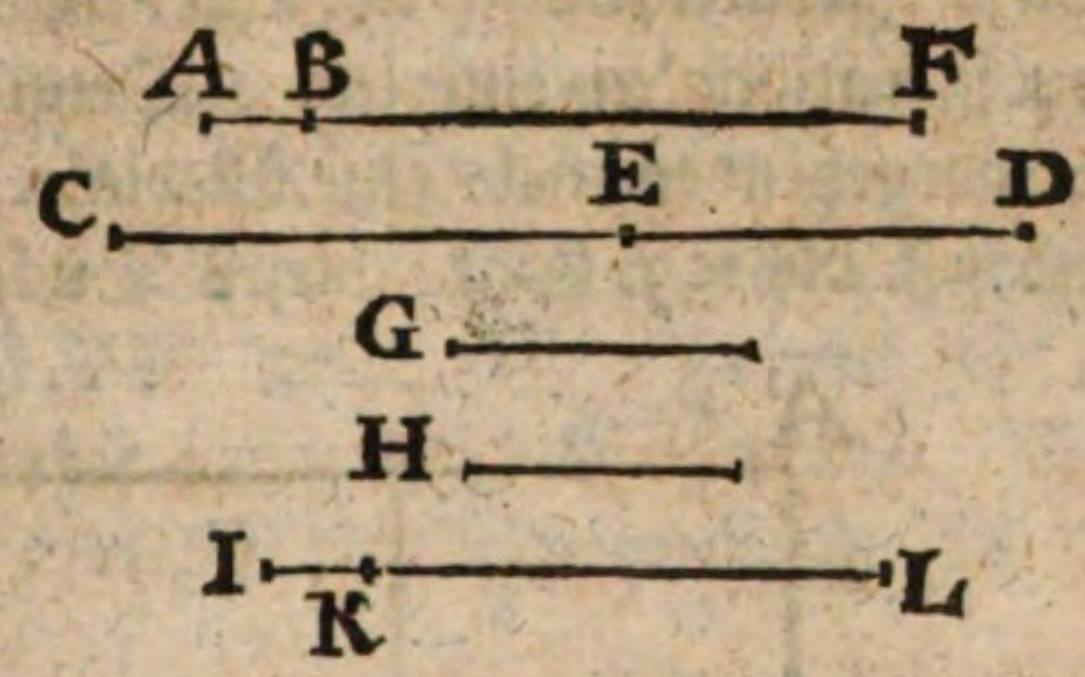
Da BC : CD = IF : FH, folglich verwechselt BC : IF = CD : FH, aber BC ∩ IF, so ist CD ∩ FH. Auch sind, wie BC, CD, eben so IF, FH, rational nur in Quadrat commensurabel. Folglich ist (10, 37. S.) IH eine Binomiale, deren Namen IF, FH, mit den Namen der Apotome, BD, das ist mit BC, CD, commensurabel und in gleicher Verhältniß sind.

Da BC : CD = IF : FH, so gilt wie vorher, von IF, FH, alles was von BC, CD, gilt. Demnach ist (III. 1. bis 6. Def.) die Binomiale IH immer von der Ordnung, von welcher die Apotome BD ist.

Der 115. Satz.

Ist ein Rectangel aus einer Apotome, AB, und einer Binomiale, CD, deren Namen mit den Namen der Apotome commensurabel und in gleicher Verhältniß sind: so ist dessen Quadratseite, G, eine Rationale.

Es seyen die Namen der Binomiale, CE, ED, und der Apotome, AF, FB; und nach der Voraussetzung, CE, ED, mit AF, FB, commensurabel und in gleicher Verhältniß, auch Rect. ABCD = □G.



Es sey die Rationale H, und (1, 45. S.) Rect. CDIK = □H, so ist (10, 113. S.) IK eine Apotome, deren Namen IL, LK, mit den Namen der Binomiale, CE, ED, commensurabel und in gleicher Verhältniß sind, das ist, CE : ED = IL : LK. Nun war AF : FB = CE : ED. Folglich ist (5, 11. S.) AF : FB = IL : LK, folglich verwechselt AF : IL = FB : LK, folglich (5, 19. S.) AB : IK = AF : IL. Nun ist AF ∩ IL. Folglich AB ∩ IK. Nun ist (6, 1. S.) AB : IK = Rect. CDAB : Rect. CDIK. Folglich Rect. CDAB ∩ Rect. CDIK. Nun war Rect. CDIK = □H, und Rect. CDAB = □G, folglich ist □G ∩ □H. Nun war □H rational. Folglich ist □G, und daher G, die Quadratseite des Rect. CDAB, rational.

Zusatz.

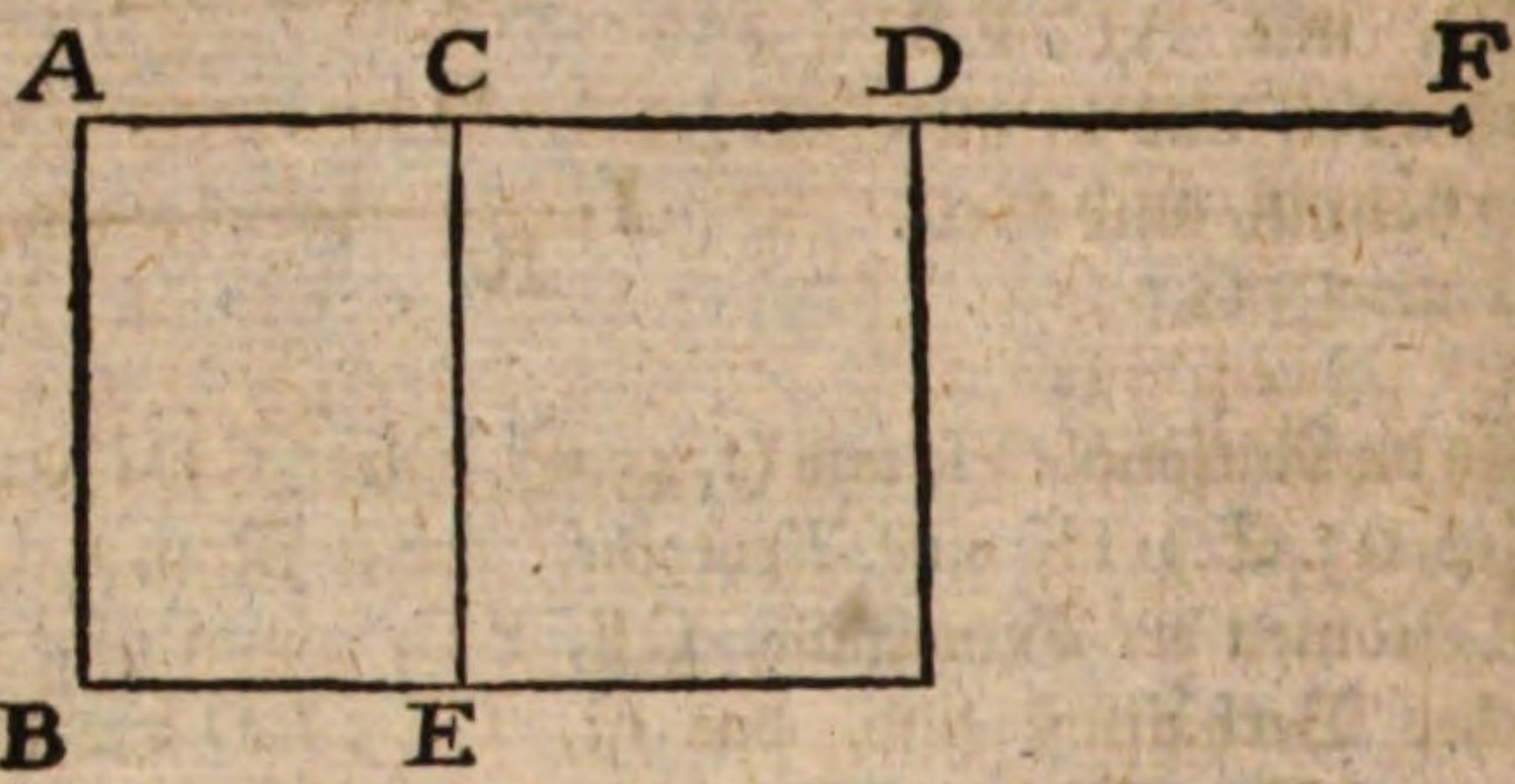
Hieraus erhellet, daß ein Rationalrectangel aus Irrationallinien seyn könne.

Der 116. Satz.

Aus einer Medialen, AC, können unzählige Irrationalen entstehen, welche mit keiner der vorhergehenden einerley sind.

Es sey die Rationale, AB, an der Medialen, AC, rechtwinklich. Vollende BC. Auch sey BC = □CD, so ist (10, 39. Zus.) BC, folglich (10, 11. Def.) CD, irrational.

Diese Irrationale CD aber ist mit keiner der vorhergehenden Irrationalen einerley. Denn kein Quadrat irgend einer der vorgehenden giebt eine Mediale, BC, wie aus den 61. bis 66, und 98. bis 103. Satze dieses Buchs erhellet.

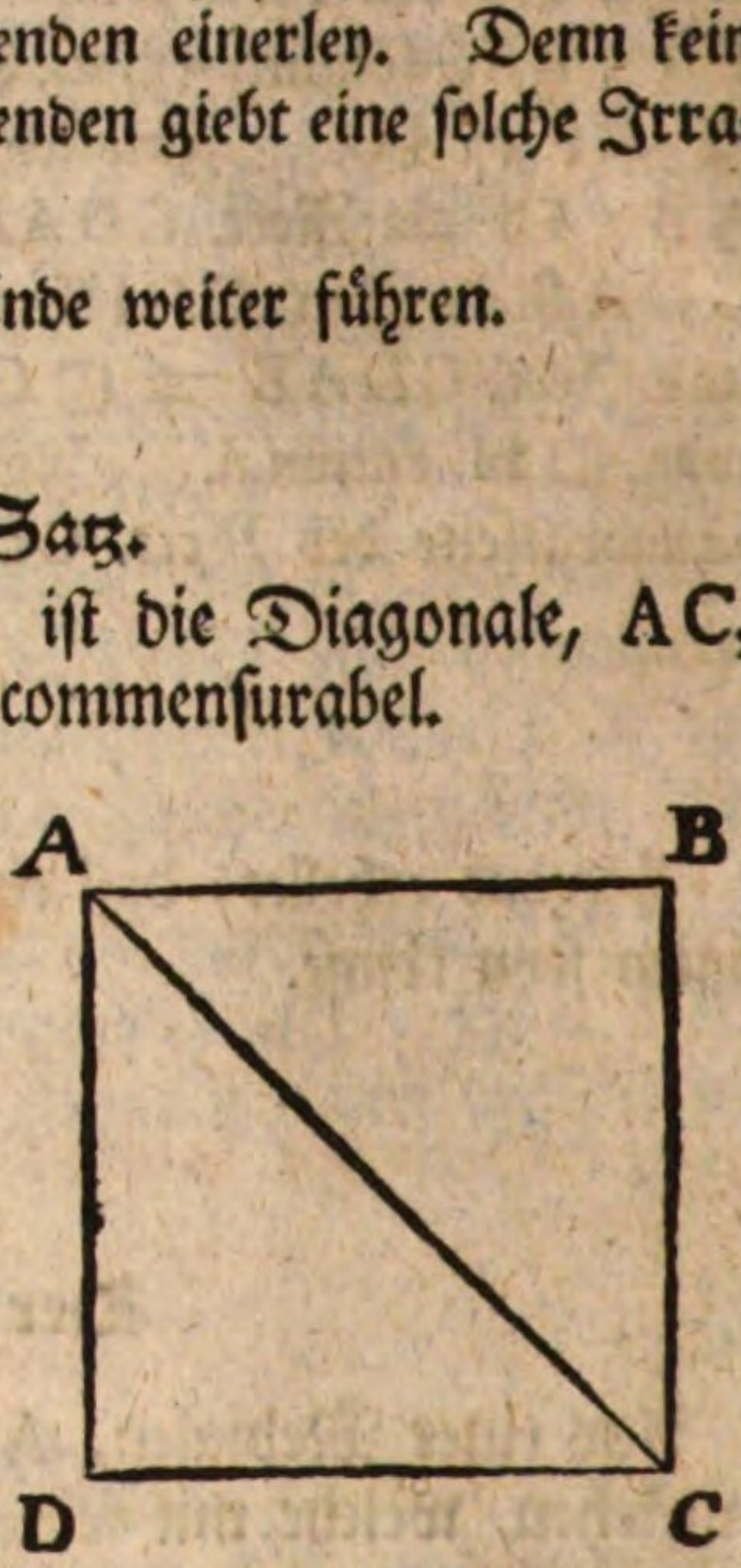


Vollende ED, und es sey ED = □ DF, so ist ebenfals DF irrational, und mit keiner vorhergehenden einerley. Denn kein Quadrat irgend einer der vorhergehenden giebt eine solche Irrationale, als CD ist.

Diese Schlüsse lassen sich ohne Ende weiter führen.

Der 117. Satz.

In jedem Quadrate, ABCD, ist die Diagonale, AC, mit der Seite, AB, in Länge incommensurabel.



Gesetzt AC sey ∩ AB. Folglich verhielten sich AC, AB, wie Zahlen. Es seyen EF, G, die kleinsten Zahlen in dieser Verhältniß. Nun ist offenbar AC > AB. Folglich ist EF unmöglich die Einheit, folglich eine Zahl.

Da AC : AB = EF : G, so ist □AC : □AB = $EF^2 : G^2$. Nun ist (1, 47. S.) □ AC = 2 □ AB. Folglich ist $EF^2 = 2\,G^2$, folglich EF^2, und daher (9, 23. S.) EF, eine gerade Zahl, folglich ist G

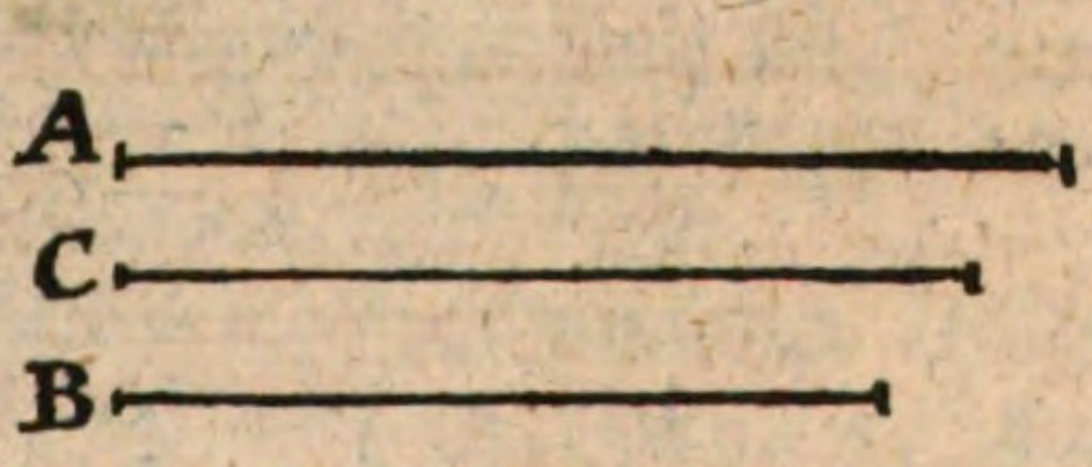
ungerade.

ungerade. Denn wäre G auch gerade, so würden EF und G von der Zahl Zwey gemessen werden, da sie doch die kleinsten in ihrer Verhältniß, folglich (7, 24. S.) Primzahlen zu einander sind. Halbire EF in H, so ist $EF = 2\,EH$, folglich (8, 11. S.) $EF^2 = 4\,EH^2$. Nun ist $EF^2 = 2\,G^2$. Folglich $G^2 = 2\,EH^2$, folglich G^2, und daher (9, 23. S.) G, gerade. Nun war G auch ungerade; welches offenbar sich wiederspricht.

Ein andrer Beweis. Wäre $AC \cap AB$, so mache $AC : AB = EF : G$, so daß EF, G, die kleinsten Zahlen in dieser Verhältniß, folglich (7, 24. S.) Primzahlen zu einander sind.

Da $AC : AB = EF : G$, so ist $\square AC : \square AB = EF^2 : G^2$. Nun ist $\square AC = 2 \square AB$, folglich ist $EF^2 = 2\,G^2$. Demnach wird EF^2 von G^2, folglich (8, 14. S.) EF von G gemessen. Nun wird auch G von sich selbst gemessen. Folglich werden EF, G, von G gemessen. Nun ist G nicht die Einheit. Denn wäre G die Einheit, so würde, weil $EF^2 = 2\,G^2$, die $EF^2 = 2$ seyn, welches unmöglich. Demnach ist G eine Zahl, und es werden EF, G, von einer Zahl G gemessen, welches, weil EF, G, Primzahlen zu einander, unmöglich ist.

Anmerkung.



Hat man zwey in Länge incommensurable gerade Linien, A, B, gefunden: so lassen sich mehrere andre incommensurable Grössen finden. Denn nimmt man (6, 13. S.) zu A, B, die mittlere Proportionale, C, so ist (6, 20. S.) A : B = Fig. A : Fig. C, es mögen nun diese Figuren Quadrate, oder andre ähnliche geradliniche Figuren,

oder auch Cirkel seyn. Nun sind A, B, incommensuruabel, folglich sind auch diese Figuren incommensurabel. Stellt man nun auf diese Figuren Körper von gleicher Höhe, es mögen nun Pyramiden, oder Prismata, Kegel oder Cylinder seyn, so verhalten sich dieselben, wie im folgenden Buche wird bewiesen werden, wie ihre Grundflächen. Da nun diese incommensurabel, so sind auch die Körper selbst incommensurabel. Hieraus erhellet, daß die Commensurabilität und Incommensurabilität nicht nur bey Linien und Flächen, sondern auch bey Körpern statt finde.

Euklids Elemente

Eilftes Buch.

Definitionen.

1. Ein Körper ist, was eine Länge, Breite und Tiefe hat.
2. Eines Körpers Grenzen sind Flächen.
3. Eine gerade Linie ist auf einer Ebne senkrecht, wenn solche auf allen geraden Linien, welche sie berühren, und in gedachter Ebne liegen, senkrecht ist.
4. Eine Ebne ist auf einer andern Ebne senkrecht, wenn die in der einen Ebne senkrecht auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitt gezognen geraden Linien auch auf der andern Ebne senkrecht sind.
5. Die Neigung einer geraden Linie gegen eine Ebne ist der spitze Winkel, den sie mit einer andern geraden Linie macht, welche man durch zwey Punkte in der Ebne zieht, deren einen erstgedachte Linie selbst, den andern aber der von einem willkührlichen Punkte derselben auf die Ebne gefällte Perpendikel trift.
6. Die Neigung zweyer Ebnen gegen einander ist der spitze Winkel zwischen den geraden Linien, die aus einerley Punkte des gemeinschaftlichen Durchschnitts senkrecht auf solchem Durchschnitte in jeder dieser Ebnen gezogen werden.
7. Die Neigungen mehrerer Ebnen heissen änlich, wenn ihre vorherbeschriebnen Neigungswinkel gleich sind.
8. Parallelebnen sind solche, die nie zusammentreffen können.

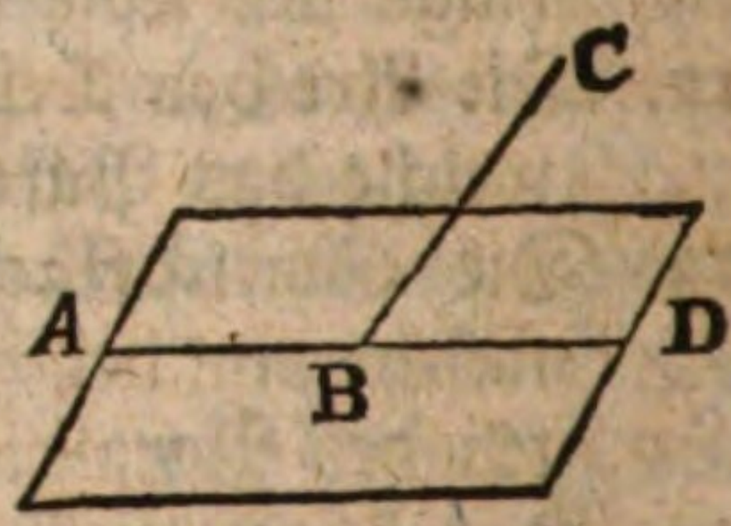
9. Aenliche Körper sind solche, die von gleich vielen änlichen Ebnen begrenzt werden.
10. Gleiche und änliche Körper, die von gleich vielen änlichen und gleichen Ebnen begrenzt werden.
11. Ein körperlicher Winkel (eine Ecke) ist die Neigung wenigstens dreyer Linien gegen einander, welche zusammentreffen, ohne in einerley Ebne zu liegen. Oder: ein körperlicher Winkel ist der, so von wenigstens drey ebnen Winkeln begrenzt wird, welche in Einem Punkte zusammentreffen, ohne in einerley Ebne zu liegen.
12. Eine Pyramide (Spitzsäule) ist ein Körper, der von Ebnen begrenzt ist, welche von einer einzigen Ebne ausgehen, und in Einem Punkte ausser derselben zusammentreffen.
13. Ein Prisma (eine Eksäule) ist ein Körper, der von Ebnen begrenzt ist, unter denen zwey einander gegenüberliegende gleich und änlich sowohl, als parallel, die übrigen aber Parallelogramme sind.
14. Eine Kugel (Sphäre) wird von einem halben Cirkel beschrieben, wenn derselbe rings um seinen unverrückten Durchmesser gedrehet wird.
15. Die Axe der Kugel ist die unverrückte Linie, um welche der halbe Cirkel gedrehet worden.
16. Der Mittelpunkt der Kugel ist eben der, welcher auch der Mittelpunkt dieses halben Cirkels ist.
17. Ein Durchmesser der Kugel ist jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt gehet, und an beyden Seiten von der Kugelfläche begrenzt wird.
18. Ein Kegel (Konus) wird von einem rechtwinklichen Triangel beschrieben, wenn derselbe rings um seinen unverrückten Perpendikel gedrehet wird. Dieser unverrückte Perpendikel ist entweder eben so groß, oder kleiner, oder grösser als der andre bewegte; und macht dadurch im ersten Fall, einen rechtwinklichen, im zweyten, einen stumpfwinklichen, im dritten, einen spitzwinklichen Kegel.
19. Die Axe des Kegels ist der unverrückte Perpendikel, um welchen der Triangel sich gedrehet hat.

20. Die

20. Die **Grundfläche des Kegels** ist der Cirkel, welcher von dem bewegten Perpendikel beschrieben wird.
21. Ein **Cylinder** (eine **Walze**) wird von einem rechtwinklichen Parallelogramm beschrieben, wenn dasselbe sich rings um seine unverrückte Seite dreht.
22. Die **Axe des Cylinders** ist die unverrückte Seite, um welche das Parallelogramm sich drehet.
23. Die **Grundflächen des Cylinders** sind die Cirkel, welche von den beyden entgegengesetzten bewegten Seiten des Parallelogramms beschrieben werden.
24. Kegel, wie auch **Cylinder**, sind einander ähnlich, wenn ihre Axen und die Durchmesser ihrer Grundflächen proportionirt sind.
25. Ein **Wirfel** (**Kubus**) ist ein Körper, der von sechs gleichen Quadraten begrenzt wird.
26. Ein **Tetraedron** (Viereck) ist ein Körper, der von vier gleichen und gleichseitigen Triangeln begrenzt wird.
27. Ein **Oktaedron** (Achteck) ist ein Körper, der von acht gleichen und gleichseitigen Triangeln begrenzt wird.
28. Ein **Dodekaedron** (Zwölfeck) ist ein Körper, der von zwölf gleichen, gleichseitigen und gleichwinklichen, Pentagonen begrenzt wird.
29. Ein **Ikosaedron** (Zwanzigeck) ist ein Körper, der von zwanzig gleichen und gleichseitigen Triangeln begrenzt wird.

Der 1. Satz.

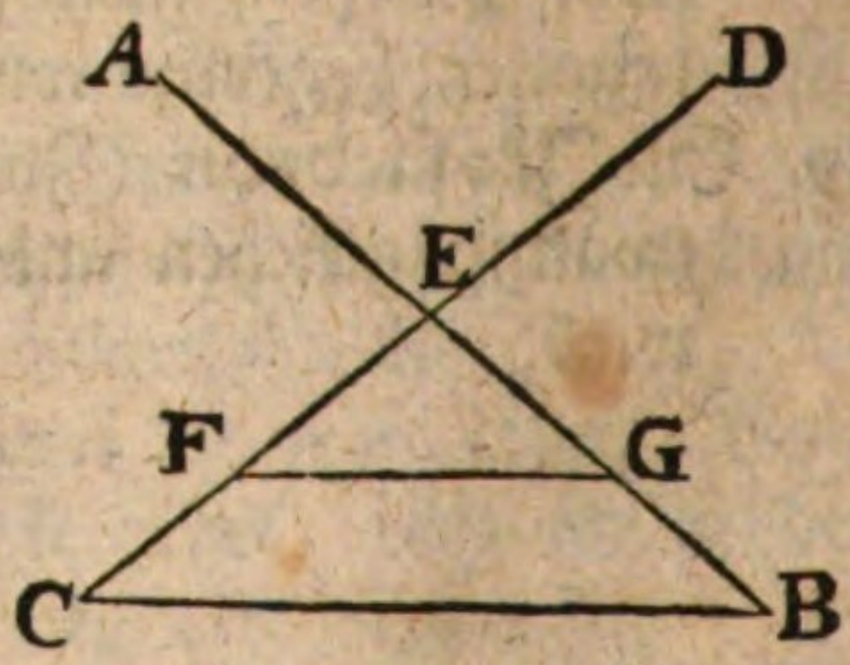
Von einer geraden Linie, kann nicht ein Stück, AB, in einer Ebne, und ein andres Stück, BC, über der Ebne liegen.



Wär es möglich, daß ABC eine gerade Linie wäre, von der das Stück, AB, in der Ebne, und das Stück, BC, über der Ebne läge: so verlängre das Stück in der Ebne, AB, bis D. Demnach würden die beyden geraden Linien, ABC, ABD, einander in AB schneiden; welches unmöglich, weil zwey gerade Linien nur in Einem Punkte zusammentreffen können, wenn sie nicht ganz auf einander fallen sollen.

Der 2. Satz.

Zwey einander schneidende gerade Linien, AB, CD, liegen in Einer Ebne; auch jeder Triangel liegt in Einer Ebne.

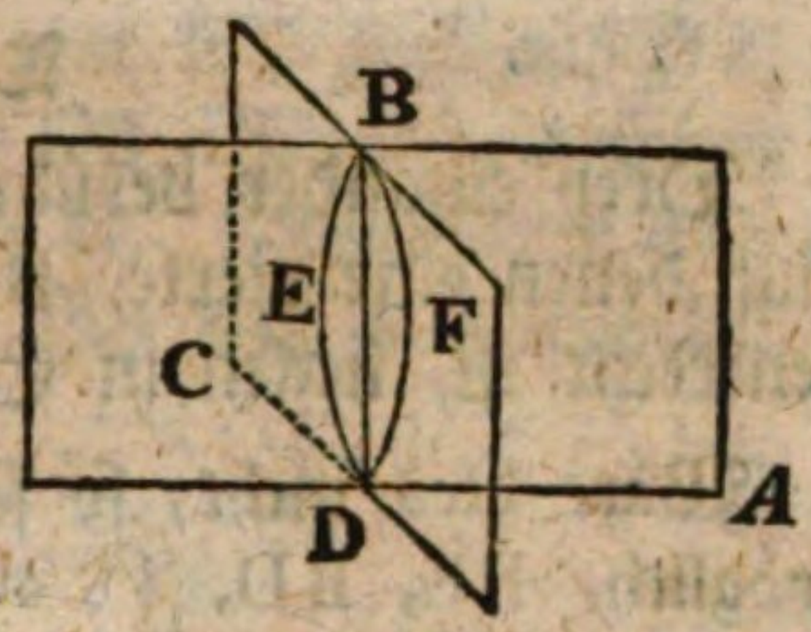


Auf EC, EB, nimm willkührliche Punkte, F, G, und ziehe BC, FG. Wäre nun vom △ ECB, ein Stück, EFG, in der Ebne, und ein andres Stück, FGBC, über der Ebne: so würde auch von jeder der beyden geraden Linien, EB, EC, ein Stück in der Ebne, und ein andres über der Ebne liegen, welches (II, 1. S.) unmöglich ist. Demnach liegt der ganze △ EBC, in Einer Ebne. In dieser Ebne liegen auch EB, EC, folglich (II, 1. S.) auch AB, CD.

Der 3. Satz.

Zwey einander schneidende Ebnen, AB, BC, haben zum gemeinschaftlichen Durchschnitte, BD, eine gerade Linie.

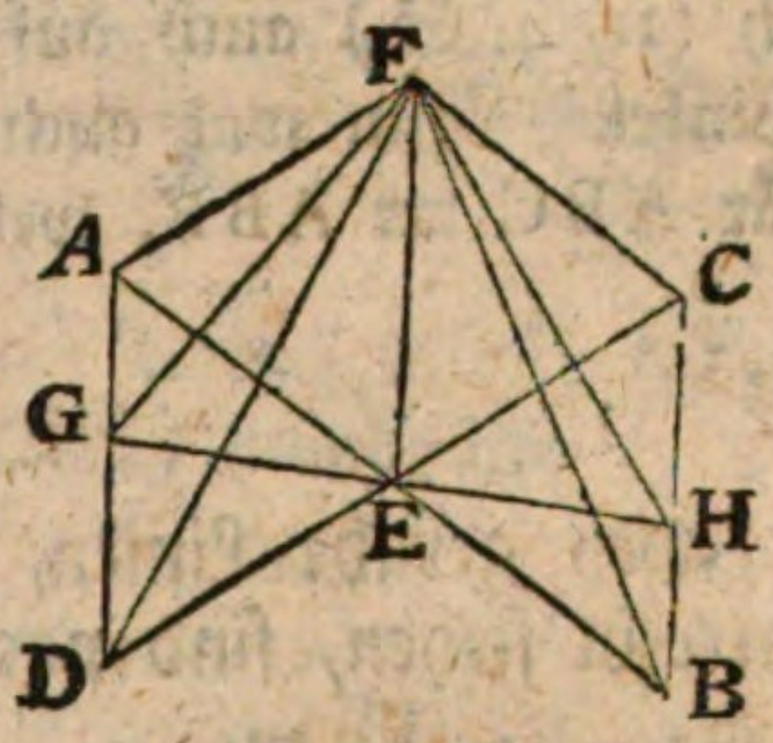
Wäre



Wäre BD keine gerade Linie, so sey es irgend eine andre, etwa BED in der Ebne AB, und BFD in der Ebne BC. Demnach würden zwey gerade Linien, BED, BFD, einen Raum, BEDF, einschliessen, welches (1, 12. Ax.) unmöglich ist. Folglich kann ausser BD keine andre Linie von B nach D gerade seyn.

Der 4. Satz.

Wenn in einer Ebne zwey gerade Linien, AB, CD, einander schneiden, und auf denselben in ihrem Durchschnittspunkte, E, eine dritte, EF, senkrecht ist: so ist dieselbe auch auf solcher Ebne senkrecht.



Ziehe durch E in der Ebne willkührlich eine gerade Linie, GEH. Mache EA = EB, EC = ED, und ziehe AD, CB, desgleichen, von einem in der Linie EF willkührlich genommenen Punkte, F, die FA, FG, FD; FC, FH, FB.

In den Triangeln, AED, CEB, ist AE = EB, ED = EC, und (1, 15. S.) die Winkel bey E gleich; folglich (1, 4. S.) AD = EC, und DAE = EBC. Nun ist (1, 15. S.) AEG = BEH, auch AE = EB. Folglich ist (1, 26. S.) AG = BH, und GE = EH.

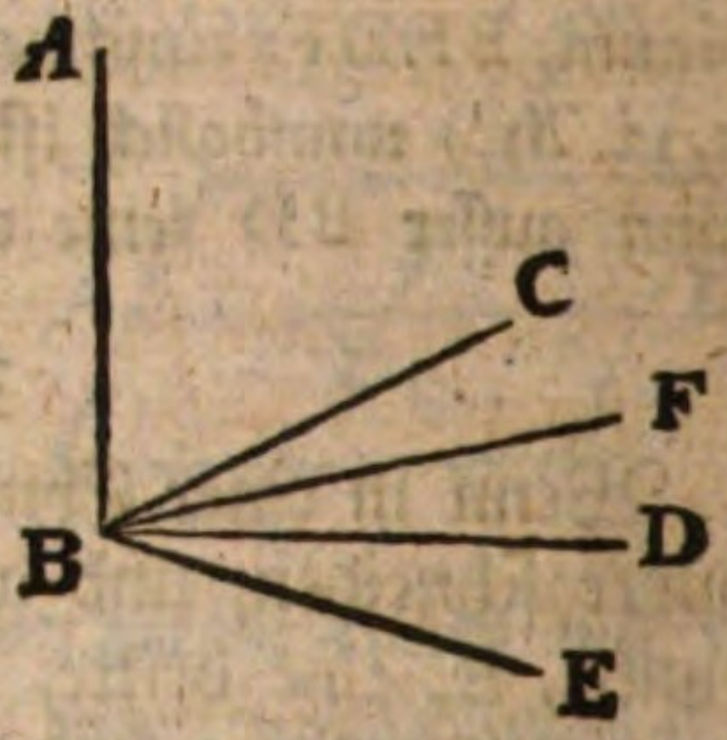
In den Triangeln, FEA, FEB, ist FE senkrecht, und beyden gemein, auch AE = EB, folglich (1, 4. S.) FA = FB. Und in den Triangeln, FED, FEC, ist aus gleichem Grunde FD = FC. Nun war auch AD = BC. Folglich ist (1, 8. S.) FAD = FBC. Nun war FA = FB, und AG = BH. Folglich ist (1, 4. S.) FG = FH. Nun ist FE den Triangeln, FGE, EFH, gemein und nach Obigen GE = EH. Folglich ist (1, 8. S.) FEG = FEH, folglich (1, 10. Def.) EF auf GEH senkrecht.

Eben so wird gezeigt, daß EF auf jeder Linie senkrecht, die wie GEH in der Ebne durch E gezogen wird. Folglich ist (11, 3. Def.) EF auf dieser Ebne senkrecht.

Der

Der 5. Satz.

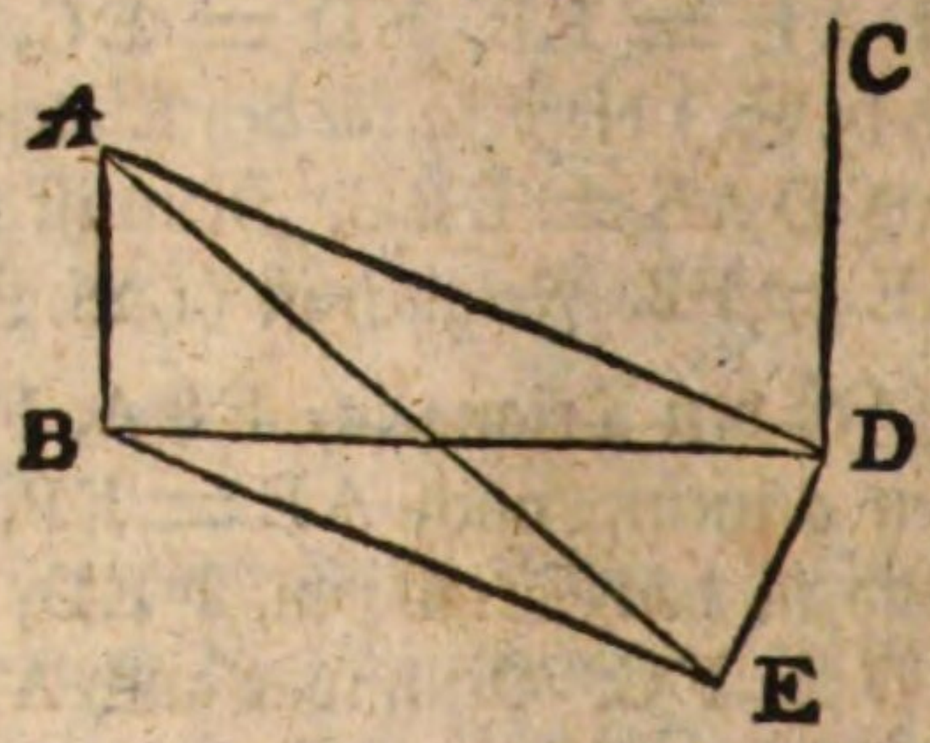
Drey einander berührende gerade Linien, BC, BD, BE, auf denen eine vierte, BA, in ihrem Berührungspunkte, B, senkrecht ist, liegen in Einer Ebne.



Wäre dies nicht, so sey, wenns möglich, BE, BD, in einer Ebne, und BC über derselben. Verlängert man nun die Ebne, die durch AB, BC, kann gelegt werden, so schneidet sie (11, 3. S.) die untre in irgend einer geraden Linie, etwa BF. Demnach wären BE, BD, BF, in der untern, und BA, BC, BF, in der aufstehenden Ebne. Nun ist AB senkrecht auf BE, BD; folglich (11, 4. S.) auch auf BF, und daher ABF ein rechter Winkel. Nun war auch ABC ein rechter Winkel. Folglich wär ABC = ABF, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Der 6. Satz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, welche auf Einer Ebne senkrecht stehen, sind parallel.



Es werde die Ebne von den Linien, AB, CD, in den Punkten, B, D, getroffen. Ziehe BD, und auf ihr in derselben Ebne die DE senkrecht. Mache DE = AB, und ziehe BE, AE, AD.

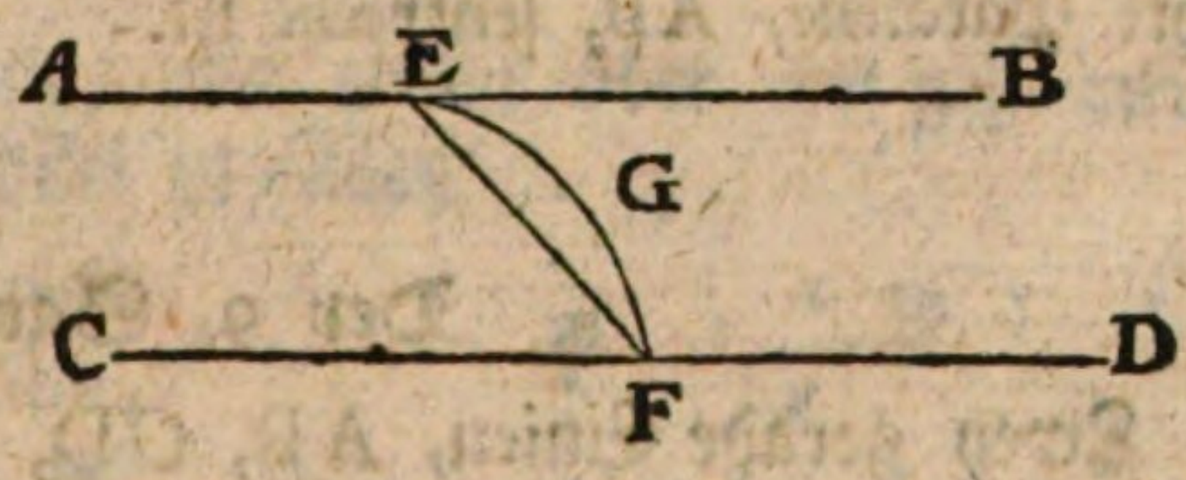
Da CD auf der Ebne senkrecht, so ist sie es (11. 3. Def.) auch auf DB, DE. Aus gleichem Grunde ist auch AB auf BD, BE, senkrecht. Demnach sind in den Triangeln, ABD, DEB, bey B und D rechte Winkel, auch ist AB = DE und BD gemein. Folglich ist (1, 4. S.) AD = BE. Nun ist AB = DE, und AE gemein. Folglich ist (1, 8. S.) ABE = EDA. Nun ist ABE = R. Folglich ist auch EDA = R,

das

das ist, ED auf DA senkrecht. Nun war ED auch auf DB, DC, senkrecht. Folglich sind (11, 5. S.) DB, DC, DA, in Einer Ebne, in welcher (11, 2. S.) auch AB ist. Nun sind ABD, CDB, rechte Winkel. Folglich (1, 28. S.) AB, CD, parallel.

Der 7. Satz.

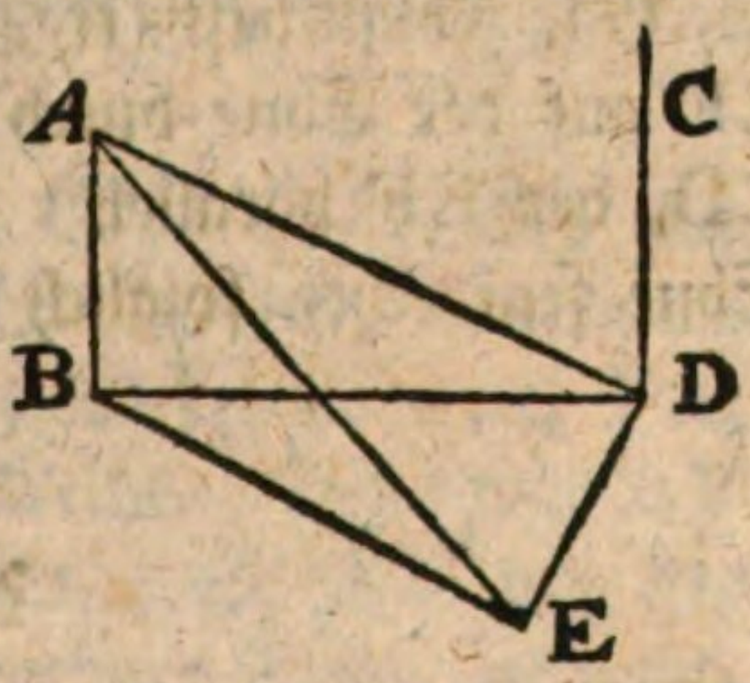
Wenn zwey gerade Linien, AB, CD, parallel sind, und auf jeder willkührlich ein Punkt, E, F, angenommen wird: so liegt die gerade Linie, EF, womit man diese Punkte verbindet, mit den Parallelen in Einer Ebne.



Wäre dies nicht, so sey sie über solcher Ebne, wie die EGF. Durch diese lege eine Ebne, von welcher die untre Ebne (11, 3. S.) in einer geraden Linie, EF, geschnitten wird. Demnach würden zwey gerade Linien, EGF, EF, einen Raum einschliessen, welches (1, 12. Ax.) unmöglich.

Der 8. Satz.

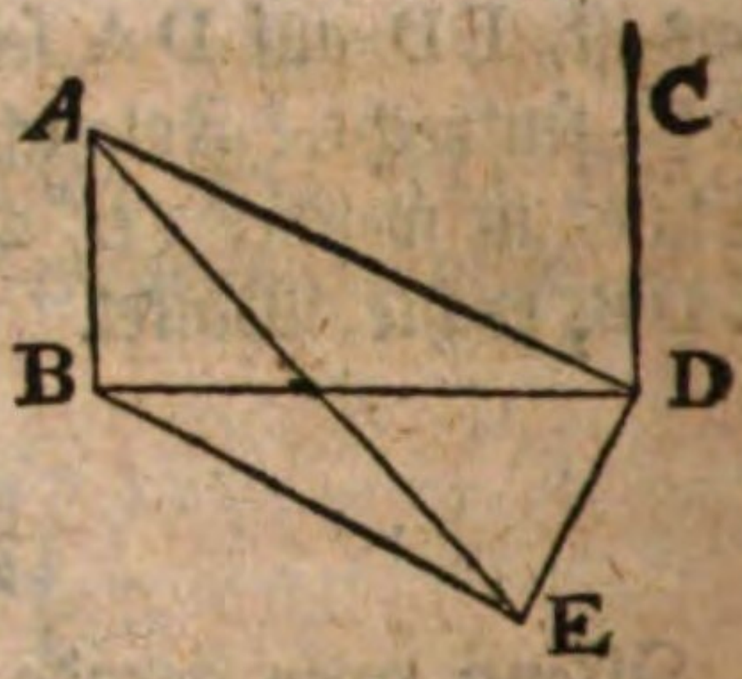
Wenn zwey gerade Linien, AB, CD, parallel sind, und die eine, AB, auf einer Ebne senkrecht ist: so ist auch die andre, CD, auf dieser Ebne senkrecht.



Es werde die Ebne von den Parallelen in B, D, getroffen. Ziehe BD, und auf ihr in der untern Ebne die DE senkrecht. Mache DE = AB, und ziehe BE, AE, AD, so ist (11, 7. S.) BD mit AB, CD, in Einer Ebne, in welcher (11, 2. S.) auch AD ist.

Da AB auf der untern Ebne senkrecht, so sind (11, 3. Def.) ABD, ABE, rechte Winkel. Nun sind AB, CD, parallel, und daher (1, 29. S.) ABD + BDC = 2 R. Folglich ist BDC ein rechter Winkel.

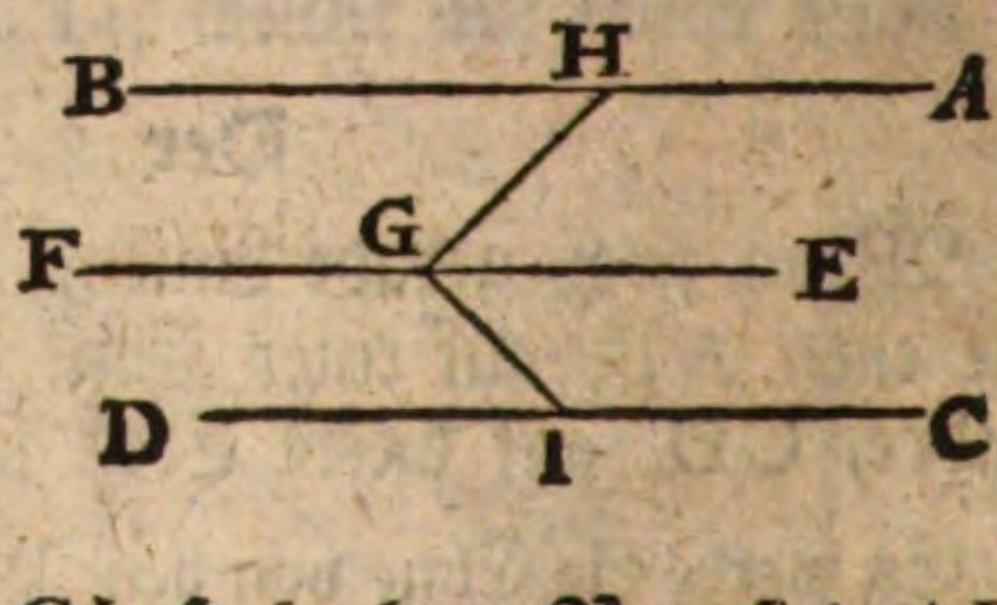
In



In den Triangeln, ABD, DEB, sind bey B und D rechte Winkel, AB = DE, und BD gemein, folglich (1, 4. S.) AD = BE. Nun ist DE = AB, und AE gemein. Folglich ist (1, 8. S.) der rechte Winkel ABE = EDA. Demnach ist (11, 4. S.) ED auf der Ebne durch DB, DA, senkrecht, folglich (11, 3. Def.) auch auf der in dieser Ebne befindlichen DC. Demnach ist EDC ein rechter Winkel. Nun war auch BDC ein rechter Winkel. Folglich ist (11, 4. S.) CD auf der Ebne durch BD, DE, senkrecht, auf welcher auch ihre Parallele, AB, senkrecht ist.

Der 9. Satz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, welche einer dritten in einer andern Ebne liegenden, EF, parallel, sind einander selbst parallel.



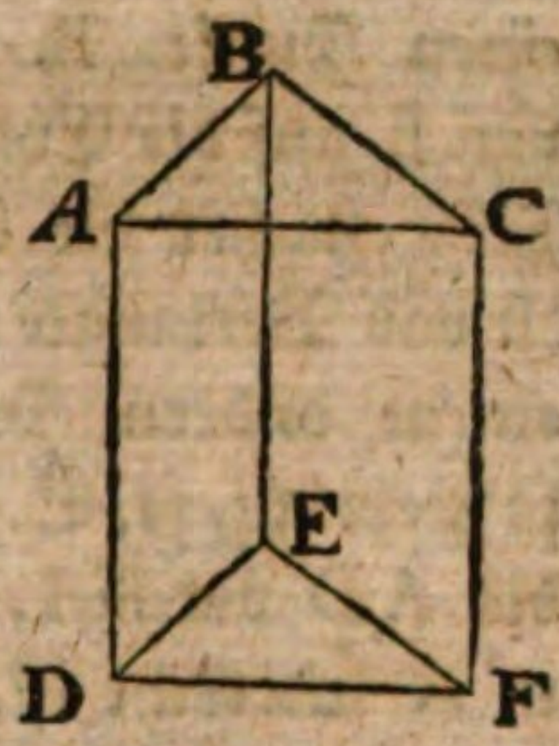
Auf EF nimm willkührlich einen Punkt, G. In G errichte auf EF, in der Ebne durch FE, BA, den Perpendikel, GH; und in der Ebne durch FE, DC, den Perpendikel, GI. Folglich ist (11, 4. S.) EF auf der Ebne durch GH, GI, senkrecht. Nun sind AB, CD, der EF parallel. Folglich sind AB, CD, auch auf dieser Ebne senkrecht, folglich (11, 6. S.) parallel.

Der 10. Satz.

Wenn zwey zusammentreffende gerade Linien, AB, BC, zweyen andern ebenfals, jedoch in einer andern Ebne, zusammentreffenden, DE, EF, parallel sind: so werden von diesen Linien gleiche Winkel, ABC, DEF, eingeschlossen.

Nache

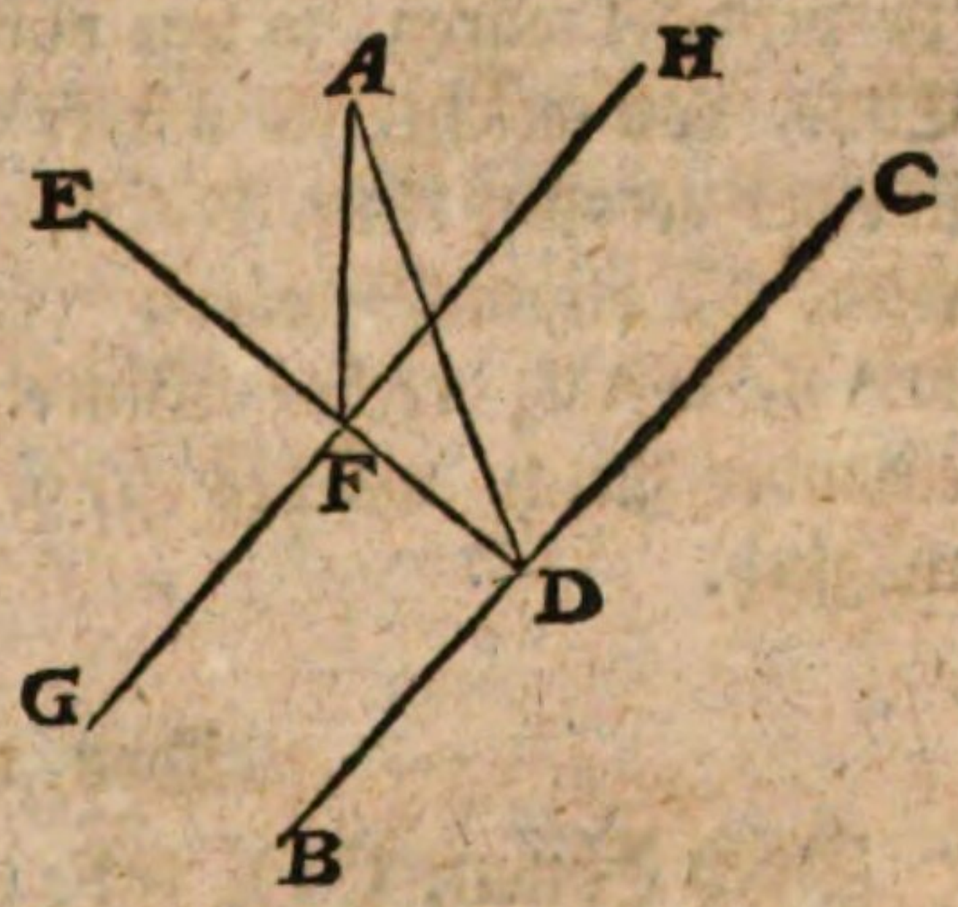
Mache AB = DE, BC = EF. Ziehe AD, CF, BE, AC, DF. Da AB der DE gleich und parallel, so ist (1, 33. S.) auch AD der BE gleich und parallel. Aus eben dem Grunde ist CF der BE gleich und parallel. Folglich sind (11, 9. S.) AD, CF, gleich und parallel, folglich (1, 33. S.) auch AC, DF. Demnach sind in den Triangeln, ABC, DEF, drey Seiten dreyen Seiten gleich. Folglich ist (1, 8. S.) ABC = DEF.



Der 11. Satz.

Auf eine gegebne Ebne, von einem über ihr gegebnen Punkte, A, einen Perpendikel zu fällen.

In der gegebnen Ebne ziehe willkührlich eine gerade Linie, BC, und fälle (1, 12. S.) auf dieselbe von A, den Perpendikel, AD, welcher auf der gegebnen Ebne entweder senkrecht ist, oder nicht. Ist das erste, so hat man das Verlangte; ist aber das letzte, so errichte in der gegebnen Ebne (1, 11. S.) auf BC, in D, den Perpendikel DE.

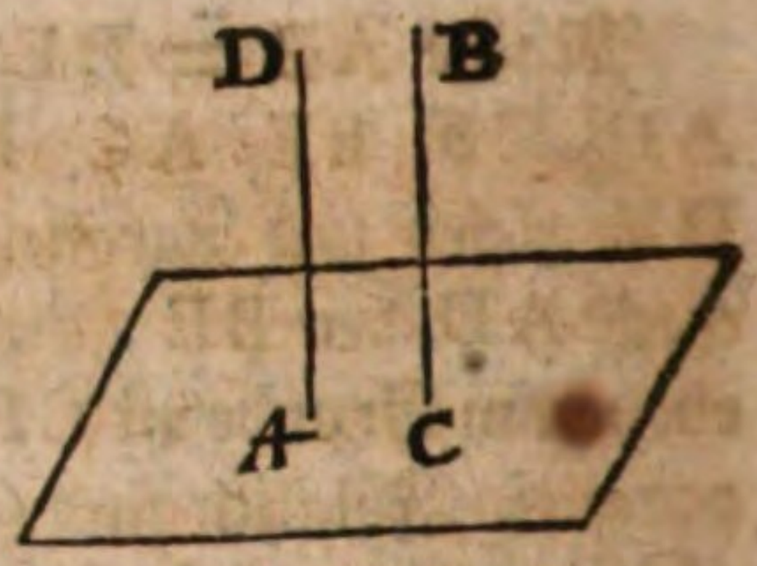


Ziehe (1, 12. S.) von A auf DE die AF senkrecht, und (1, 31. S.) durch F der BC die GH parallel.

Da BC auf DA, DE, senkrecht, so ist sie (11, 4. S.) und daher auch (11, 8. S.) ihre Parallele, GH, auf der Ebne durch DA, DE, senkrecht. Folglich ist (11, 3. Def.) GH auf FA, oder, welches einerley, AF auf GH, senkrecht. Nun war AF auch auf DE senkrecht. Folglich ist (11, 4. S. AF auf der Ebne durch GH, DE, das ist, auf der gegebnen Ebne, senkrecht.

Der 12. Satz.

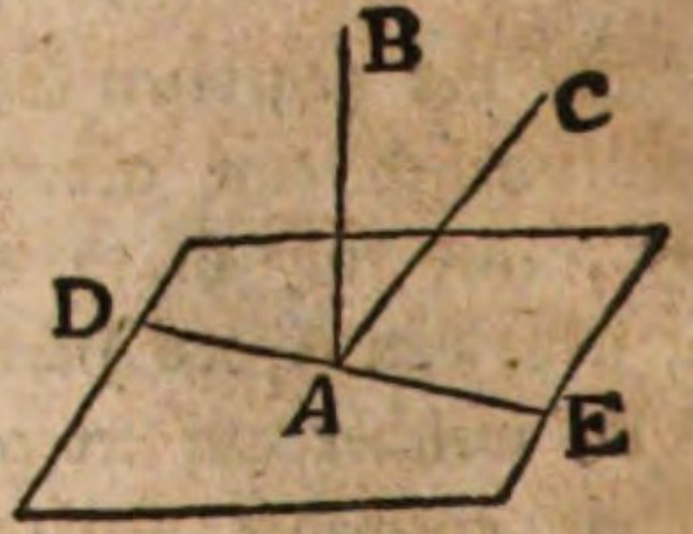
Auf einer gegebnen Ebne, in einem auf ihr gegebnen Punkte, A, einen Perpendikel aufzurichten.



Ueber der Ebne nimm willkührlich einen Punkt, B. Fälle (11, 11. S.) von B auf die Ebne einen Perpendikel. Trift solcher die Ebne in A, so hast du das Verlangte; trift er sie aber in einem andern Punkte, C, wie BC, so ziehe (1, 31. S.) durch A der BC, die AD parallel, welche (11, 8. S.) auf der gegebnen Ebne in A senkrecht ist.

Der 13. Satz.

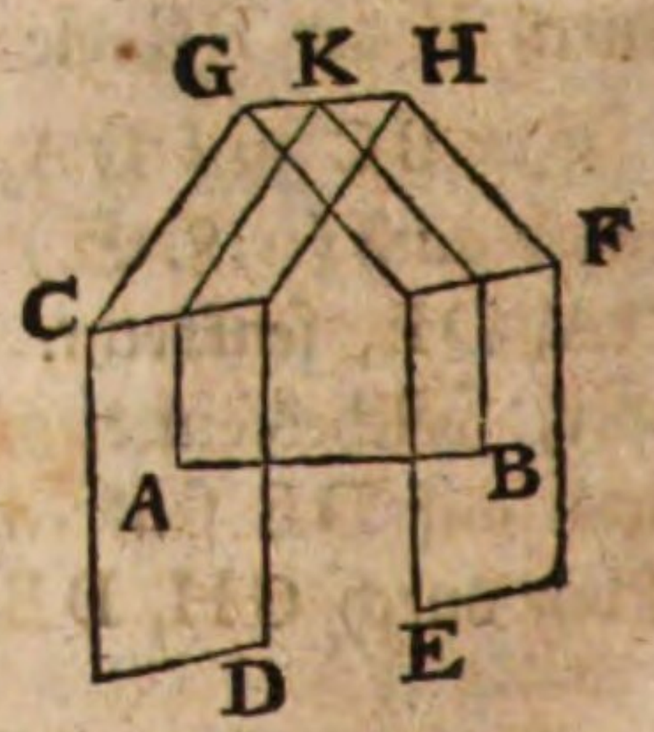
Auf einer Ebne können nicht zwey Perpendikel in Einem Punkte, A, aufgerichtet werden.



Wär es möglich, daß AB, AC, solche Perpendikel wären, so lege durch sie eine Ebne, von welcher die untere (11, 3. S.) in einer geraden Linie, DAE, geschnitten wird. Demnach wären (11, 3. Def.) DAB, DAC, rechte Winkel, folglich einander gleich, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Der 14. Satz.

Zwey Ebnen, CD, EF, auf denen eine gerade Linie, AB, senkrecht ist, sind parallel.

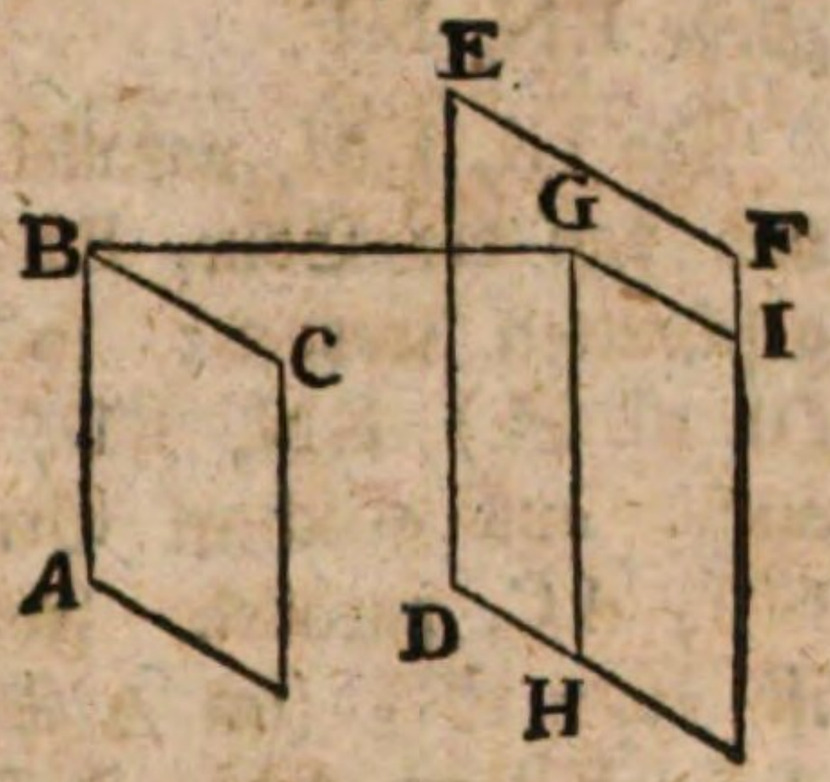


Wären sie nicht parallel, so träfen sie verlängert zusammen, und schnitten einander (11, 3. S.) in einer geraden Linie, GH. In dieser nimm willkührlich einen Punkt, K, und ziehe in der verlängerten, CD, die gerade Linie, KA, und in der verlängerten, EF, die gerade Linie, KB. Da AB auf beyden Ebnen senkrecht, so ist sie es (11, 3. Def.) auch auf AK, BK. Demnach wären im △ AKB, zwey rechte Winkel bey A und B, welches (1, 17. S.) unmöglich.

Der

Der 15. Satz.

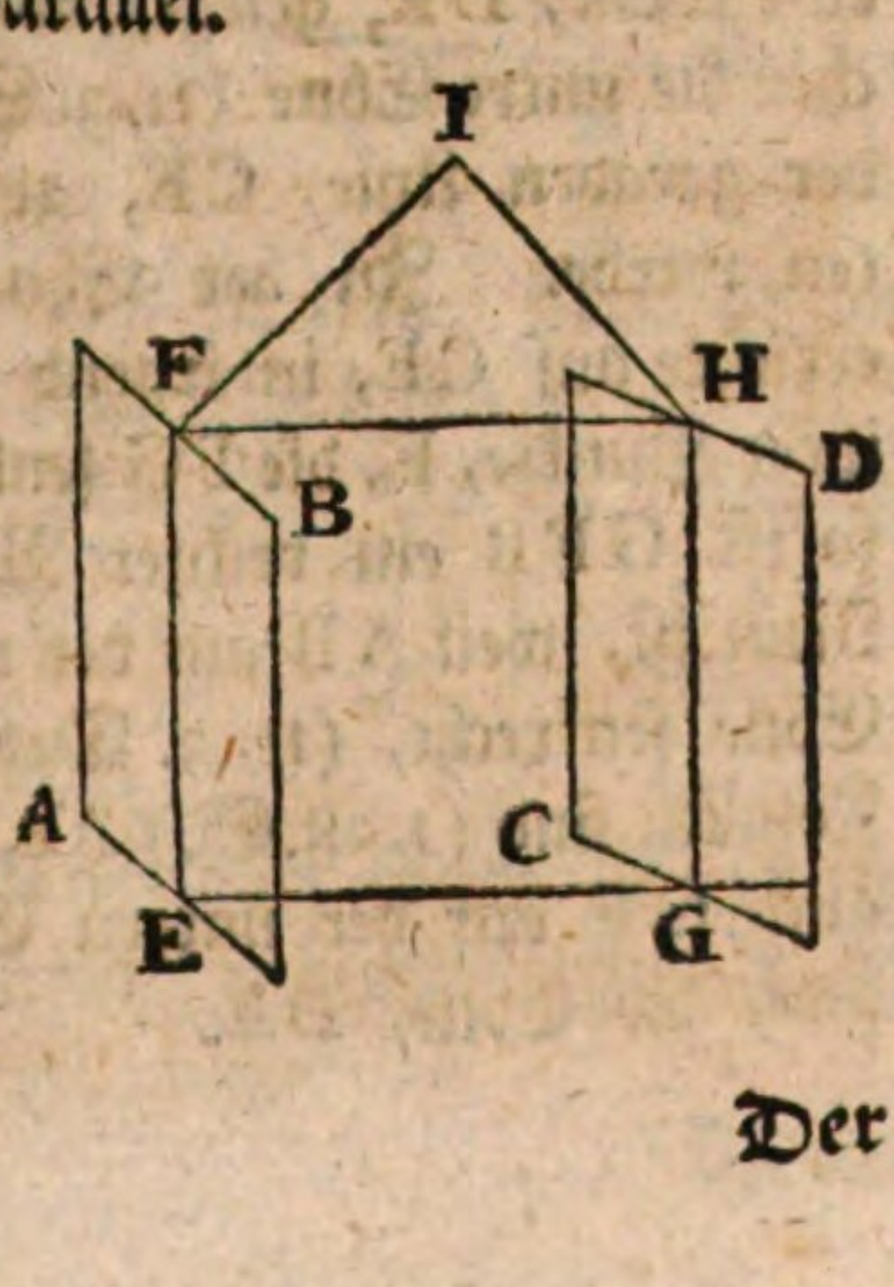
Wenn zwey in einer Ebne zusammentreffende gerade Linien, AB, BC, zweyen in einer andern Ebne zusammentreffenden geraden Linien, DE, EF, parallel sind: so sind die beyden Ebnen auch parallel.



Es sey durch AB, BC, die Ebne, AC, und durch DE, EF, die Ebne, DF, gelegt. Von B fälle (11, 11. S.) auf die Ebne, DF, den Perpendikel, BG, und ziehe (1, 31. S.) in der Ebne, DF, durch G, der DE die GH, und der EF die GI, parallel. Da AB, GH, welche der DE parallel, (11, 9. S.) einander selbst parallel sind: so ist (11, 7. S.) BG mit ihnen in Einer Ebne. Nun ist (11, 3. Def.) BGH ein rechter Winkel. Folglich ist (1, 29. S.) auch GBA ein rechter Winkel. Nun ist eben so erweislich, daß GBC ein rechter Winkel. Folglich ist (11, 4. S.) GB auf der Ebne AC senkrecht. Nun war GB auch auf der Ebne DF senkrecht. Folglich sind (11, 14. S.) die Ebnen, AC, DF, parallel.

Der 16. Satz.

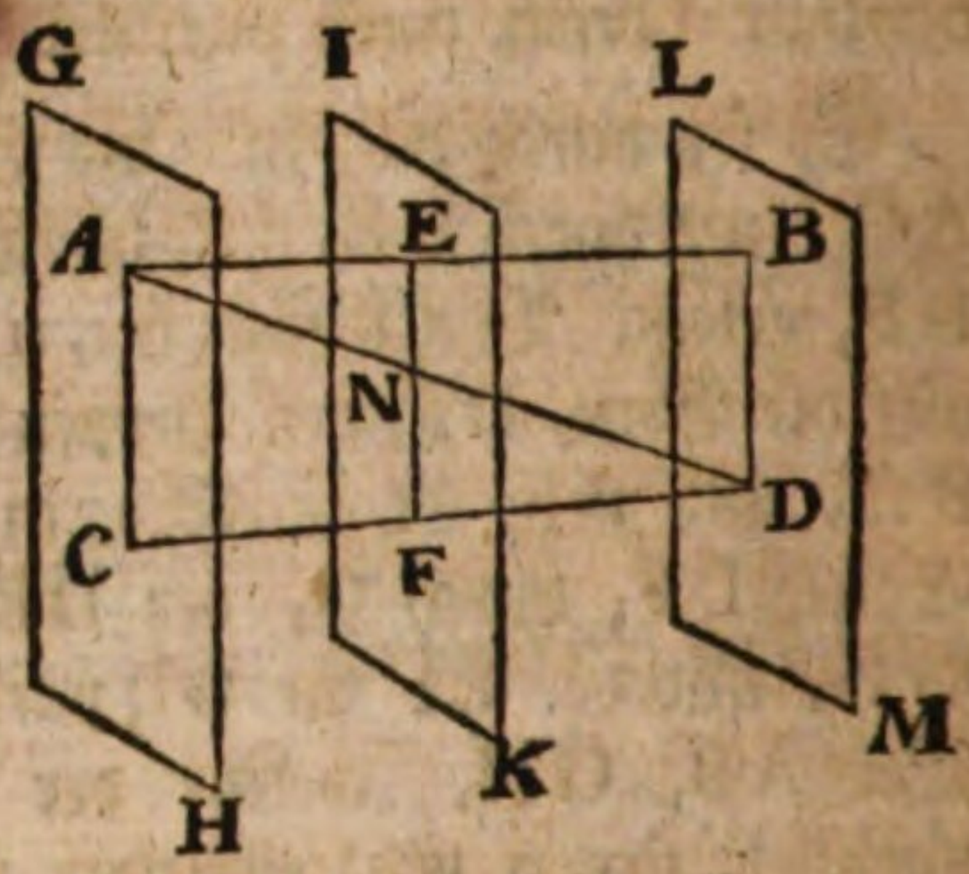
Wenn zwey Ebnen, AB, CD, parallel sind, und von einer dritten, EFHG, geschnitten werden: so sind die Durchschnittslinien, EF, GH, parallel.



Wären EF, GH, nicht parallel, so träfen sie an irgend einer Seite zusammen, etwa in I. Folglich wäre (11, 1. S.) die gerade Linie EFI in der Ebne AB, und die gerade Linie GHI in der Ebne CD; folglich der Punkt I sowohl in der Ebne AB, als in der Ebne CD. Demnach träfen die parallelen Ebnen, AB und CD, zusammen, welches (11. 8. Def.) unmöglich.

Der 17. Satz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, werden von Parallelebnen, GH, IK, LM, nach einerley Verhältniß geschnitten.

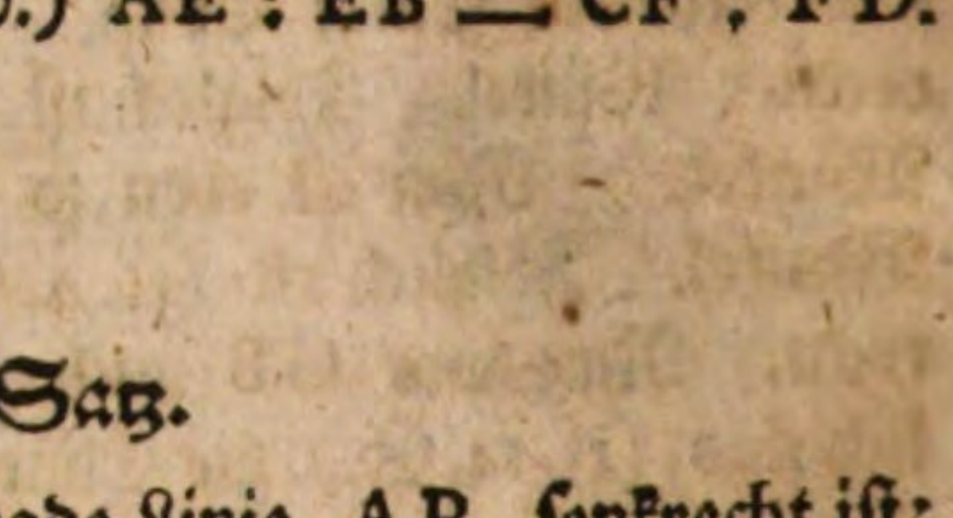


Ziehe CA, BD, DA, welche letztre durch IK in N gehet. Ziehe EN, NF.

Da IK, LM, parallel sind, und von der Ebne, EBDN, geschnitten werden: so sind (11, 16. S.) EN, BD, aber auch, aus gleichem Grunde, NF, AC, parallel. Folglich ist (6, 2. S.) (im △ ADB) AE : EB = AN : ND, und (im △ DAC) CF : FD = AN : ND. Folglich ist (5, 11. S.) AE : EB = CF : FD.

Der 18. Satz.

Wenn auf einer Ebne eine gerade Linie, AB, senkrecht ist: so sind alle Ebnen, welche man durch diese gerade Linie legt, auf solcher Ebne auch senkrecht.



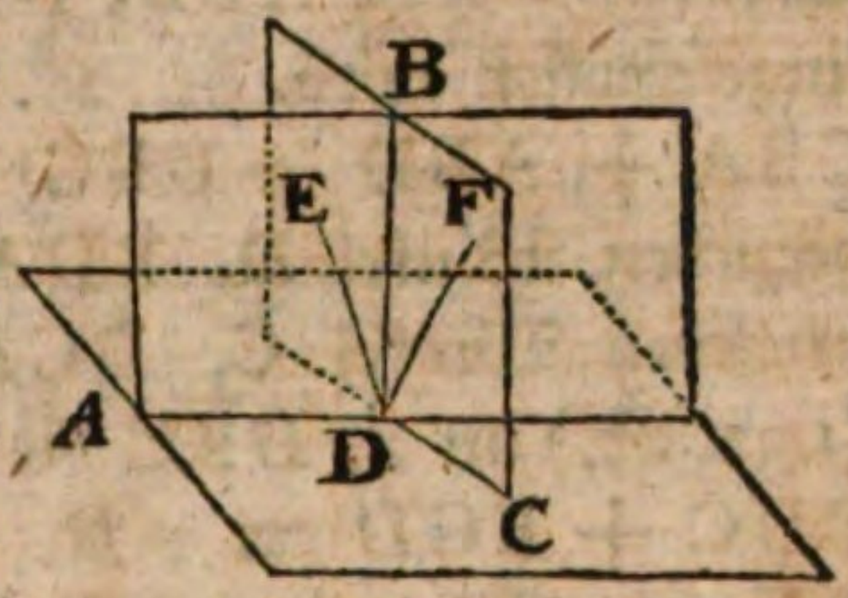
Es sey durch AB willkührlich eine Ebne, DE, gelegt, von welcher die untre Ebne (11, 3. S.) in der geraden Linie, CE, geschnitten werde. In der Ebne DE errichte auf CE, in irgend einem ihrer Punkte, F, die FG senkrecht, so ist GFB ein rechter Winkel. Nun ist, weil AB auf der untern Ebne senkrecht, (11, 3. Def.) auch ABF ein rechter Winkel. Folglich sind (1, 28. S.) AB, GF, parallel. Folglich ist (11, 8. S.) auch GF auf der untern Ebne senkrecht, folglich (11, 4. Def.) auch die Ebne, DE.

Der

Der 19. Satz.

Wenn auf einer Ebne zwey einander schneidende Ebnen, AB, BC, senkrecht sind: so ist deren Durchschnittslinie, BD, auf solcher Ebne auch senkrecht.

Wäre BD nicht senkrecht auf der Ebne, folglich auch nicht auf den Durchschnittslinien, AD, DC, so errichte in D auf AD in der Ebne AB, den Perpendikel DE, und auf DC in der Ebne BC, den Perpendikel DF. Nun sind AB, BC, auf der untern Ebne senkrecht. Folglich wären (11, 4. Def.) auch DE, DF, auf solcher Ebne senkrecht, in Einem Punkte, D, welches (11, 13. S.) unmöglich.

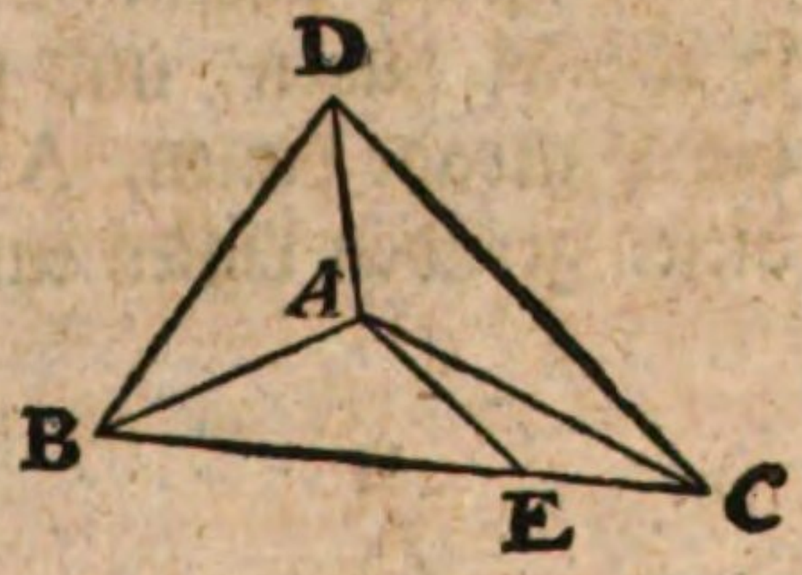


Der 20. Satz.

Wird ein körperlicher Winkel, A, von drey ebnen Winkeln, BAC, CAD, DAB, begrenzt: so sind jegliche zwey derselben zusammen grösser, als der dritte.

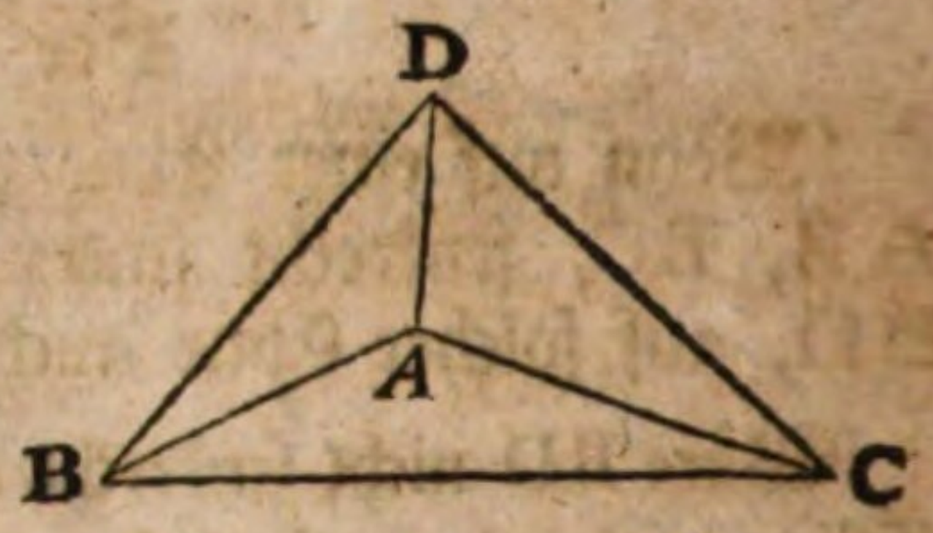
Sind diese drey ebnen Winkel einander gleich, so ist der Satz für sich klar; sind sie aber ungleich, so sey etwa BAC grösser, und nun zu beweisen, daß BAD + DAC > BAC.

Mache (1, 23. S.) BAE = BAD, desgleichen AE = AD, und ziehe BEC, CD, DB: so ist in den Triangeln, DAB, BAE, (1, 4. S.) DB = BE. Nun ist im △ DBC, (1, 20. S.) BD + DC > BC. Folglich ist (1, 5. Ax.) DC > EC, folglich (1, 25. S.) DAC > CAE, folglich (1, 4. Ax.) BAD + DAC > BAC.



Der 21. Satz.

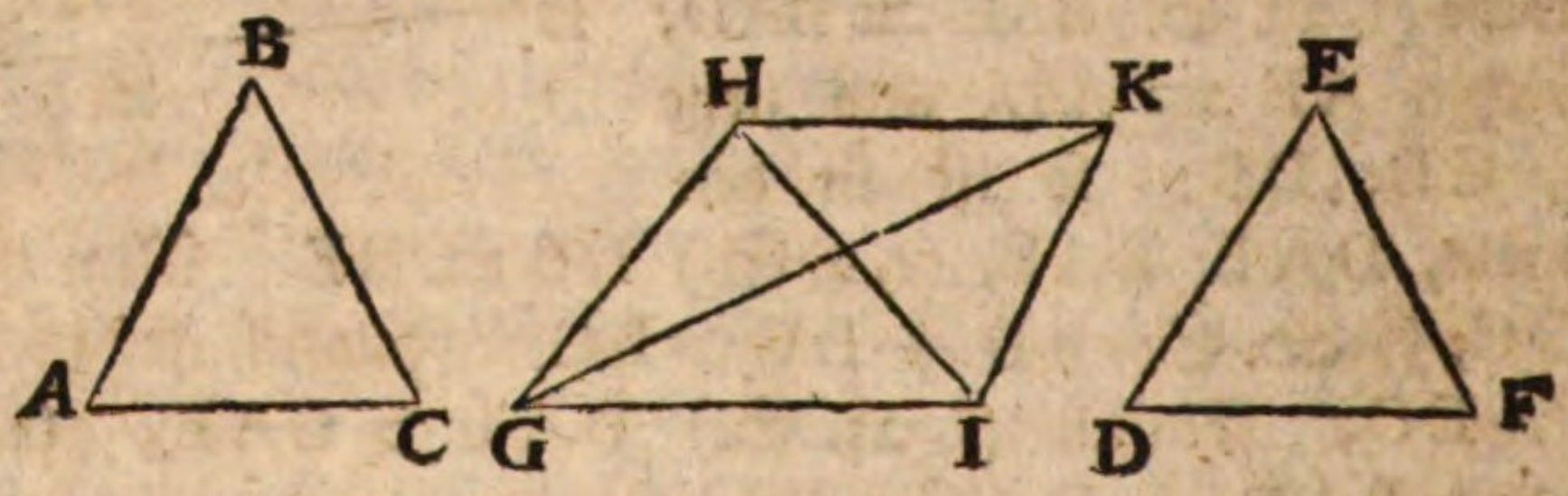
Jeder körperliche Winkel, A, wird von ebnen Winkeln BAC, CAD, DAB, begrenzt, welche zusammen kleiner als vier rechte sind.



Nimm auf AB, AC, AD, willkührliche Punkte, B, C, D, und ziehe BC, CD, DB: so ist beym körperlichen Winkel B, welcher von den drey ebnen Winkeln, CBA, ABD, DBC, eingeschlossen wird, (11, 20. S.) CBA + ABD > DBC. Aus gleichem Grunde ist beym körperlichen Winkel D, BDA + ADC > BDC, und beym körperlichen Winkel C, DCA + ACB > BCD. Nun sind (1. 32. S.) im △ DBC die drey letztgenannten Winkel, DBC + BDC + BCD = 2 R. Folglich sind die sechs erstgenannten Winkel, CBA + ABD + BDA + ADC + DCA + ACB > 2 R. Diese aber sind (1, 32. S.) nebst den drey Winkeln, BAC, CAD, DAB, zusammen sechs rechten gleich. Folglich sind diese drey Winkel, BAC + CAD + DAB < 4. R.

Der 22. Satz.

Wenn drey ebne Winkel, ABC, DEF, GHI, davon jegliche zwey zusammen grösser als der dritte, lauter gleiche Schenkel haben, und man die Endpunkte solcher Schenkel durch gerade Linien, AC, DF, GI, verbindet: so kann aus diesen geraden Linien ein Triangel gemacht werden.



Dieses kann (1, 22. S.) geschehen, wenn von diesen drey geraden Linien jegliche zwey zusammen grösser als die dritte sind. Sind nun die drey ebnen Winkel, ABC, DEF, GHI, einander gleich, so sind (1, 4. S.) auch die Linien, AC, DF, GI, einander gleich; folglich offenbar zwey davon grösser als die dritte.

Sind

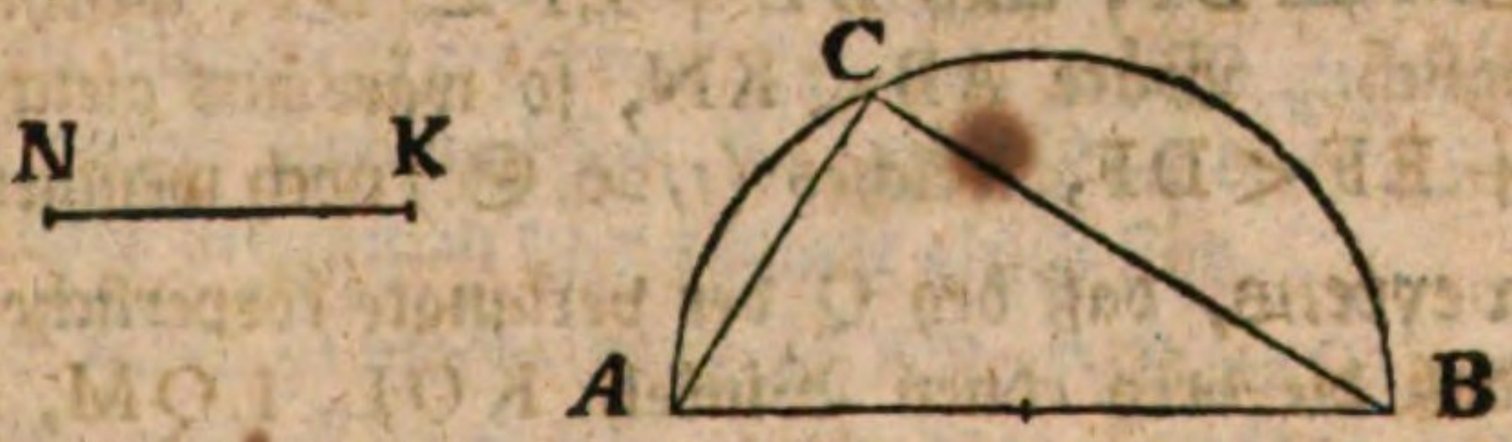
Sind aber gedachte ebne Winkel ungleich, so nimm zwey davon, welche du wilst, etwa ABC, GHI. Mache (1, 23. S.) IHK = ABC, auch HK = HG, und ziehe GK, IK: so ist in den Triangeln ABC, IHK, (1, 4. S.) AC = IK. Nun ist, weil GHI + ABC, das ist GHK, > DEF, (1, 24. S.) GK, und daher (1, 20. S.) noch vielmehr GI + IK, > DF. Nun war IK = AC. Folglich ist GI + AC > DF.

Eben so wird bewiesen, daß AC + DF > GI, und GI + DF > AC. Demnach sind von den drey Linien, AC, DF, GI, jegliche zwey zusammen grösser als die dritte.

Der 23. Satz.

Aus drey ebnen Winkeln, ABC, DEF, GHI, die zusammen kleiner als vier rechte, und deren jegliche zwey zusammen grösser als der dritte sind, einen körperlichen Winkel zu machen.

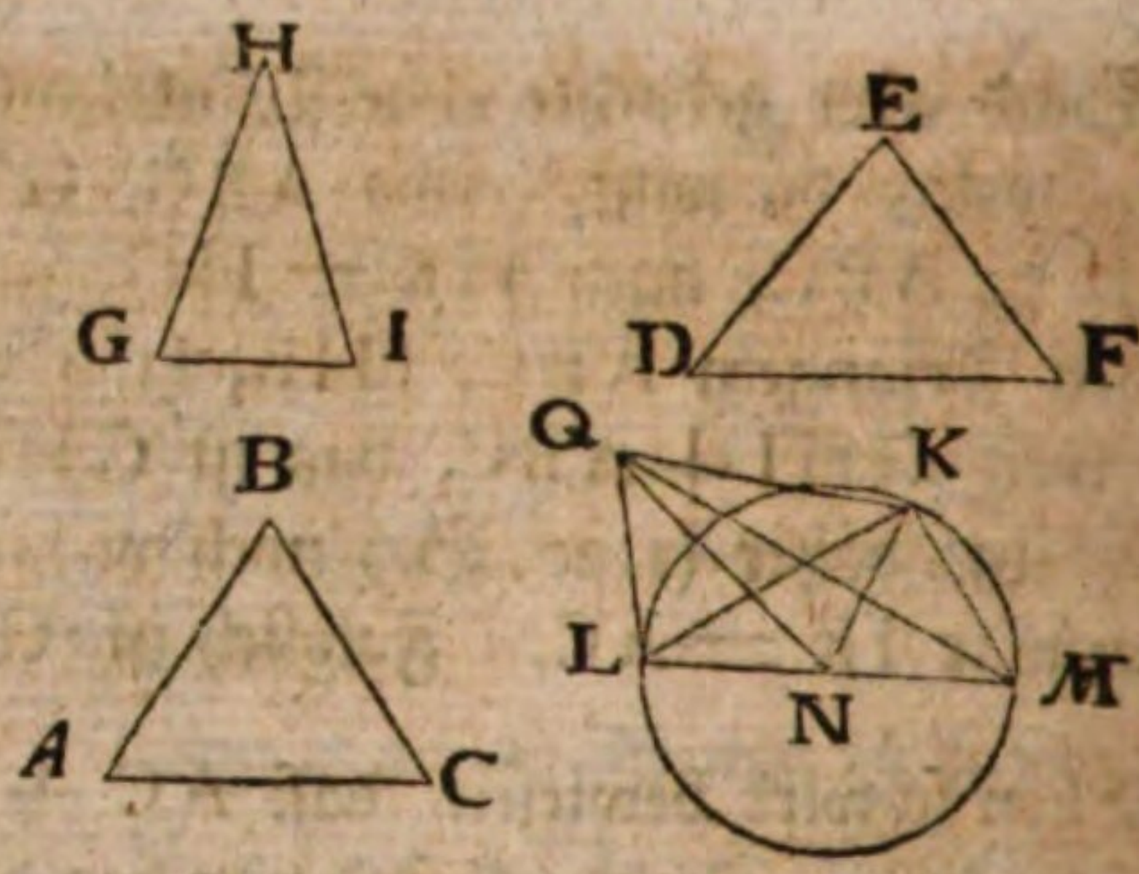
Lehnsatz. Es sind zwey gerade Linien, AB, KN, davon eine AB grösser als die andre KN, gegeben: man soll eine dritte, NQ, so groß machen, daß □ AB = □ KN + □ NQ sey.



Beschreibe auf AB einen halben Cirkel, trage darein AC = KN, und ziehe CB. Da (3, 31. S.) ACB ein rechter Winkel, so ist (1, 45. S.) □ AB = □ AC + □ CB. Macht man nun NQ = CB, so ist, weil auch KN = AC, □ AB = □ KN + □ NQ.

Mache die Schenkel der drey gegebnen Winkel, ABC, DEF, GHI, alle einander gleich, und ziehe AC, DF, GI, aus denen

(11, 22. S.) ein Triangel kann gemacht werden. Mache daraus den △ KLM, so daß AC = KL, DF = LM, GI = MK. Beschreibe (4, 5. S.) um den △ KLM, den Cirkel KLM, so ist dessen Mittelpunkt, N, entweder innerhalb des Triangels, oder auf einer seiner Seiten, oder ausserhalb des Triangels.



Erster Fall.

Es sey des Cirkels Mittelpunkt, N, auf des Triangels Seite, LM. Ziehe KN, so ist AB > KN. Errichte (11, 12. S.) auf der Cirkelebne in N die gerade Linie NQ senkrecht. Mache (vorsteh. Lehnsatz) NQ so groß, daß □ AB = □ KN + □ NQ, und ziehe QK, QL, QM: so ist bey Q der verlangte körperliche Winkel. Hier ist zu beweisen

Erstlich, daß AB > KN, oder daß AB weder eben so groß, noch kleiner sey als KN. Denn wäre AB = KN, so wäre, weil AB = BC, und KN = LN = NM, auch AB + BC = LM; folglich wäre, weil AB = BC = DE = EF, und LM = DF, auch DE + EF = DF, welches (1, 20. S.) unmöglich. Wäre AB < KN, so wäre aus gleichen Gründen DE + EF < DF, welches (1, 20. S.) noch weniger möglich.

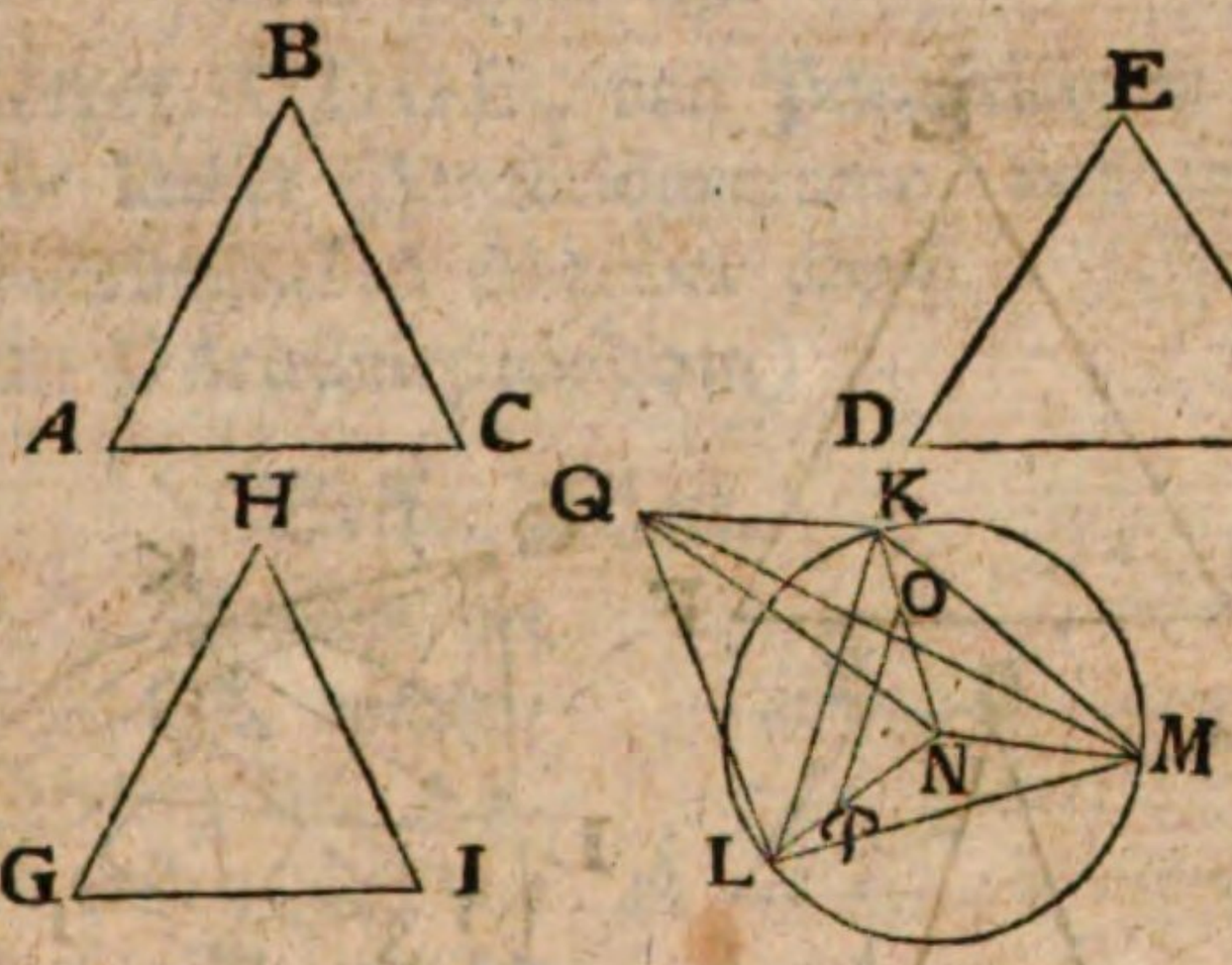
Zweytens, daß bey Q der verlangte körperliche Winkel sey, oder daß die drey ebnen Winkel, KQL, LQM, MQK, von denen der körperliche Winkel, Q, begrenzt wird, den gegebenen, ABC, DEF, GHI, gleich seyen.

Da QN senkrecht auf der Cirkelebne, folglich (11, 3. Def.) auch auf den Linien, NK, NL, NM, das ist, auf den Halbmessern des Cirkels, so ist in den Triangeln, QNL, QNK, (1, 4. S.) QL = QK, und in den Triangeln, QNL, QNM, auch (1, 4. S.) QL = QM, folglich auch QM = QK, demnach QK = QL = QM. Nun ist, weil QNK ein rechter Winkel, (1, 47. S.) □ QK = □ KN + □ NQ, aber auch

nach

nach Obigen □ AB = □ KN + □ NQ. Folglich ist □ AB = □ QK, und daher AB = QK. Demnach sind die Schenkel der gegebnen Winkel, und die drey Linien, welche den körperlichen Winkel Q einschliessen, alle einander gleich. Nun ist auch AC = KL, DF = LM, GI = MK. Folglich ist (1, 8. S.) ABC = KQL, DEF = LQM, GHI = MQK.

Zweyter Fall.



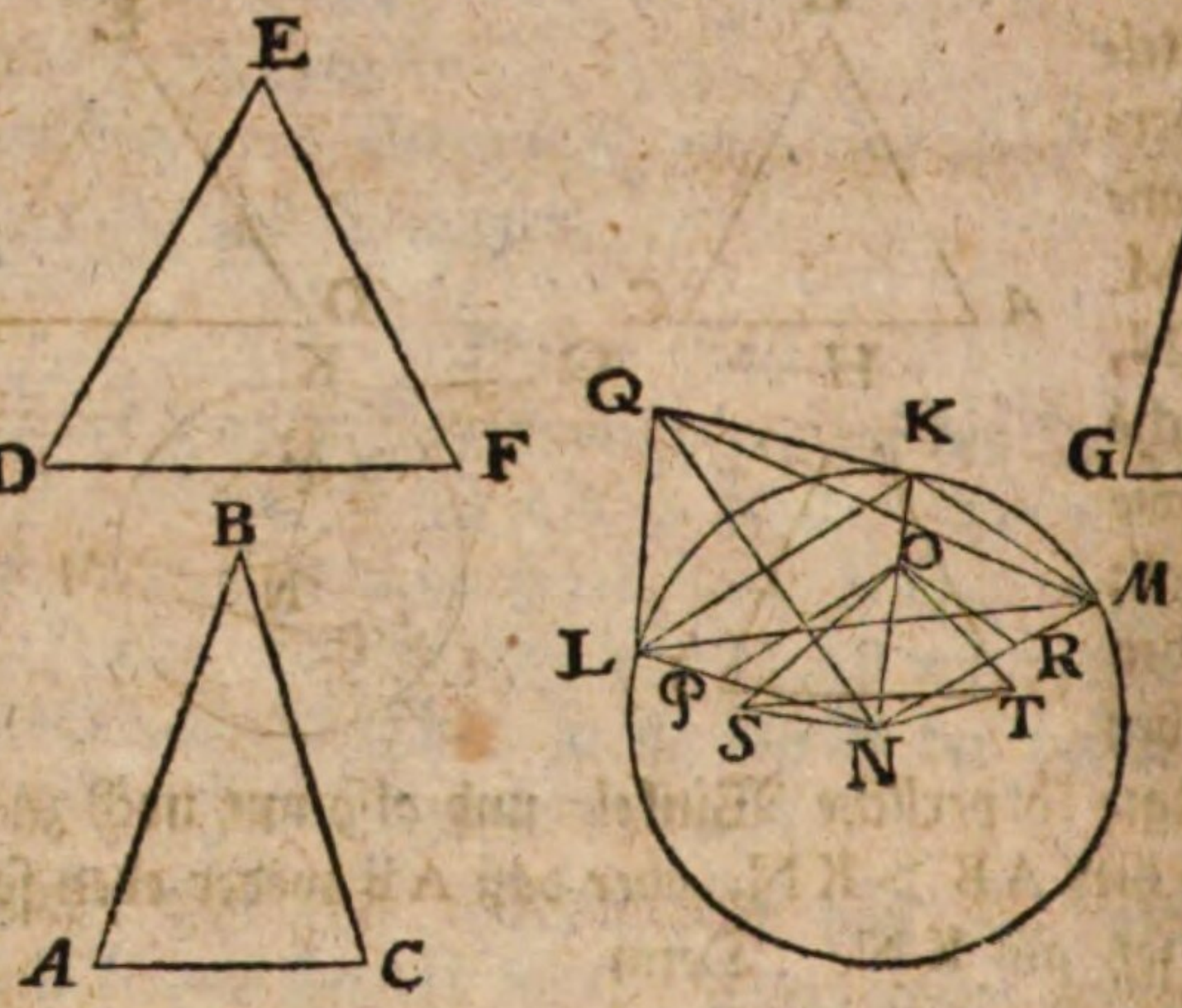
Es sey des Cirkels Mittelpunkt, N, innerhalb des Triangels, KLM. Ziehe KN, LN, MN, und mache das übrige, wie beym ersten Fall: so ist aus eben den Gründen bey Q der verlangte körperliche Winkel, und also nur noch zu beweisen, daß auch hier AB > KN, oder daß AB weder eben so groß, noch kleiner sey als KN. Denn

Wäre AB = KN, so wäre auch BC = NL. Nun ist auch AC = KL. Folglich wäre (1, 8. S.) ABC = KNL. Eben so wird bewiesen, daß DEF = LNM, und GHI = MNK. Demnach wären die drey gegebnen Winkel, welche zusammen kleiner als vier rechte seyn müssen, so groß als die drey Winkel bey N, welche doch zusammen vier rechten gleich sind.

Wäre AB < KN, so mache NO = AB, NP = BC, und ziehe OP, so ist, weil AB = BC, auch NO = NP. Nun ist NK = NL. Folglich ist OK = PL, folglich (6, 2. S.) LK, OP, parallel, und (6, 4. S.) NK : NO = KL : OP. Nun ist NK > NO, folglich ist (5, 14. S.) auch KL, das ist AC, > OP. Demnach ist in den Triangeln ABC, ONP, deren Schenkel gleich, die Basis aber AC > OP, (1, 24. S.) ABC > ONP. Eben so wird bewiesen, daß DEF > LNM, und GHI > MNK. Demnach wären die drey gegebnen Winkel, welche zusammen kleiner als vier rechte seyn müssen, grösser als die drey Winkel bey N, welche doch zusammen vier rechten gleich sind.

Dritter Fall.

Es sey des Cirkels Mittelpunkt, N, ausserhalb des Triangels, KLM. Ziehe KN, LN, MN, und mache das übrige, wie beym ersten Fall, so ist aus vorigen Gründen bey Q der verlangte körperliche Winkel, und nur noch zu beweisen, daß auch hier AB > KN, oder daß AB weder eben so groß, noch kleiner sey als KN. Denn



Wäre AB = KN, so wäre BC = LN. Nun ist auch AC = KL. Folglich wäre (1, 8. S.) ABC = LNK. Eben so wird bewiesen, daß GHI = KNM, und DEF = LNM. Demnach wäre ABC + GHI = LNK + KNM = LNM = DEF, da doch von den gegebnen Winkeln jegliche zwey, ABC, GHI, zusammen grösser als der dritte, DEF, seyn müssen.

Wäre AB < KN, so mache der AB die Linien, NO, NP, NR, gleich, und ziehe PO, OR. Demnach sind, wie beym zweyten Falle, PO, LK, und OR, KM, parallel, folglich (1, 29. S.) POR = LKM. Auch ist, wie beym zweyten Falle, ABC > ONP, und GHI > ONR. Mache daher ONS = ABC, und ONT = GHI, folglich SNT = ABC + GHI. Mache endlich der AB, die NS, NT, gleich, und ziehe TO, OS, ST. Demnach ist (1, 4. S.) OS = AC = KL, und OT = GI = KM. Nun ist POR,

oder

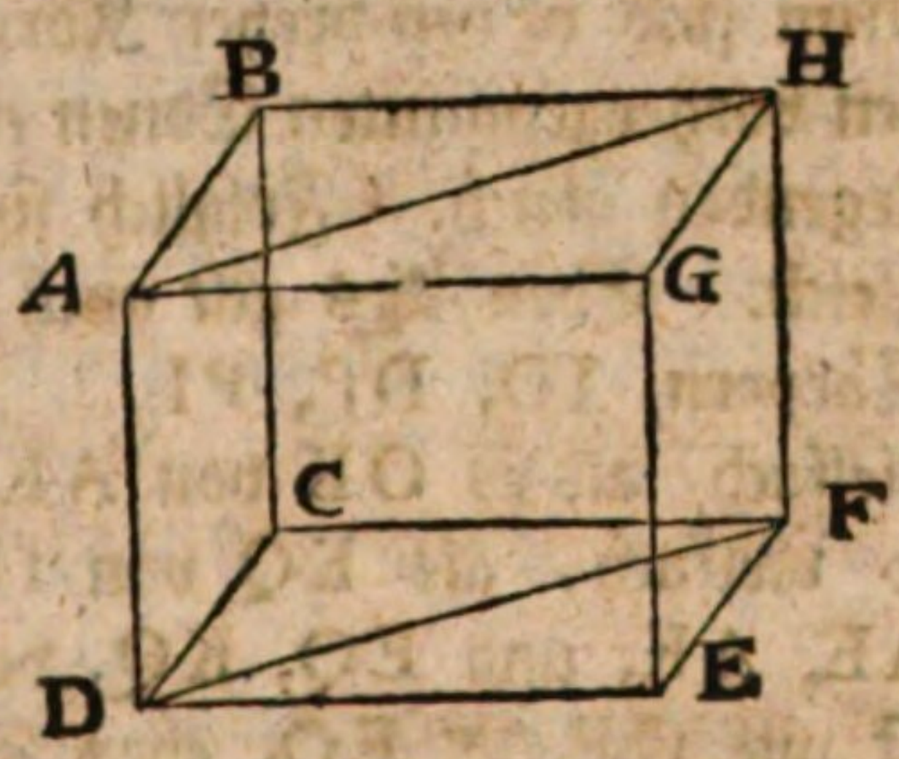
oder LKM, > SOT. Folglich ist (1, 25. S.) LM, das ist DF, > ST. Nun ist NS, und NT, der AB, und daher auch der DE, und EF, gleich. Folalich ist (1, 25. S.) DEF > SNT, das ist, DEF > ABC + GHI, welches gegen das angenommene ABC + GHI > DEF.

Der 24. Satz.

Wenn ein Körper, CDGH, von Parallelebnen begrenzt ist: so sind solche lauter Parallelogramme, und immer die einander gegenüberliegenden einander gleich. (Ein solcher Körper heisse ein Parallelepipedon.)

Erster Theil.

Die Ebne, AC, schneidet die Parallelebnen, BG, CE, desgleichen die Parallelebnen, BF, AE. Folglich sind im ersten Fall die Durchschnitte, AB, CD, und im zweyten die Durchschnitte, AD, BC, parallel, und daher AC ein Parallelogramm. Eben dies gilt auch von allen übrigen Ebnen.



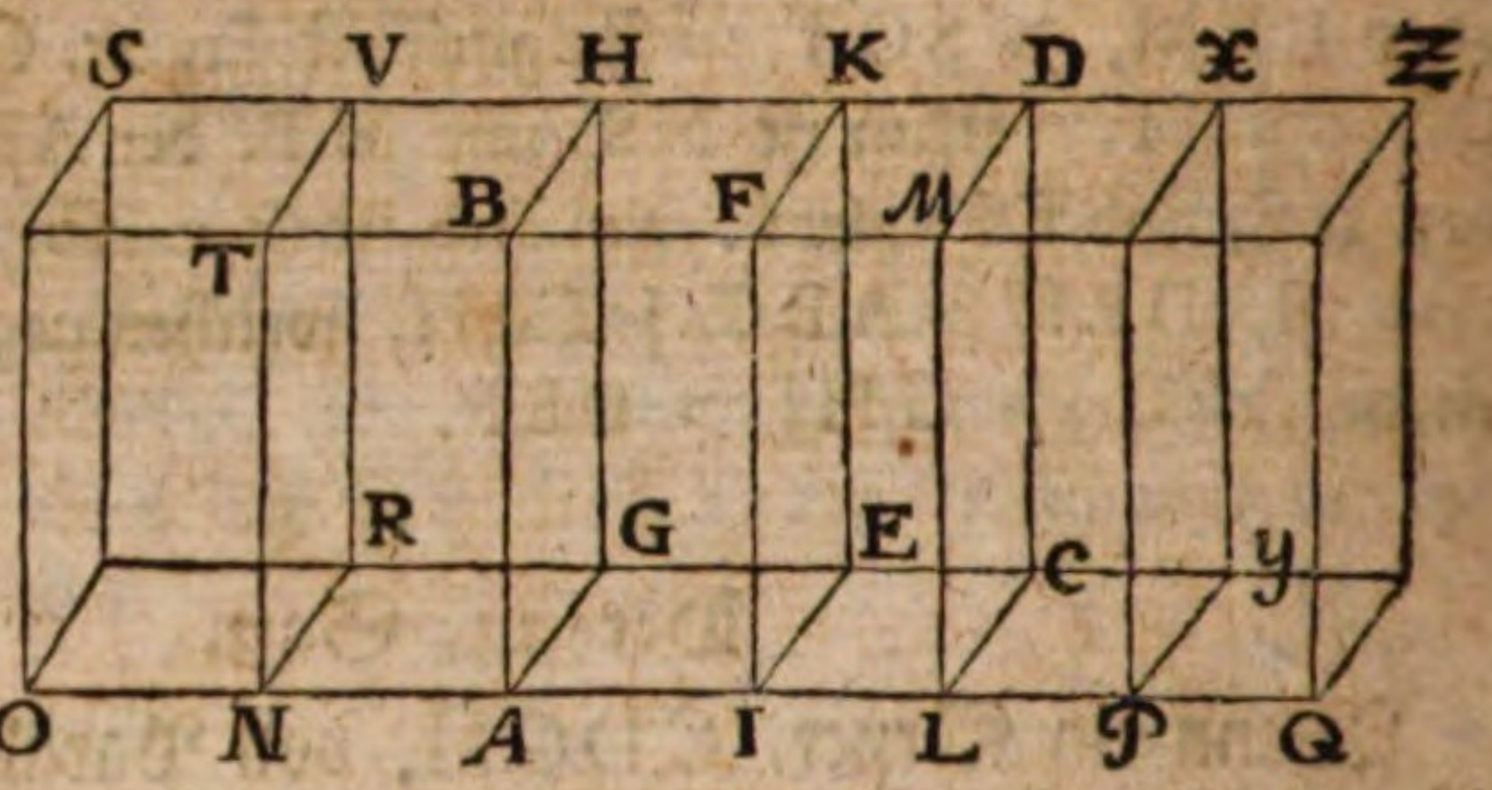
Zweyter Theil.

Ziehe in zweyen einander gegenüberliegenden Ebnen, BG, CE, die Diagonalen, AH, DF, so ist (1, 34. S.) BG = 2 △ ABH, und CE = 2 △ DCF. Nun sind (1, 34. S.) AB, CD, desgleichen BH, CF, gleich und parallel, und daher (11, 10. S.) ABH = DCF, demnach (1, 4. S.) △ ABH = △ DCF. Folglich ist (1, 6. Ax.) BG = CE. Eben dies gilt auch von allen übrigen einander gegenüberliegenden Ebnen.

Der 25. Satz.

Wenn ein Parallelepipedon, ABCD, von einer Ebne, EF, den einander gegenüberliegenden Ebnen, AH, DL, parallel geschnitten wird: so verhalten sich die daher entstehenden Körper, AK, ID, wie ihre Grundflächen, AE, IC.

Verlängre AL an beyden Seiten, und mache der IL die LP, PQ, und der IA die AN, NO, gleich. Vollende die Parallelogramme, AR, RO; CP, YQ, desgleichen die Körper, NH, OV, LX, PZ.

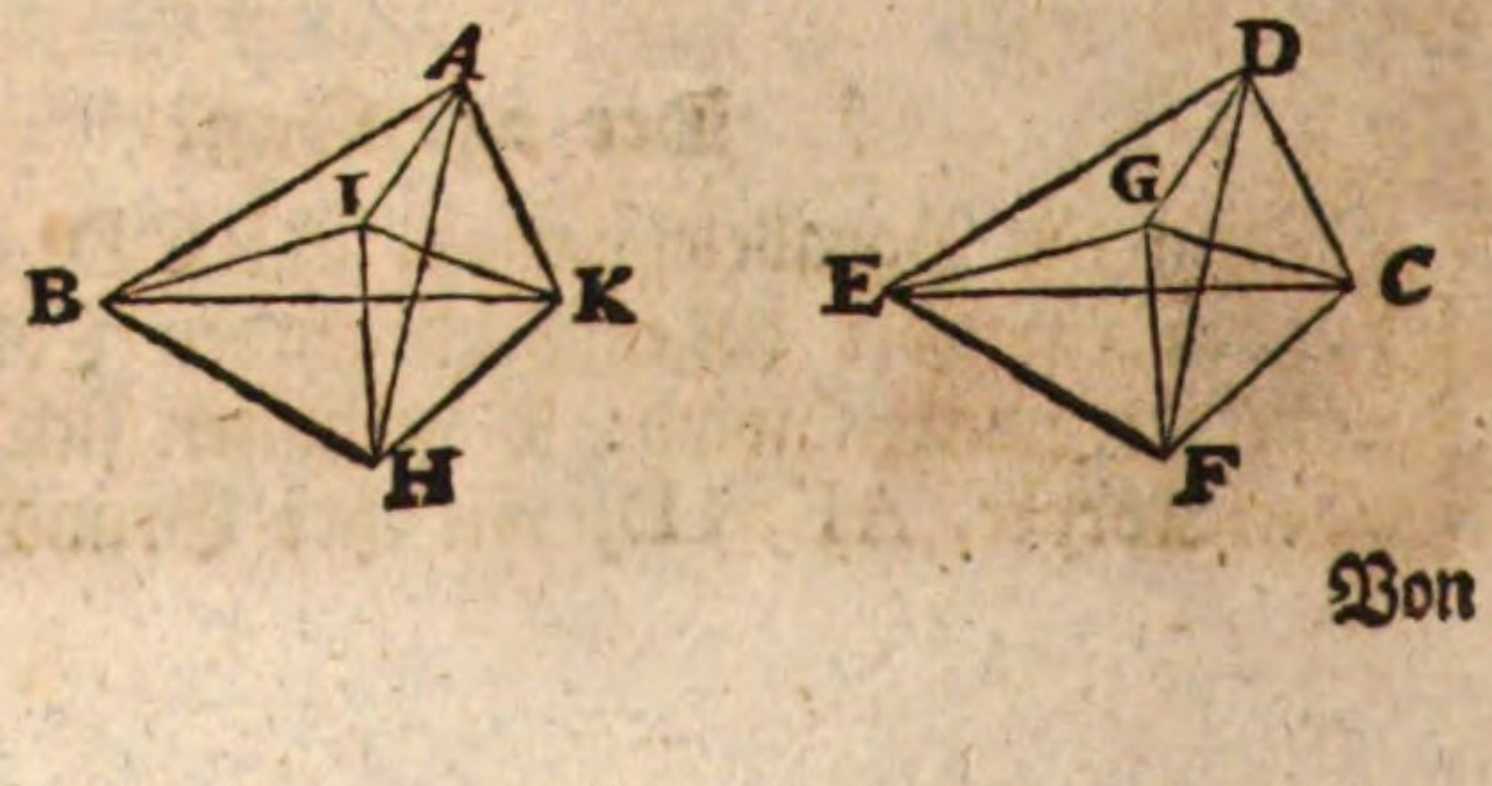


Da IA = AN = NO, so ist (1, 36. S.) EA = AR = RO, und EH = HR = RS, aber auch (11, 24. S.) AH = NV = OS. Nun sind in den dreyen Körpern, KA, AV, VO, (11, 24. S.) den vorhergenannten Ebnen eines jeden, die denselben gegenüberliegenden gleich. Folglich sind (11, 10. Def.) diese drey Körper gleich. Eben dies gilt auch an der andern Seite von den drey Körpern, ID, DP, PI. Folglich ist OE von AE eben so vielfach, als es OK von AK ist; desgleichen EQ von IC eben so vielfach, als KQ von ID, das ist, OE, OK, sind von AE, AK, und EQ, KQ, von IC, ID, gleichvielfach. Nun ist wie $OE \geq EQ$, eben so auch $OK \geq KQ$. Folglich ist (5, 5. Def.) AE : IC = AK : ID.

Der 26. Satz.

An eine gegebene gerade Linie, AB, an einen ihrer Punkte, A, einen körperlichen Winkel, der einem gegebnen, D, gleich sey, zu stellen.

Es sey der gegebne körperliche Winkel, D, von den ebnen Winkeln, CDE, EDF, FDC, begrenzt.



Von

Von einem in DF willkührlich angenommenen Punkte, F, fälle auf die Ebne durch CD, DE, den Perpendikel, FG, und ziehe DG. Mache (1, 23. S.) BAK = EDC, und BAI = EDG, so ist (1, 10. Ax.) KAI = CDG. Mache AI = DG, und errichte (11, 12. S.) auf der Ebne durch KA, AB, in I die IH senkrecht. Mache IH = GF, und ziehe AH, so ist der körperliche Winkel A, der von den ebnen Winkeln KAB, BAH, HAK, begrenzt wird, dem gegebnen, D, gleich.

Mache AB = DE, AK = DC, und ziehe BI, IK, KB, BH, HK, desgleichen EG, GC, CE, EF, FC; so sind FG, HI, weil sie senkrecht auf den Ebnen, (11, 3. Def.) auch senkrecht auf den Linien, die in solchen Ebnen aus G und I gezogen sind.

Da in den Triangeln, BAI, EDG, die Winkel bey A und D, und die einschliessenden Seiten gleich sind, so ist (1, 4. S.) BI = EG. Nun ist auch IH = GF, und bey I und G rechte Winkel. Folglich ist (1, 4. S.) BH = EF. Nun ist auch in den Triangeln AIH, DGF, weil bey I und G rechte Winkel, und die einschliessenden Seiten gleich, (1, 4. S.) AH = DF; auch war AB = DE. Folglich ist (1, 8. S.) BAH = EDF.

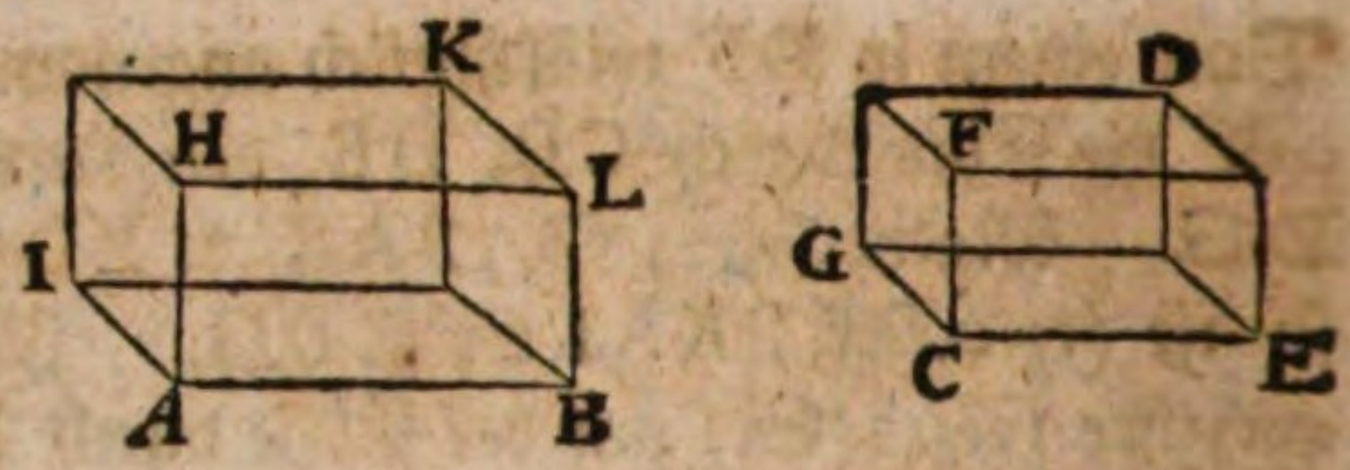
Da in den Triangeln, AIK, DGC, die Winkel bey A und D, und die einschliessenden Seiten gleich sind: so ist (1, 4. S.) IK = GC. Nun ist auch IH = GF, und HIK, FGC, rechte Winkel. Folglich ist (1, 4. S.) HK = FC. Nun war auch AH = DF, und AK = DC. Folglich ist (1, 8. S.) HAK = FDC. Nun war auch BAH = EDF, und KAB = CDE. Folglich ist (11, 10. Def.) der körperliche Winkel bey A, dem bey D gleich.

Der 27. Satz.

Auf einer gegebnen geraden Linie, AB, ein Parallelepipedon zu beschreiben, welches einem gegebnen, CD, ähnlich sey und ähnlich liege.

Stelle

Stelle (11, 26. S.) an AB in A, einen körperlichen Winkel, welcher dem bey C gleich sey, so daß BAH = ECF, BAI = ECG, HAI = FCG.



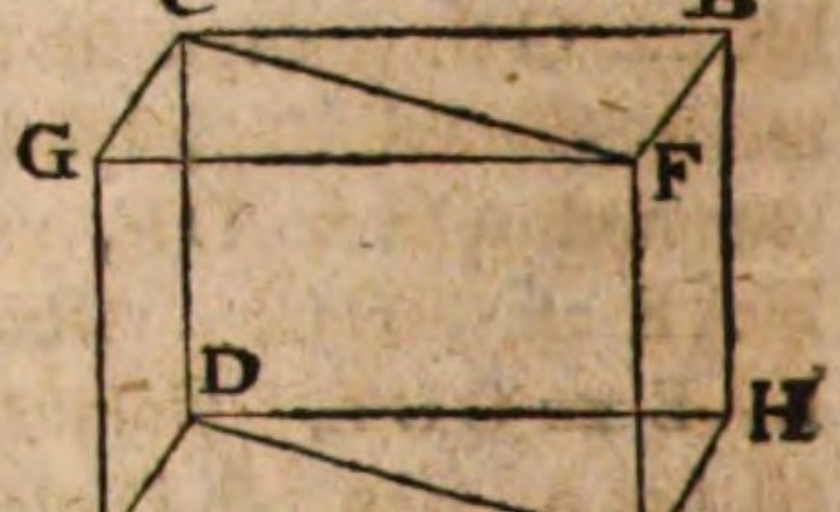
Mache (6, 12. S.) EC : CG = BA : AI, und CG : CF = AI : AH, so ist (5, 22. S.) gleichförmig EC : CF = BA : AH. Vollende das Parallelogramm, BI, und das Parallelepipedon, AK.

Da BAI = ECG, und die einschliessenden Seiten proportionirt, so ist (6, 4. S.) das Parallelogramm BI ∼ EC, und aus gleichem Grunde IH ∼ GF, und HB ∼ FE. Nun sind (11, 24. S.) in den beyden Körpern, AK, CD, den hiergenannten Ebnen eines jeden die ihnen gegenüberliegenden Ebnen gleich und änlich. Folglich ist (11, 10. Def.) AK ∼ CD.

Der 28. Satz.

Wenn ein Parallelepipedon, AB, nach den Diagonalen zweyer einander gegenüberliegenden Ebnen, CF, DE, von einer Ebne, CDEF, geschnitten wird: so wird es von solcher Ebne halbirt.

Da (1, 34. S.) der △ CGF = △ CBF, und △ DAE = △ DHE, desgleichen (11, 24. S.) das Parallelogramm CA = BE, und GE = CH, ferner die Ebne, CDEF, beyden Körpern gemein: so ist (11, 10. Def.) das Prisma FCGAED = FCBHED.

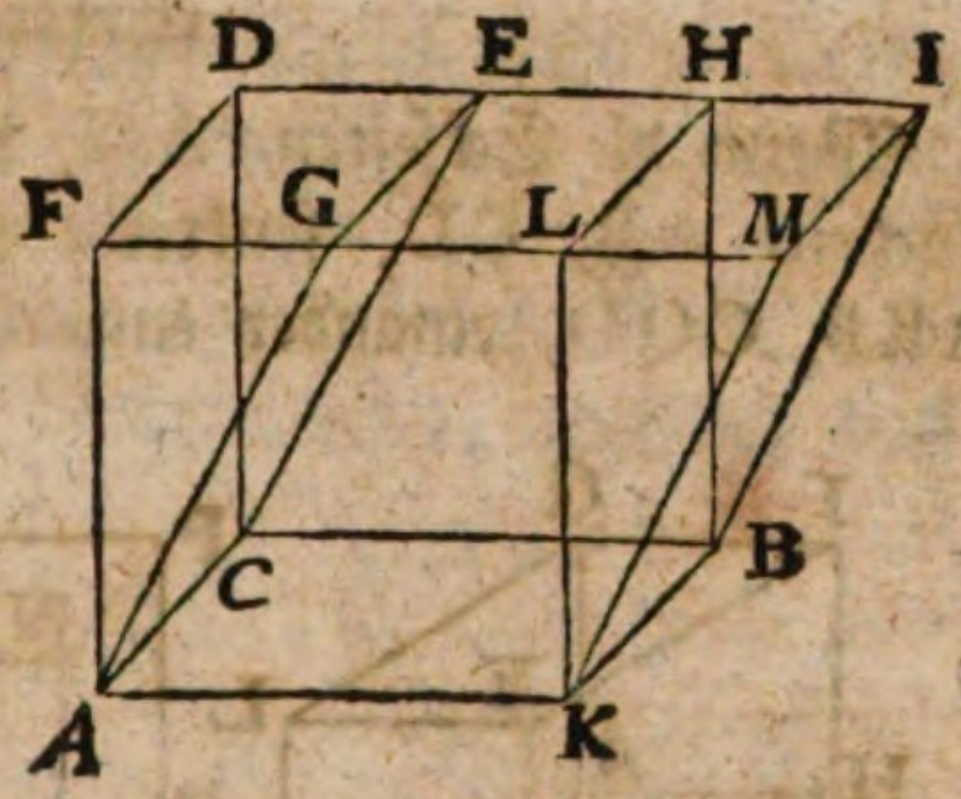


Der 29. Satz.

Parallelepipeda, AH, HI, welche einerley Grundfläche, AB, und einerley Höhe haben, und deren Eckseiten, AF, AG, KL, KM; CD, CE, BH, BI, in einerley geraden Linien, FM, DI, sich enden, sind einander gleich.

Da

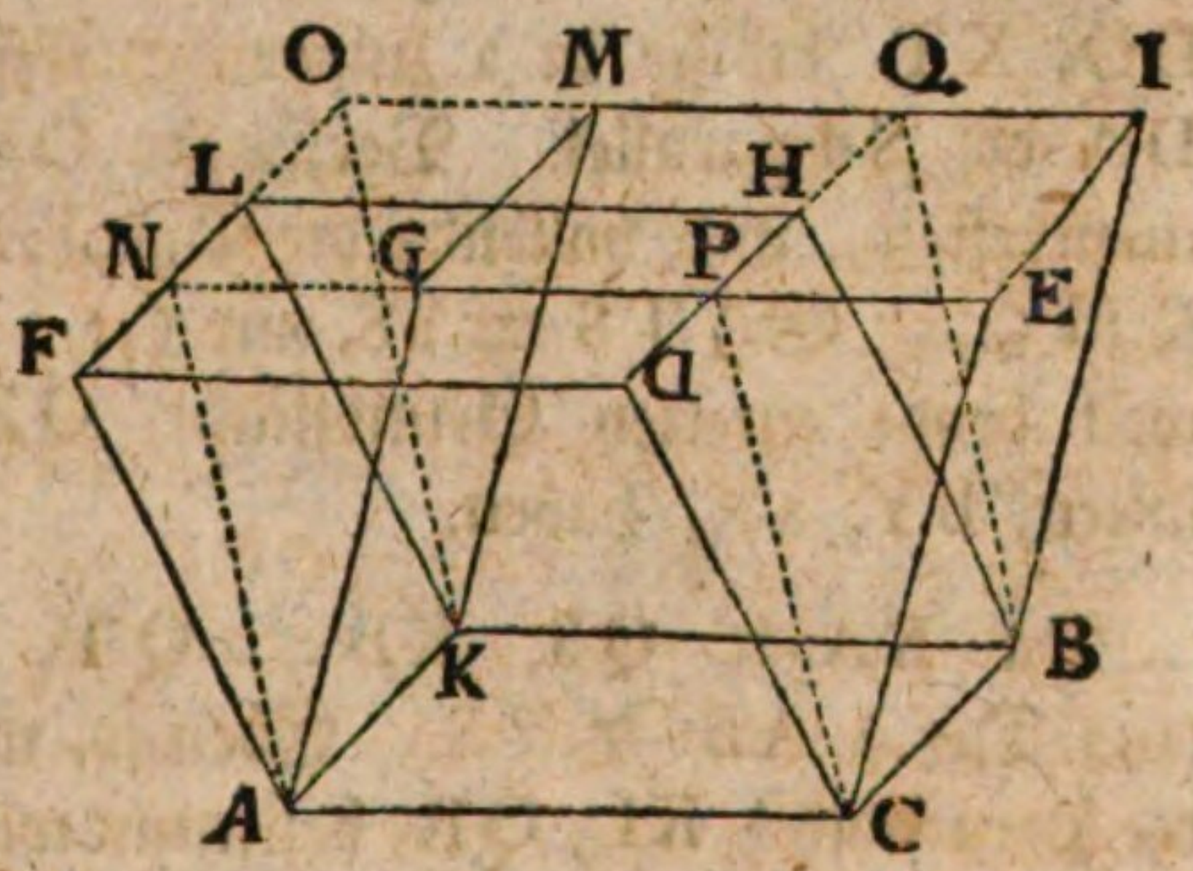
Da (1, 34. S.) CB = DH = EI, folglich DE = HI, so ist (1, 8. S.) △ DEC = △ HIB, und aus gleichem Grunde, △ FGA = △ LMK. Nun ist (1, 36. S.) FE = LI, desgleichen (11, 24. S.) AD = KH, und AE = KI. Folglich ist (11, 10. Def.) das Prisma EFAC = ILKB, folglich wenn beyderseits der Körper ABHG hinzukommt, AH = AI.



Der 30. Satz.

Parallelepipeda, ABDL, ABEM, welche einerley Grundfläche, AB, und einerley Höhe haben, obschon ihre Eckseiten, AF, AG, CD, CE; KL, KM, BH, BI, nicht in einerley geraden Linien sich enden, sind einander gleich.

Verlängre EG, IM, FL, DH, bis sie in N, O, Q, zusammentreffen, und ziehe NA, OK, PC, QB: so entsteht ein drittes Parallelepipedon, ABQN, welches sowohl mit dem ersten, ABDL, als mit dem zweyten, ABEM, einerley Grundfläche, AB, und einerley Höhe hat, und dessen Eckseiten mit den Eckseiten der beyden ersten in einerley geraden Linien sich enden; nämlich beym dritten und ersten, in FO, DQ, beym dritten und zweyten in NE, OI. Folglich ist (1, 29. S.) ABDL = ABQN, und ABEM = ABQN, folglich (1, 1. Ax.) ABDL = ABEM.



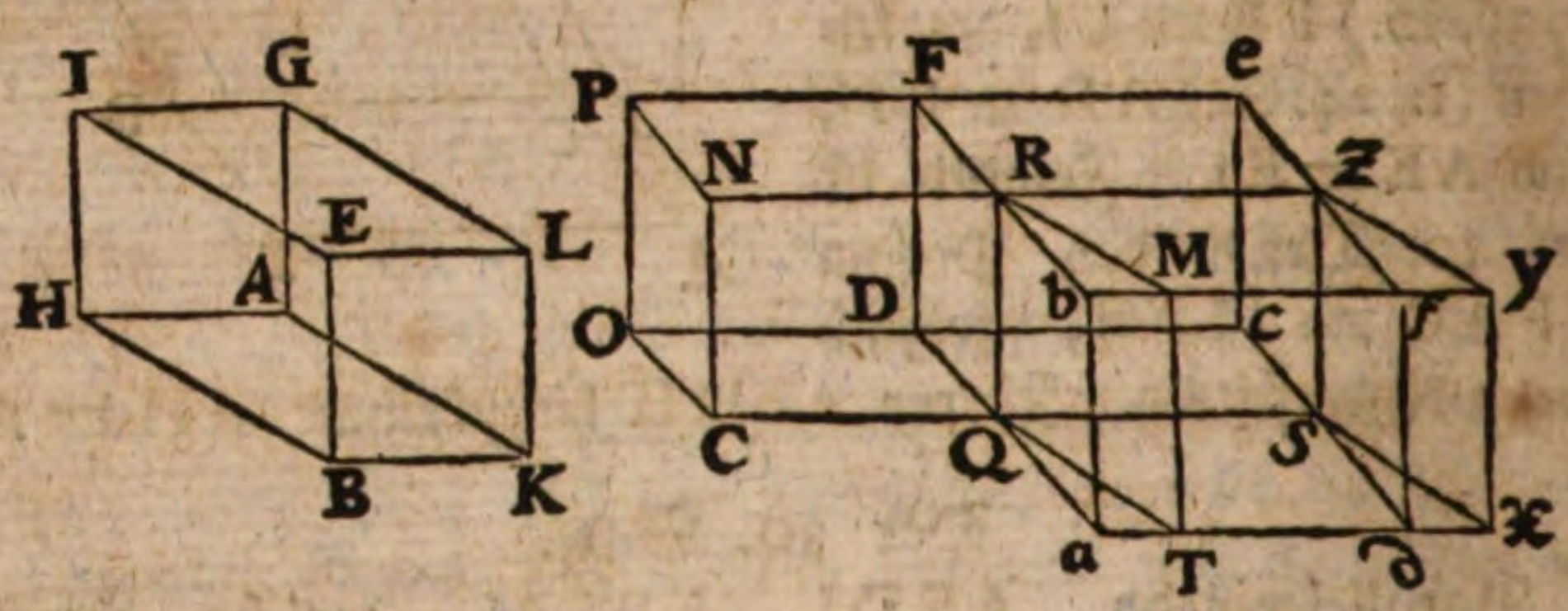
Der 31. Satz.

Parallelepipeda, ABEG, CDFN, welche gleiche Grundflächen, AB, CD, und gleiche Höhe haben, sind einander gleich.

Erster

Erster Fall.

Wenn die Eckseiten, AG, BE; CN, DF, auf den Grundflächen, AB, CD, senkrecht sind. Nun sind die Winkel, AKB, CQD, einander entweder gleich oder ungleich.



Erstlich. Sind die Winkel ungleich, etwa AKB < CQD, so verlängre CQ nach S, und mache (1, 23. S.) SQT = AKB, desgleichen QS = KA, QT = KB. Vollende das Parallelogramm, TS, und das Parallelepipedon, TSZM. Verlängre DQ, XT, bis sie in a zusammentreffen, und ziehe durch S der DA die Sd parallel. Verlängre OD, dS, bis sie in c zusammentreffen, und vollende die Parallelepipeda, aSZb, QceR: so ist (1, 35. S.) TS = aS, und (11, 29. S.) TSZM = aSZb, weil beyde einerley Grundfläche, QZ, und einerley Endungslinien, bY, aX, haben.

Da KA = QS, KB = QT, AKB = SQT, so ist (6, 1. Def.) AB ≅ TS. Eben so, weil die Höhe, welche durch die Perpendikel, KL, QR, bestimmt wird, gleich, ist BL ≅ RT, und AL ≅ RS. Folglich ist (11, 24. S. und 10. Def.) ABEG = TSZM = aSZb.

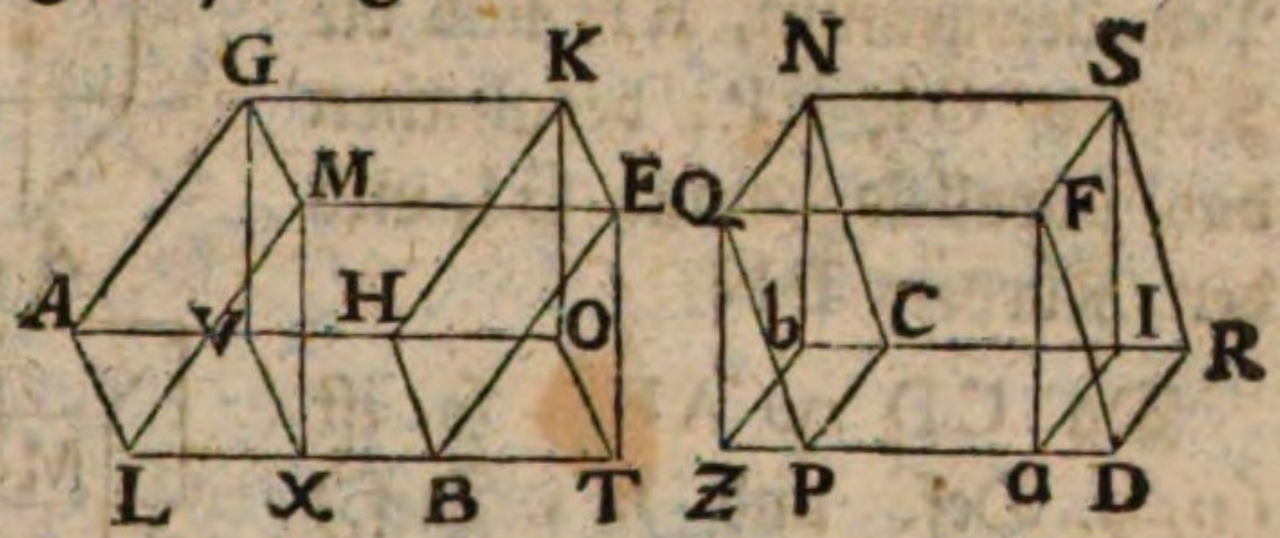
Da AB = TS = aS, und AB = CD, so ist CD = aS, und (5, 7. S.) CD : DS = aS : DS.

Da Ce durch die Parallelebne, FQ, geschnitten wird, so ist (11, 25. S.) CDFN : QceR = CD : DS = aS : DS. Aus eben dem Grunde, da ae durch die Parallelebne, QZ, geschnitten wird, ist aSZb : QceR = aS : DS. Folglich ist (5, 11. S.) CDFN : QceR = aSZb : QceR, folglich (5, 9. S.) CDFN = aSZb = ABEG.

Zweytens. Sind die Winkel gleich, nämlich AKB = CQD, so sey CQ, DQ, so verlängert, daß QS = KA, und Qa = KB. Nun ist (I, 15. S.) SQa = CQD = AKB. Folglich ist wie vorher erweislich, daß (II, 10. Def.) ABEG = aSZb, desgleichen, daß (II, 25. S.) CDFN = aSZb, folglich daß (I, 1. Ax.) ABEG = CDFN.

Zweyter Fall.

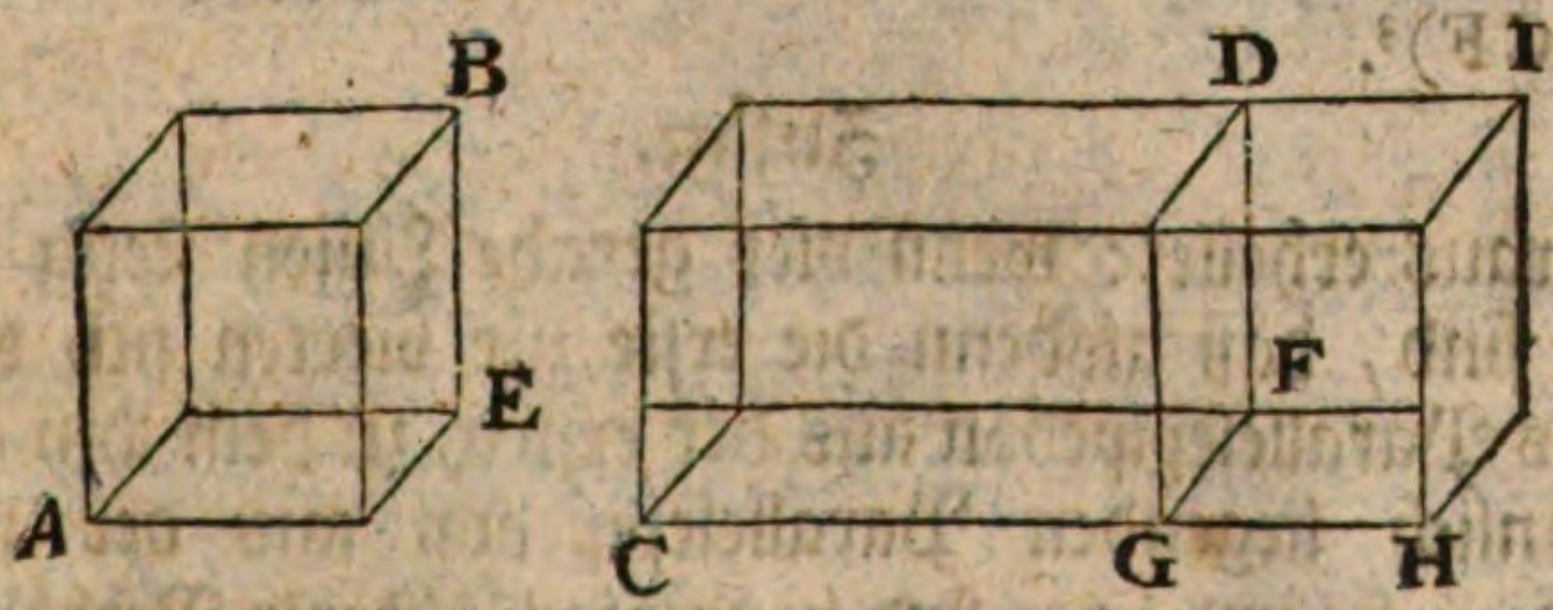
Wenn die Eckseiten, AG, BE; CN, DF, auf den Grundflächen, AB, CD, nicht senkrecht sind.



Von G, M, K, E, desgleichen von N, Q, S, F, fälle auf die Grundflächen, AB, CD, senkrechte Linien, und vollende die senkrechten Parallelepipeda, KX, SZ. Diese haben gleiche Grundflächen, EG, FN, und gleiche Höhe, und sind daher, nach dem ersten Falle, einander gleich. Nun ist (II, 29. S.) KX = ABEG, und SZ = CDFN. Folglich ist (I, 1. Ax.) ABEG = CDFN.

Der 32. Satz.

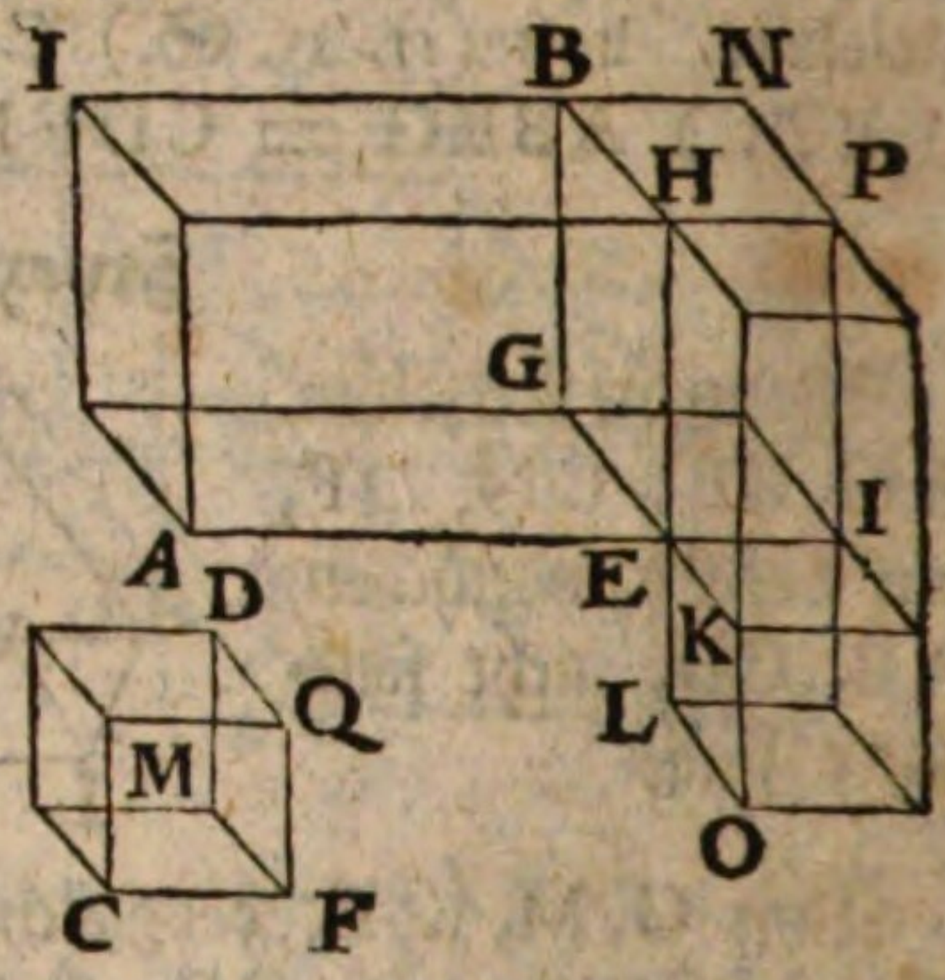
Parallelepipeda, AB, CD, von gleicher Höhe, verhalten sich wie ihre Grundflächen, AE, CF.



Setze (I, 45. S.) an GF das Parallelogramm, FH = AE, und vollende das Parallelepipedon, GI, so ist (II, 31. S.) GI = AB. Nun ist, weil CI von einer Parallelebne, GD, geschnitten wird, (II, 25. S.) GI : CD = FH : CF. Folglich ist AB : CD = AE : CF.

Der 33. Satz.

Aenliche Parallelepipeda, AB, CD, sind in dreyfach höherer Verhältniß ihrer homologen Seiten, AE, CF.



Verlängre AE, GE, HE, bis EI = CF, EK = FM, EL = FQ. Vollende das Parallelogramm, KI, und die Körper, OI, KP; desgleichen das Parallelogramm, GI, und den Körper, EN.

Da CD ∼ AB, so ist (11, 9. Def. und 6, 1. Def.) MFC = GEA = (1, 15. S.) KEI. Nun ist CF = EI, FM = EK. Folglich ist (6, 1. Def.) CM ≅ IK. Eben so wird bewiesen, daß auch QC ≅ IL, und DF ≅ EO. Folglich ist (11, 24. S. und 10. Def.) CD ≅ OI.

Da AB ∼ CD ∼ OI, so ist (11, 9. Def. und 6, 1. Def.) AE : EI = GE : EK = HE : EL. Nun ist (6, 1. S. und 11, 32. S.) AE : EI = AG : GI = AB : EN, und GE : EK = GI : IK = EN : KP, desgleichen HE : EL = HI : IL = KP : OI, und daher AB : EN = EN : KP = KP : OI. Folglich ist (11, 5. Def.) AB : OI = (AB : EN)³ = (AE : EI)³. Nun war OI = CD und EI = CF. Folglich ist AB : CD = (AE : CF)³.

Zusatz.

Hieraus erhellet: wenn vier gerade Linien stetig proportionirt sind, daß alsdenn die erste zur vierten sich verhalte, wie das Parallelepipedon aus der ersten, zu dem ihm ähnlichen und ähnlich liegenden Parallelepipedon aus der zweyten. Denn die erste und letzte sind in dreyfach höherer Verhältniß der beyden ersten.

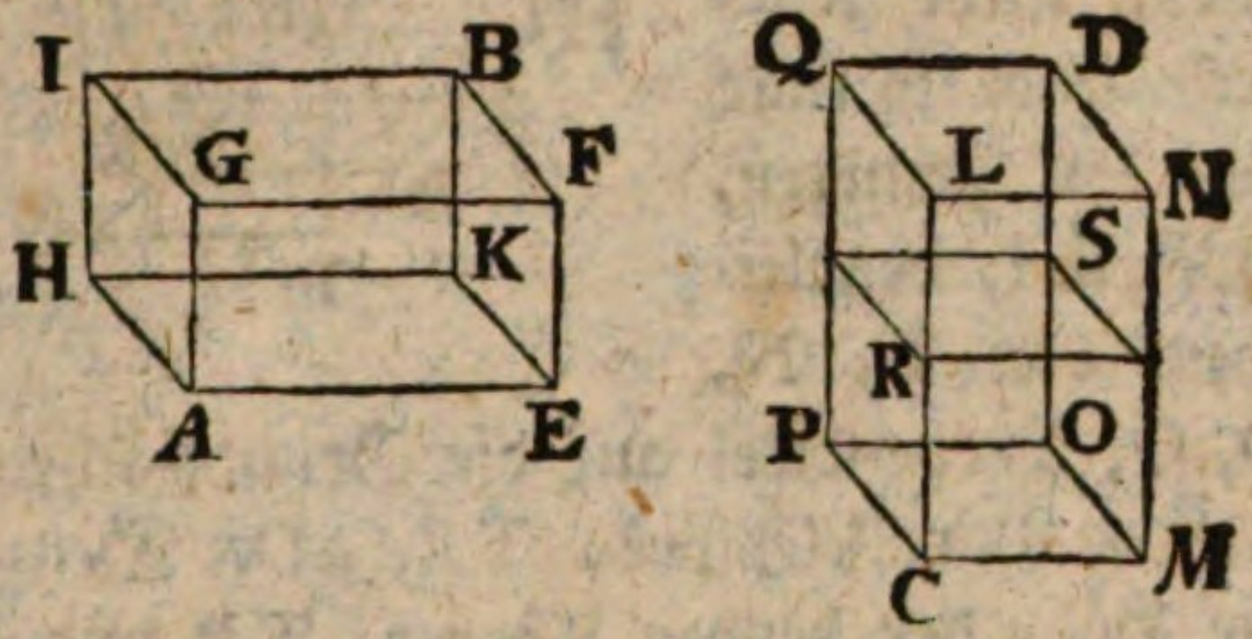
Der 34. Satz.

Wenn Parallelepipeda, AB, CD, einander gleich sind: so sind ihre Grundflächen, AK, CO, in umgekehrter Verhältniß

hältniß ihrer Höhen. Und wenn die Grundflächen, AK, CO, in umgekehrter Verhältniß der Höhen sind: so sind die Parallelepipeda, AB, CD, einander gleich.

Erster Fall.

Wenn die Eckseiten, AG, KB, CL, OD, auf den Grundflächen, AK, CO, senkrecht sind, so sind (6, 4. Def.) AG, CL, die Höhen von AB, CD, und nun zu beweisen



Erstlich, wenn AB = CD, daß alsdenn AK : CO = CL : AG. Nun sind aber die Grundflächen, AK, CO, entweder gleich, oder ungleich.

Sind die Grundflächen gleich, nämlich AK = CO, so ist, weil AB = CD, (11, 31. S.) auch CL = AG, folglich offenbar AK : CO = CL : AG.

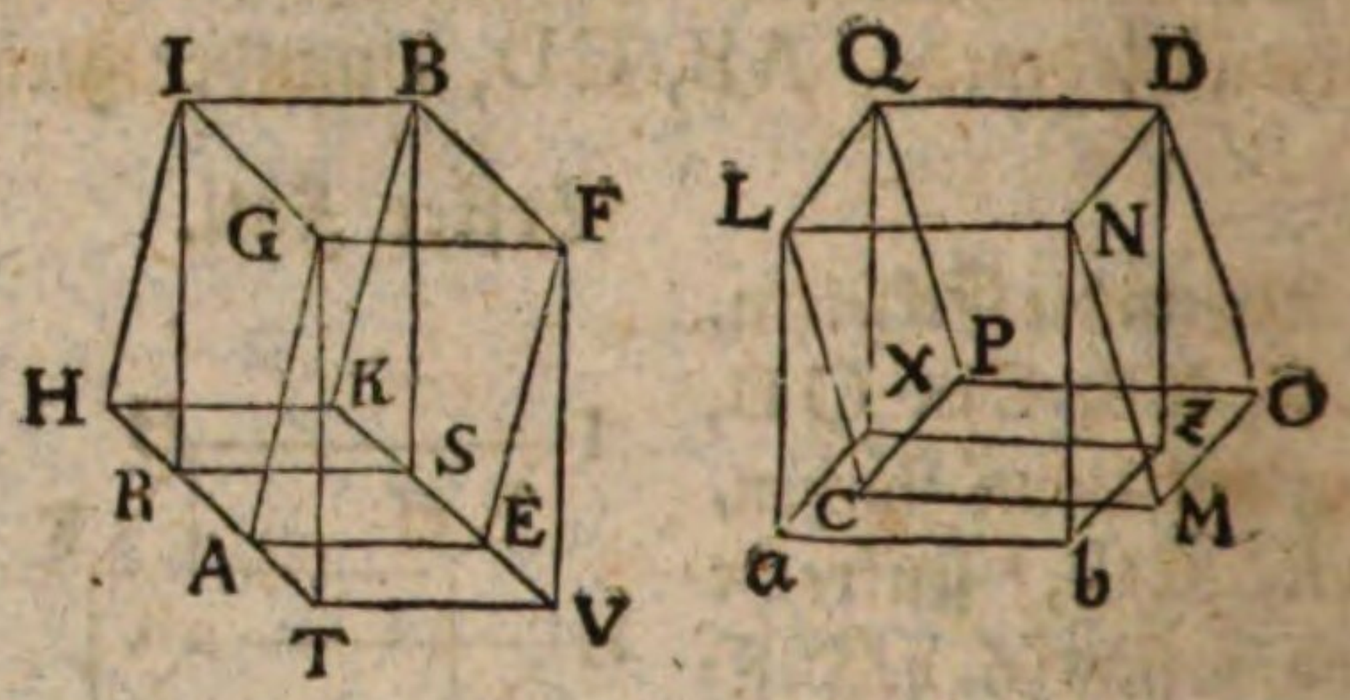
Sind die Grundflächen ungleich, etwa AK > CO, so ist, weil AB = CD, (11, 31. S.) CL > AG. Mache daher CR = AG, und vollende den Körper, CS, so ist, weil AB = CD, (5, 7. S.) AB : CS = CD : CS. Nun ist (11, 32. S.) AB : CS = AK : CO, und (11, 25. S.) CD : CS = CQ : PR = (6, 1. S.) CL : CR. Folglich ist AK : CO = CL : CR. Nun ist CR = AG. Demnach ist AK : CO = CL : AG.

Zweytens, wenn AK : CO = CL : AG, daß alsdenn AB = CD. Nun sind, wie vorher, die Grundflächen AK, CO, entweder gleich, oder ungleich.

Ist AK = CO, so ist auch CL = AG, folglich (11, 31. S.) AB = CD.

Ist aber AK > CO, so ist auch CL > AG. Mache daher CR = AG, und vollende den Körper, CS, so ist AK : CO = CL : CR. Nun ist (11, 32. S.) AK : CO = AB : CS, und (6, 1. S.) CL : CR = CQ : PR = (11, 25. S.) CD : CS. Folglich AB : CS = CD ; CS, folglich (5, 9. S.) AB = CD.

Zweyter Fall.



Wenn die Eckseiten, AG, KB, CL, OD, auf den Grundflächen, AK, CO, nicht senkrecht sind, so fälle von den Punkten, G, F, B, I, desgleichen von L, N, D, Q, Perpendikel auf die Grundflächen, und vollende die senkrechten Parallelepipeda, TB, aD. Demnach ist (6, 4. Def.) TG die Höhe der beyden Körper, TB und AB, desgleichen aL die Höhe der beyden Körper, aD und CD, und nun zu beweisen

Erstlich, wenn AB = CD, daß alsdenn AK : CO = aL : TG.

Da (11, 29. S.) AB = TB, und (11, 30. S.) CD = aD, so ist, weil AB = CD, auch TB = aD, folglich, nach dem ersten Falle, TS : aZ = aL : TG. Nun ist (11, 24. S.) TS = AK, und aZ = CO. Folglich ist AK : CO = aL : TG.

Zweytens, wenn AK : CO = aL : TG, daß alsdenn AB = CD.

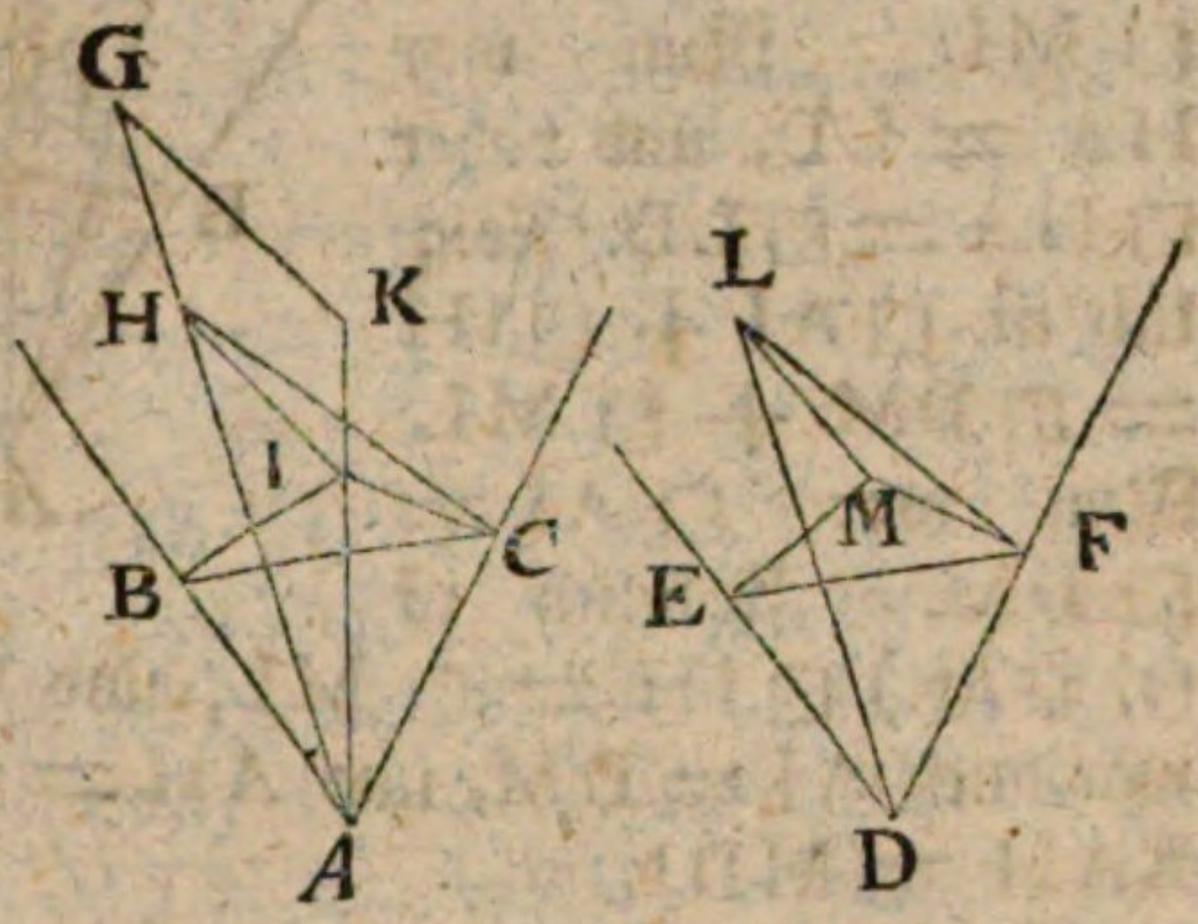
Da (11, 24. S.) AK = TS, und CO = aZ, so ist TS : aZ = aL : TG, folglich, nach dem ersten Falle, TB = aD. Nun ist (11, 29. S.) TB = AB, und (11, 30. S.) aD = CD. Folglich ist AB = CD.

Der 35. Satz.

Wenn man auf zweyen gleichen ebnen Winkeln, BAC, EDF, in ihren Scheitelpunkten, A, D, gerade Linien, AG, DL, welche mit den gleichnamigen Schenkeln gleiche Winkel, BAG, EDL; GAC, LDF, machen, aufstellet, und von willkührlichen Punkten der aufgestellten Linien, G, L, auf die Ebnen der zuerstgedachten Winkel, Perpendikel, GK, LM, fället; von den Punkten, K, M, aber, worinn diese

Perpen-

Perpendikel die Ebnen treffen, nach den zuerstgedachten Winkeln, A, D, gerade Linien, KA, MD, ziehet: so werden diese mit den aufgestellten Linien gleiche Winkel, KAG, MDL, einschliessen.

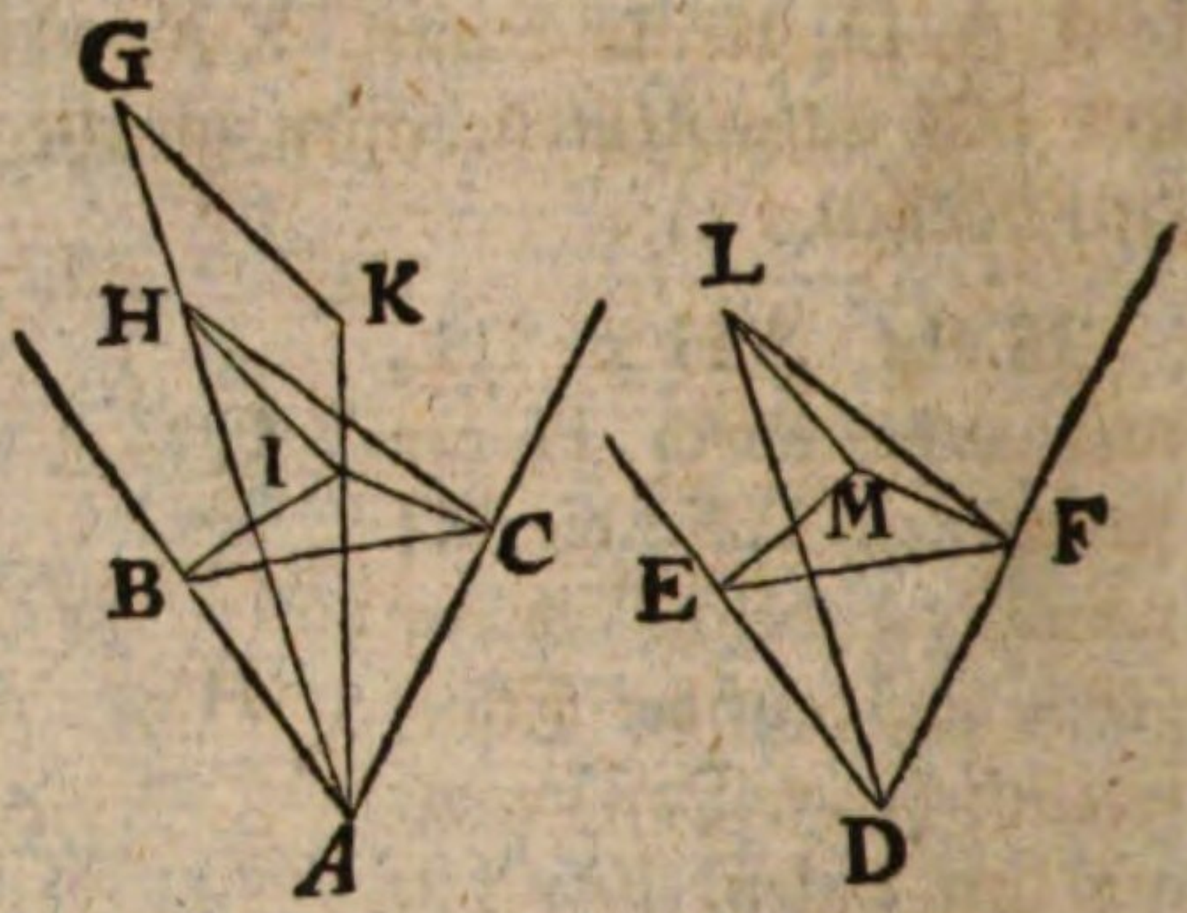


Mache AH = DL, und ziehe durch H der senkrechten, GK, die HI parallel, welche daher (11, 8. S.) auf der Ebne, folglich (11, 3. Def.) auch auf den Linien, IA, IB, IC, senkrecht ist. Von I, M, fälle auf die Schenkel der gegebnen Winkel die Perpendikel, IB, IC; ME, MF, und ziehe BC, CH, HB; EF, FL, LE.

Da HI auf IA, IC auf AC, HI auf IC, senkrecht, so ist (1, 47. S.) im ersten Falle, □HA = □AI + □IH, im zweyten, □AI = □AC + □CI, im dritten, □CI + □IH = □HC. Folglich ist □HA = □AC + □HC, folglich (1, 48. S.) HCA ein rechter Winkel. Dies gilt eben so von LFD. Folglich ist HCA = LFD. Nun ist auch HAC = LDF, und AH = DL. Folglich ist (1, 26. S.) AC = DF.

Da eben so HI auf IA, IB auf BA, HI auf IB, senkrecht, so wird auf gleiche Art bewiesen, daß HBA, LED, rechte Winkel, und daß AB = DE.

Da die Winkel, BAC, EDF, und die einschliessenden Seiten gleich, so ist (1, 4. S.) BC = EF, und BCA = EFD. Nun ist ICA = MFD, weil beyde rechte Winkel sind. Folglich ist (1, 3. Ax.) BCI = EFM. Aus gleichem Grunde ist IBC = MEF, und es war BC = EF. Folglich ist (1, 26. S.) CI = FM. Nun war AC = DF und ICA = MFD. Folglich ist (1, 4. S.) AI = DM, und daher auch □AI = □DM.



Da HI, LM, senkrecht auf IA, MD, so ist (1, 47. S.) □ HA = □ AI + □ IH, und □ LD = □ DM + □ ML. Nun war HA = LD, und daher □ HA = □ LD. Folglich ist □ AI + □ IH = □ DM + □ ML. Nun war □ AI = □ DM. Folglich ist (1, 3. Ax.) □ IH = □ ML, und daher IH = ML. Nun war auch AI = DM, und AH = DL. Folglich ist (1, 8. S.) KAH = MDL.

Zusatz.

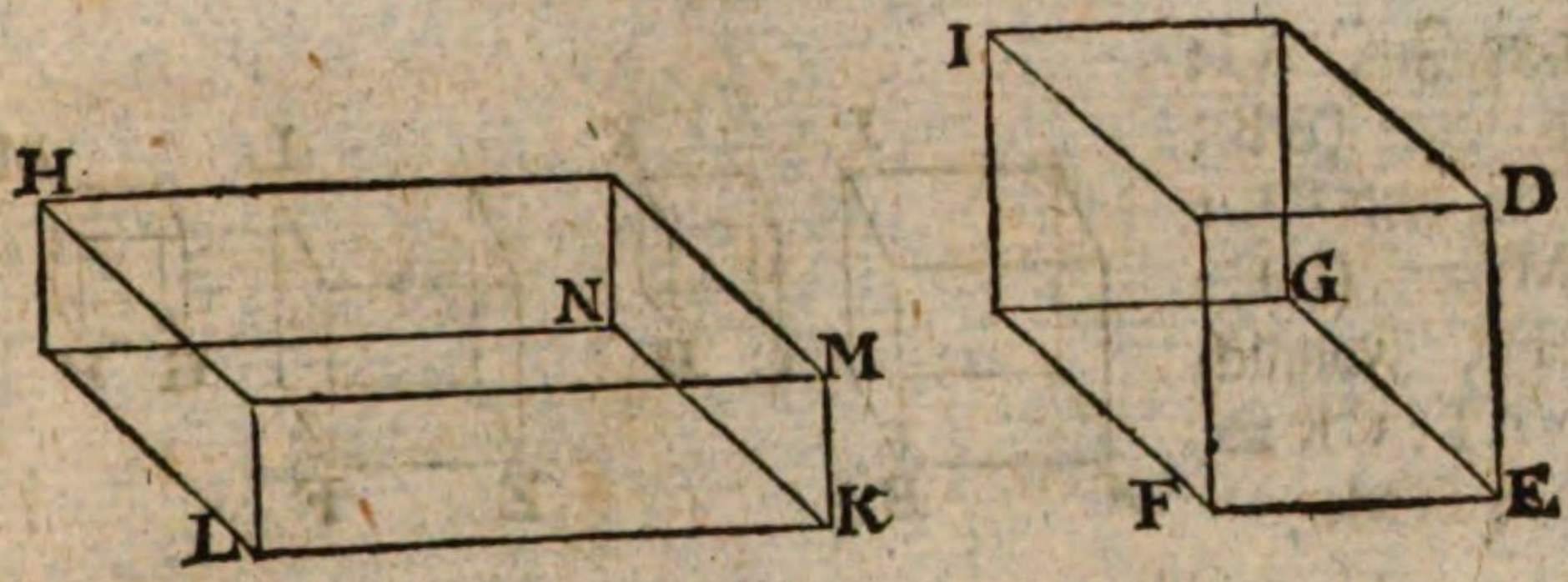
Hieraus erhellet: wenn man auf zweyen gleichen ebnen Winkeln, BAC, EDF, in ihren Scheitelpunkten, A, D, gleiche gerade Linien, AH, DL, welche mit den gleichnamigen Schenkeln gleiche Winkel machen, aufstellet, daß alsdenn die von ihren Endpunkten, H, L, auf die Ebnen gefällten Perpendikel, HI, LM, einander gleich sind.

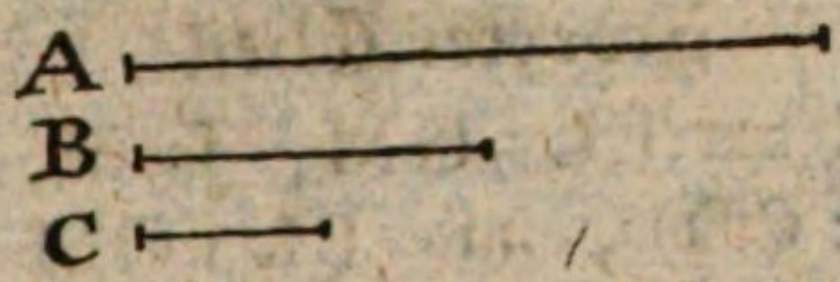
Der 36. Satz.

Wenn drey gerade Linien, A, B, C, proportionirt sind: so ist das Parallelepipedon aus allen dreyen, dem gleichseitigen, jedoch mit jenem gleichwinklichen, Parallelepipedon aus der mittlern, B, gleich.

Es sey ein körperlicher Winkel, E, von den drey ebnen Winkeln, DEG, GEF, FED, begrenzt. Mache der B die Linien, DE, GE, FE, gleich, und vollende das Parallelepipedon, EI. Ziehe KL und setze (11, 26. S.) an K, einen dem E gleichen körperlichen Winkel, der von den drey ebnen Winkeln, MKN, NKL, LKM, begrenzt werde. Mache der A die KL, der B die KN, der C die KM, gleich, und vollende das Parallelepipedon, KH.

Da





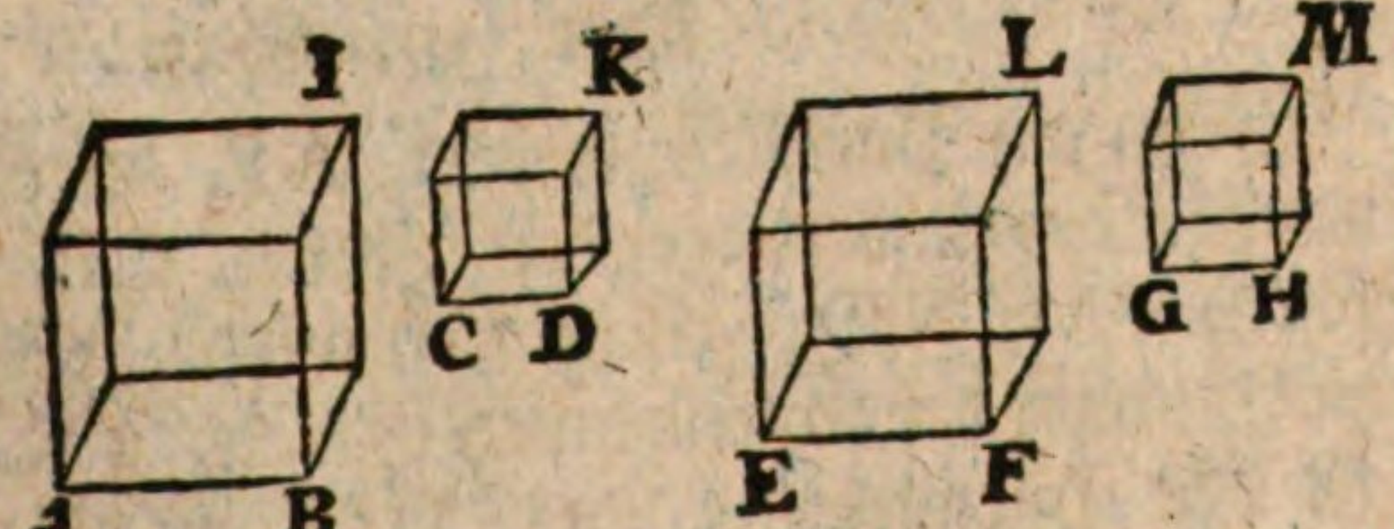
Da A:B = B:C, demnach KL : EF = ED : KM, und LKM = FED, so ist (6, 14. S.) das Parallelogramm, ML = DF. Nun sind auf den gleichen Winkeln, MKL, DEF, in K und E, die gleichen Linien, KN, EG, aufgestellt, so daß LKN = FEG, und MKN = DEG. Folglich sind (11, 35. Zus.) die von N, G, auf die Ebnen ML, DF, gefällten Perpendikel, das ist, (6, 4. Def.) die Höhen der beyden Körper einander gleich. Nun waren auch die Grundflächen, ML, DF, einander gleich. Folglich sind (11, 31. S.) die beyden Körper, EI, KH, einander gleich.

Der 37. Satz.

Wenn vier gerade Linien, AB, CD, EF, GH, proportionirt sind: so sind die auf denselben beschriebnen ähnlichen und ähnlichliegenden Parallelepipeda, AI, CK, EL, GM, auch proportionirt. Und wenn die auf vier geraden Linien beschriebnen ähnlichen und ähnlichliegenden Parallelepipeda proportionirt sind: so sind diese vier geraden Linien auch proportionirt.

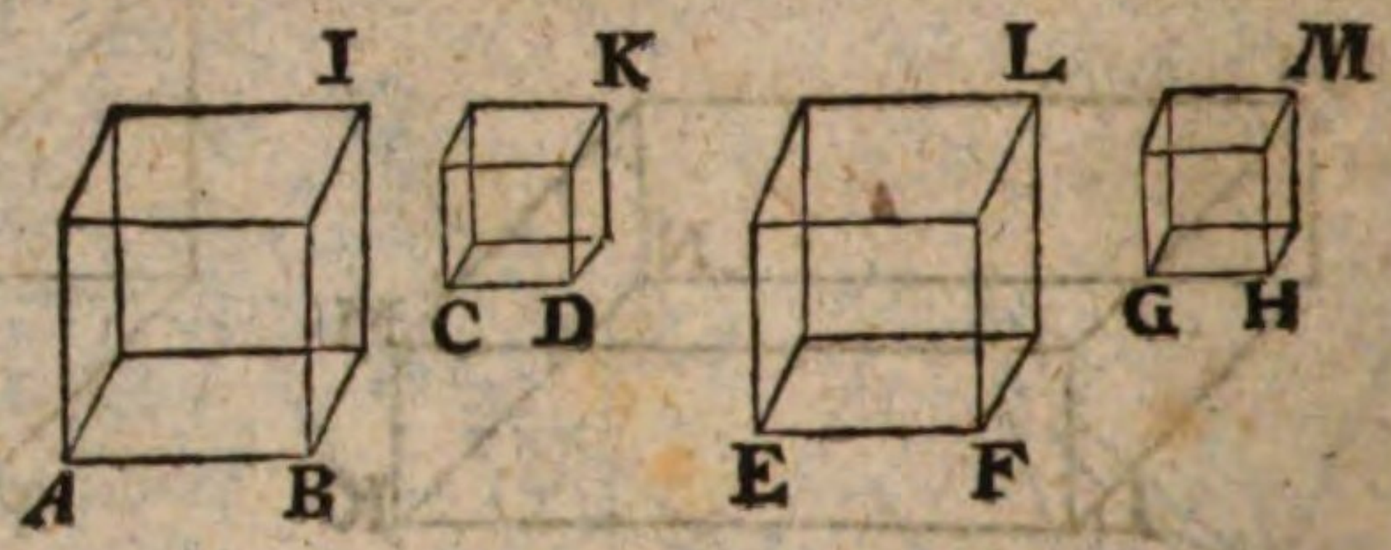
Erster Theil.

Wenn AB : CD = EF : GH, so ist auch (AB : CD)³ = (EF : GH)³. Nun ist



(11, 33. Zus.)

(11, 33. Zuf.) AI : CK = (AB : CD)³, und EL : GM = (EF : GH)³. Folglich ist AI : CK = EL : GM.

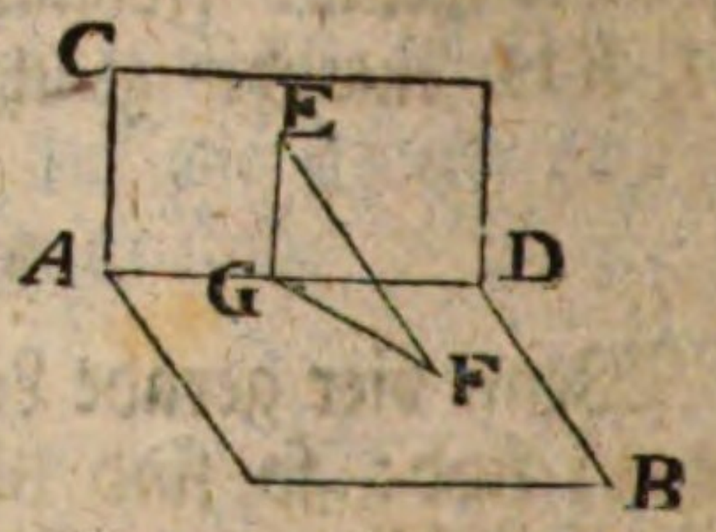


Zweyter Theil.

Wenn AI : CK = EL : GM, so ist, weil (11, 33. Zuf.) AI : CK = (AB : CD)³, und EL : GM = (EF : GH)³, auch (AB : CD)³ = (EF : GH)³, und daher AB : CD = EF : GH.

Der 38. Satz.

Wenn auf einer Ebne, AB, eine andre, CD, senkrecht ist, und von einem willkührlichen Punkte in einer dieser Ebnen, ein Perpendikel auf die andre gefället wird: so trift derselbe die Durchschnittslinie der Ebnen, AD.

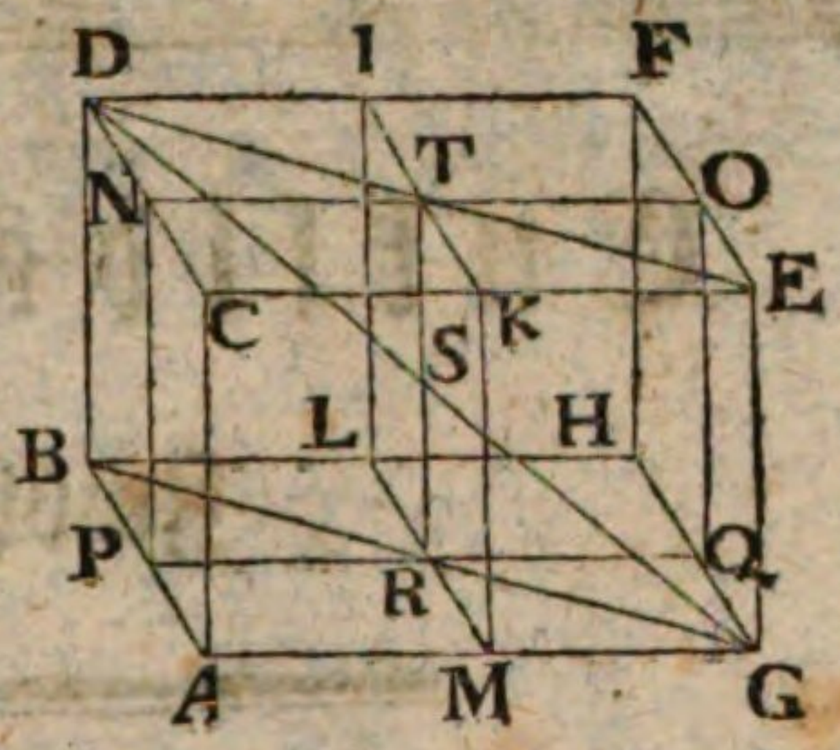


Würde vom Punkte, E, in der Ebne, CD, auf die andre Ebne, AD, ein Perpendikel gefället, welcher nicht AD träfe, sondern ausserhalb AD käme, wie EF, so fälle FG auf AD senkrecht und ziehe GE. Demnach ist (11, 4. Def.) FG auf der Ebne CD, und daher (11, 3. Def.) auch auf der Linie GE senkrecht. Wäre nun EF auf der Ebne, AB, folglich (11, 3. Def.) auch auf der Linie, FG, senkrecht: so wären im △ EGF, bey G und F rechte Winkel, welches (1, 17. S.) unmöglich.

Der 39. Satz.

Wenn ein Parallelepipedon, AF, durch die Mitte zweyer einander gegenüberliegenden Ebnen, CF, AH, von zweyen Ebnen, IM, NQ, geschnitten wird: so werden die Durchschnittslinien der schneidenden Ebnen, TR, und die Diagonale des Parallelepipedons, DG, einander halbiren.

Ziehe



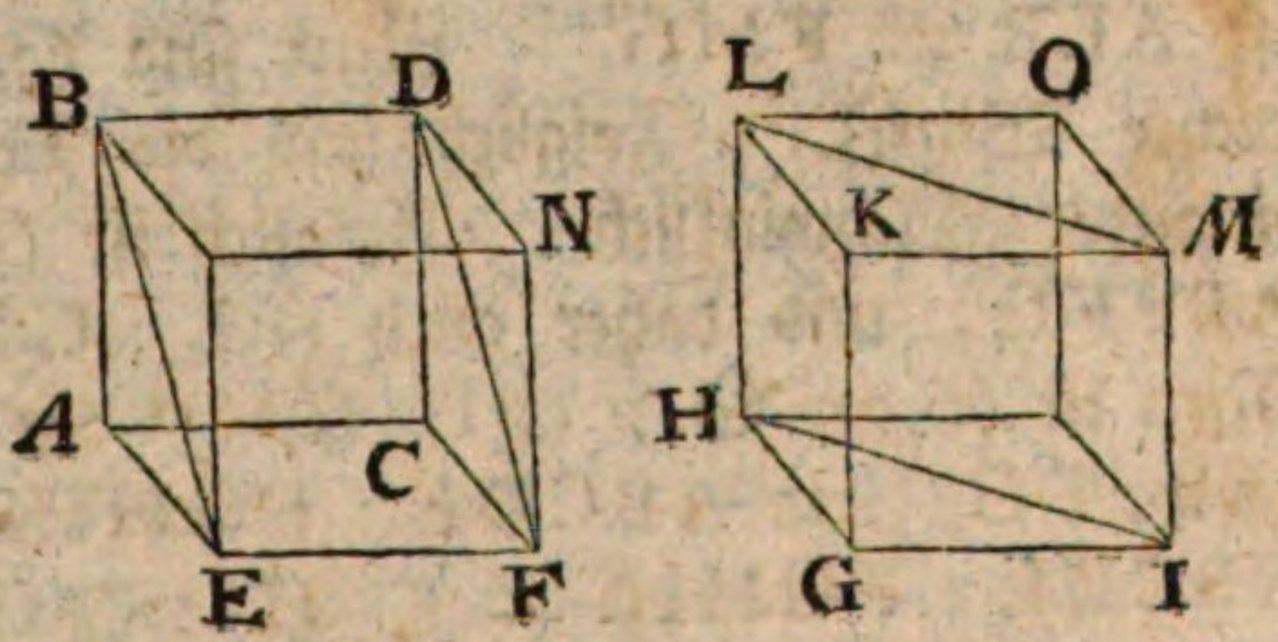
Ziehe DT, TE, BR, RG. Da die Parallellinien, DC, FE, von NO geschnitten werden, so ist (1, 29. S.) DNT = TOE. Nun ist auch DN = OE, und NT = TO. Folglich ist (1, 4. S.) DT = TE, und NTD = OTE, folglich (1, 14. S.) DTE eine gerade Linie. Eben so wird auch bewiesen, daß BR = RG, und daß BRG eine gerade Linie.

Da DB und EG, der CA gleich und parallel, so sind (1, 1. Ax. und 1', 9. S.) DB, EG, gleich und parallel, folglich (1, 33. S.) DE, BG, gleich und parallel, folglich (11, 7. S.) TR, DG, in Einer Ebne, und schneiden einander in S.

Da DE, BG, gleich und parallel, auch DT = TE, und BR = RG, so ist DT = RG und (1, 29. S.) DTS = SGR. Nun sind (1, 15. S.) auch die Winkel bey S einander gleich. Folglich ist (1, 26. S.) TS = SR, und DS = SG.

Der 40. Satz.

Wenn zwey Prismata, AEFCDB, HGIMKL, von gleicher Höhe sind, und das eine ein Parallelogramm, AEFC, das andre aber einen Triangel, GHI, zur Grundfläche hat, so daß das Parallelogramm doppelt so groß als der Triangel ist: so sind diese Prismata einander gleich.



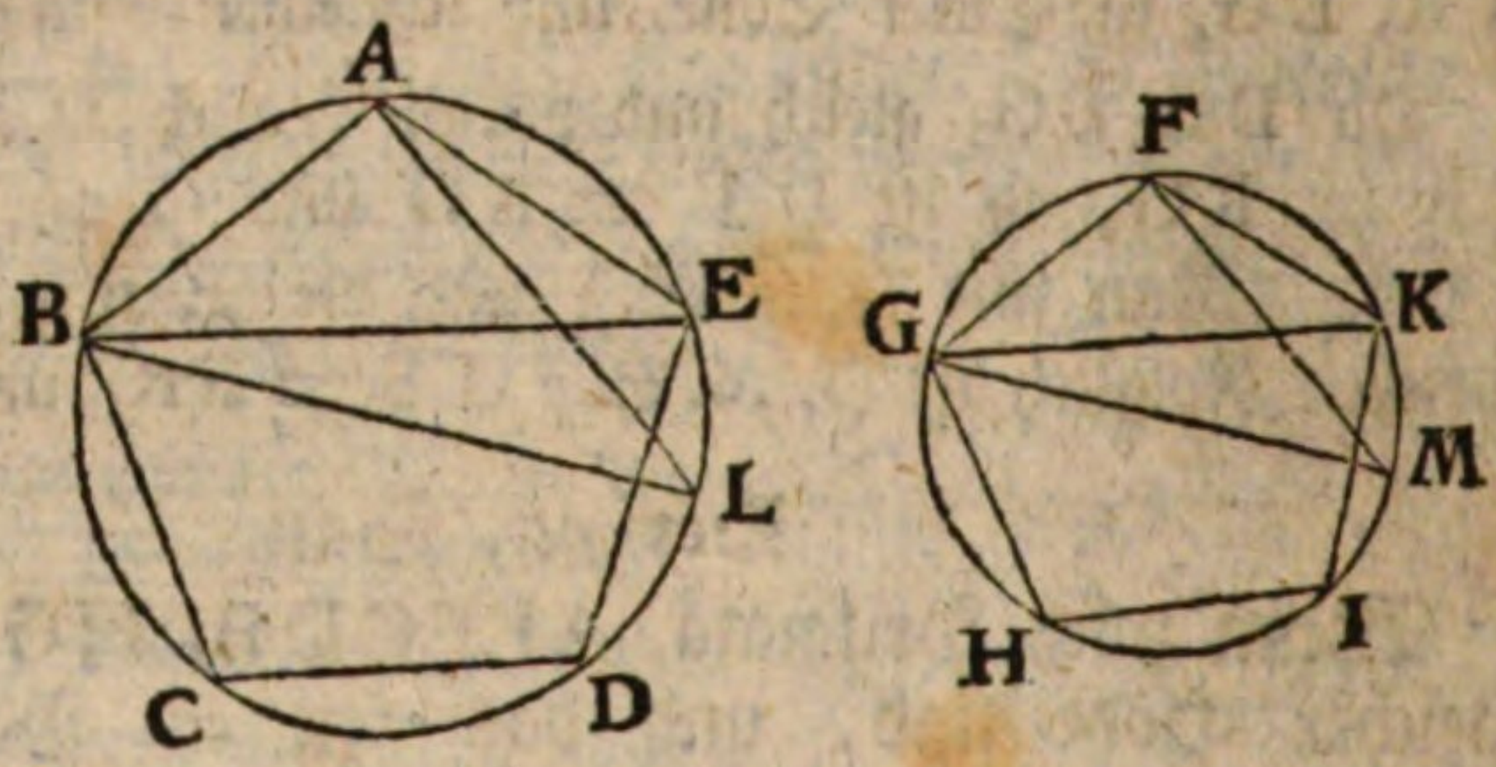
Vollende die Parallelepipeda, ED, OG. Da AF = 2 △ GHI, und (1, 34. S.) HI = 2 △ GHI, so ist AF = HI. Nun sind auch die Höhen gleich. Folglich ist (11, 31. S.) ED = OG. Demnach sind auch die obgenannten Prismata, als die Hälften von ED, OG, (1, 7. Ax.) einander gleich.

Euklids Elemente

Zwölftes Buch.

Der 1. Satz.

Aenliche in Cirkel beschriebne Polygone, ABCDE, FGHIK, verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser, BL, GM.



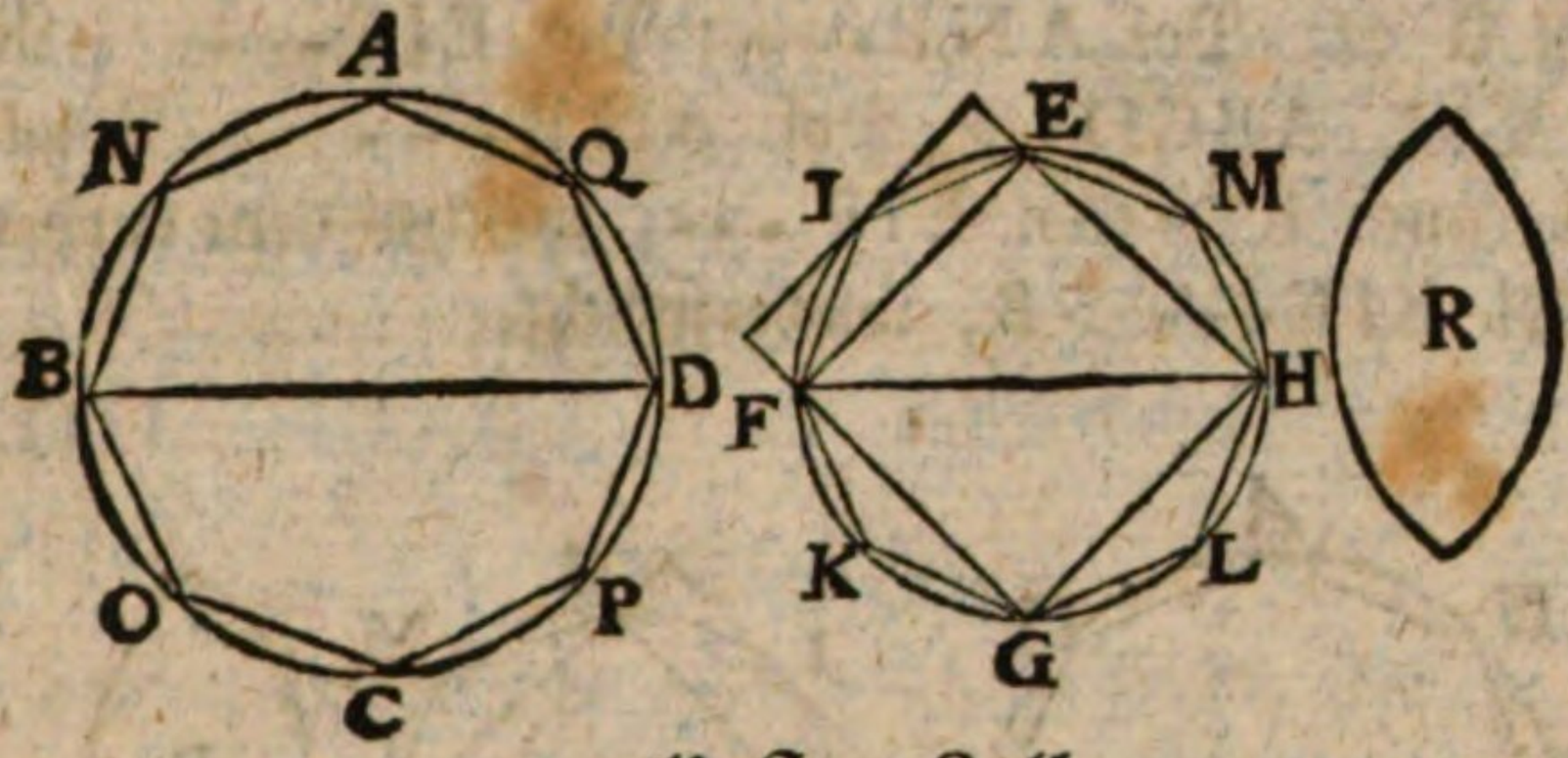
Ziehe BE, GK, AL, FM. Da die Polygone einander ähnlich, so ist (6, 1. Def.) BAE = GFK, und BA : AE = GF : FK, folglich ist in den Triangeln ABE, FGK, (6, 6. S.) AEB = FKG. Nun ist (3, 21. S.) AEB = ALB, und FKG = FMG. Folglich ist ALB = FMG. Nun sind (3, 31. S.) BAL, GFM, rechte Winkel. Folglich sind die Triangel, ABL, FGM, einander gleichwinklich. Folglich ist (6, 4. S.) BL : GM = AB : FG, und daher auch $(BL : GM)^2 = (AB : FG)^2$. Nun ist (6, 20. S.) $(BL : GM)^2 = \square BL : \square GM$, und $(AB : FG)^2 = ABCDE : FGHIK$. Folglich ist (5, 11. S.) $ABCDE : FGHIK = \square BL : \square GM$.

Der 2. Satz.

Zirkel, ABCD, EFGH, verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser, BD, FH.

Wäre

Wäre nicht □BD : □FH = Cirk. ABCD : Cirk. EFGH, so sey □BD : □FH = Cirk. ABCD : R, so daß R entweder grösser, oder kleiner als der Cirk. EFGH.



Erster Fall.

Es sey □BD : □FH = Cirk. ABCD : R, so daß R < Cirk. EFGH, oder daß Cirk. EFGH = R + X.

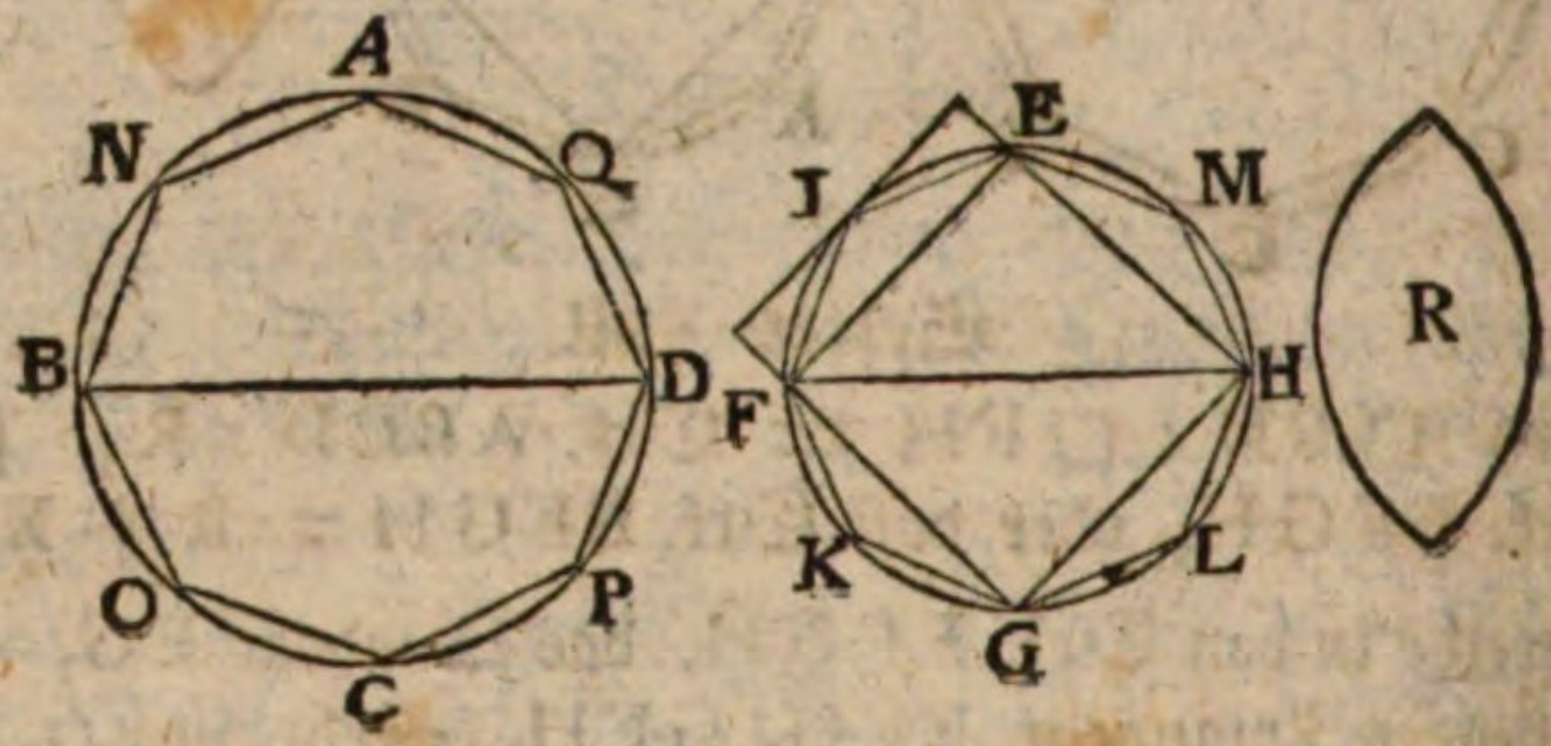
Beschreibe in den Cirk. EFGH, das Quadrat EG, welches aus den beyden Triangeln, EFH, GFH, besteht, und (1, 41. S.) der Hälfte des Quadrats gleich ist, welches um den Cirkel beschrieben wird, indem man durch E, F, G, H, Tangenten ziehet. Nun ist das äussere Quadrat grösser als der Cirkel, folglich seine Hälfte, das ist, das innere Quadrat EG, grösser als die Hälfte des Cirkels.

Halbire die Bogen, EF, FG, GH, HE, in den Punkten, I, K, L, M, und ziehe die geraden Linien, EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME: so ist jeder der daher entstehenden Triangel, wie △IFE, grösser als die Hälfte seines Segments, FIE. Denn, wenn durch I eine Tangente gezogen, und das Parallelogramm, EF, vollendet wird, so ist dasselbe grösser, als das Segment, FIE, folglich seine Hälfte, das ist, (1, 41. S.) der △IFE, grösser als die Hälfte des Segments.

Da nun eben dieses von allen Triangeln gilt, welche entstehen, wenn man mit den Halbirungen der Bogen fortfährt, folglich auf diese Art vom Cirk. EFGH, mehr als die Hälfte weggenommen wird, und vom Reste mehr als die Hälfte, und immer so fort; so bleiben zuletzt Segmente, etwa EI, IF, FK, u. s. w. übrig, welche (10, 1. S.) zusammen kleiner sind, als jede Grösse, X. Nun war Cirk. EFGH = R + X. Folglich ist das Polygon EIFKGLHM > R.

Beschreibe

Beschreibe in den Cirkel ABCD, ein dem vorigen ähnliches Polygon ANBOCPDQ, so ist (12, 1. S.) □BD : □FH = Pol. ANB--- : Pol. EIF ---. Nun ist angenommen □BD : □FH = Cirk. ABCD : R. Folglich ist Cirk. ABCD : R = Pol. ANB--- : Pol. EIF---. Nun ist offenbar Cirk. ABCD > Pol. ANB---. Folglich ist (5, 14. S.) auch R > Pol. EIF ---, welches dem vorherbewiesenen, Pol. EIF--- > R, wiederspricht.



Demnach ist es unmöglich, daß □BD : □FH = Cirk. ABCD : R, wenn R < Cirk. EFGH. Aus eben den Gründen aber ist es auch unmöglich, daß □FH : □BD = Cirk. EFGH : Z, wenn Z < Cirk. ABCD.

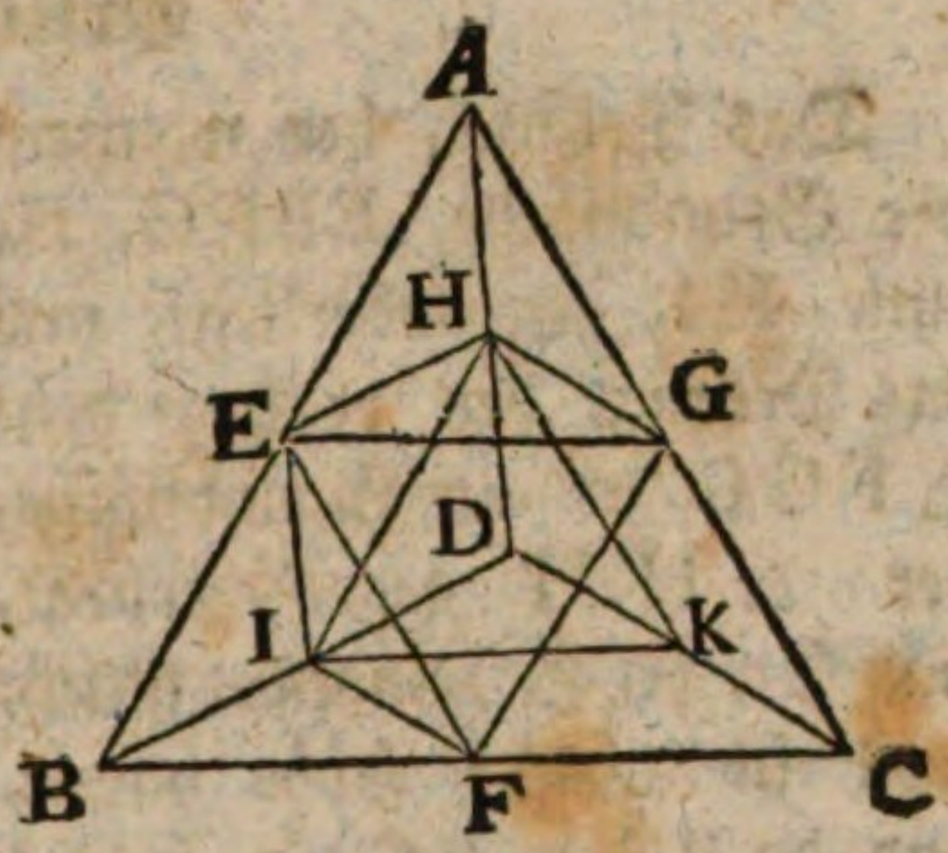
Zweyter Fall.

Es sey □BD : □FH = Cirk. ABCD : R, so daß R > Cirk. EFGH. Demnach ist auch □FH : □BD = R : Cirk. ABCD. Nun mache R : Cirk. ABCD = Cirk. EFGH : Z, so daß, weil R > Cirk. EFGH, (5, 14. S.) auch Cirk. ABCD > Z. Folglich ist □FH : □BD = Cirk. EFGH : Z, welches, weil Z < Cirk. ABCD, nach dem ersten Falle unmöglich ist.

Der 3. Satz.

Jede dreyeckige Pyramide, ABCD, läßt sich in zwey gleiche, einander selbst und der ganzen ähnliche, dreyeckige Pyramiden, und in zwey gleiche Prismata theilen, welche zusammen grösser als die Hälfte der ganzen Pyramide sind.

Halbire die Linien, AB, BC, CA; DA, DB, DC, in den Punkten, E, F, G; H, I, K. Ziehe HE, EG, GH, für die Pyramide, AEGH, und HI, IK, KH, für die Pyramide, HIKD; desgleichen, IF, FG, für die beyden Prismata, EBFGHI, GFCHIK.



Erster Theil.

Die beyden Pyramiden, AEGH, HIKD, sind (11, 10. Def.) einander gleich und ähnlich, weil sie von gleich vielen gleichen und ähnlichen Ebnen begrenzt werden. Denn

1.) Da AE = EB, und AH = AD, so ist (6, 2. S.) EH der BD parallel. Eben so, weil AH = HD, und BI = ID, ist (6, 2. S.) HI der AB parallel. Demnach ist HEBI ein Parallelogramm, und (1, 34. S.) HI = EB = AE, desgleichen (1, 29. S.) IHD = BAH. Nun war auch HD = AH. Folglich ist (1, 4. S. und 6, 4. S.) △ DIH ≅ △ HEA, und ID = EH.

2.) Eben so wird bewiesen, daß △ DHK ≅ △ HGA, und KD = GH.

3.) Da DI der HE, und DK der HG, gleich und parallel, so ist (11, 10. S.) IDK = EHG, folglich (1, 4. S. und 6, 4. S.) △ DIK ≅ △ HEG.

4.) Eben so wird bewiesen, daß △ HIK ≅ △ AEG.

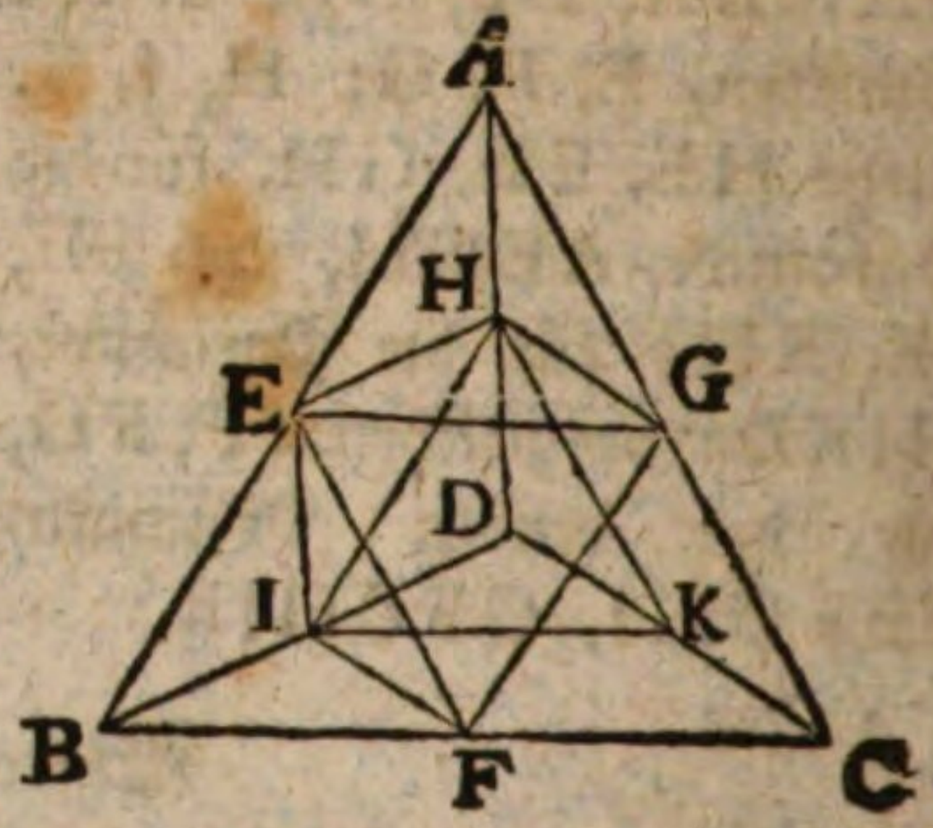
Zweyter Theil.

Die ganze Pyramide, ABCD, ist (11, 9. Def.) der Pyr. HIKD, und daher auch der Pyr. AEGH ähnlich. Denn da HI der AB parallel, so sind (1, 29. S.) die Triangel, DAB, DHI, gleichwinklich und (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt, folglich (6, 1. Def.) einander ähnlich. Eben dies gilt von den Triangeln, DAC, DHK, desgleichen von den Triangeln, DBC, DIK; aber auch (6, 6. S.) von den Triangeln, ABC, HIK, weil HI der AB, und HK der AC parallel, daher (11, 10. S.) BA : IH = AD : DH = BAC = IHK, und (6, 4. S.) BA : IH = AD : DH = AC : KH.

Dritter

Dritter Theil.

Das Prisma, bey welchem der Grundfläche, EBFG, die Linie, HI, gegenüberliegt, und das Prisma, bey welchem dem △FGC, als der Grundfläche, der △IKH gegenüberliegt, sind (11, 40.S.) einander gleich, weil sie gleiche Höhe haben, und, da BF = FC, (1, 41.S.) EBFG = 2△GFC.



Vierter Theil.

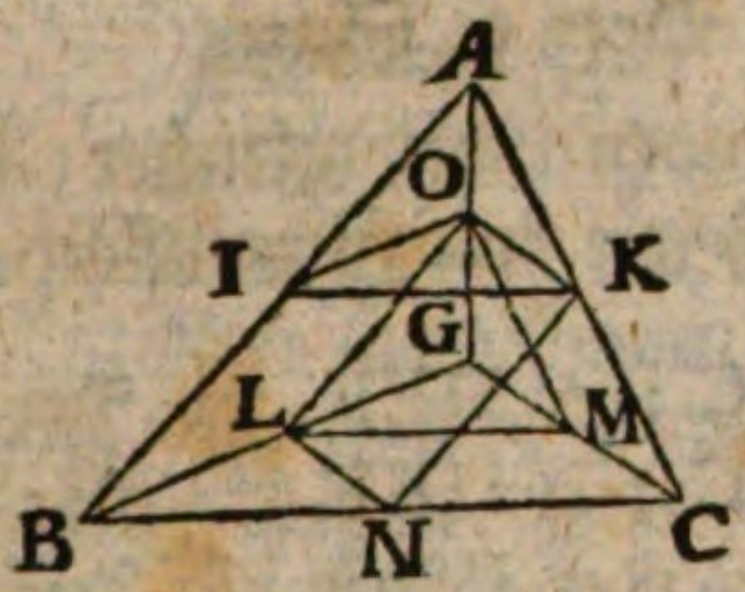
Die beyden Prismata sind grösser, als die Hälfte der ganzen Pyramide, ABCD, wenn sie grösser sind, als die beyden kleinen Pyramiden, AEGH, HIKD.

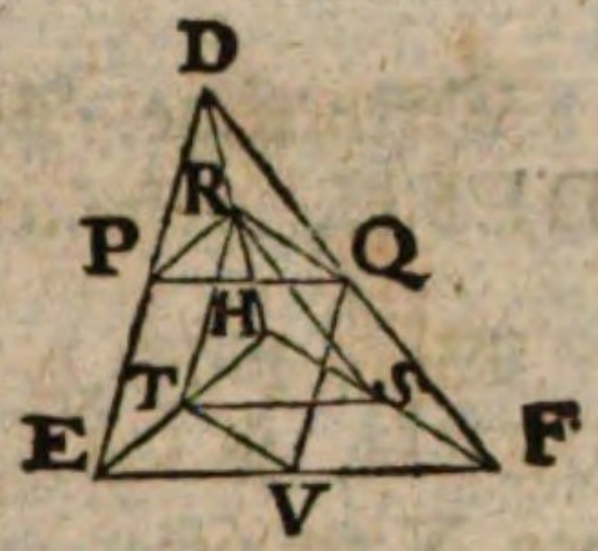
Ziehe IE, EF, für eine Pyramide, EBFI, so kann man auf eben die Art, wie im ersten Theil bewiesen worden, daß AEGH ≅ HIKD, auch beweisen, daß EBFI ≅ HIKD. Folglich ist auch EBFI ≅ AEGH. Nun ist offenbar EBFGHI > EBFI. Folglich ist EBFGHI > AEGH. Demnach ist auch das dem ersten gleiche Prisma GFCHIK > HIKD.

Der 4. Satz.

Wenn zwey dreyeckige Pyramiden, ABCG, DEFH, von gleicher Höhe sind, und es wird jede derselben in zwey gleiche, einander selbst und der ganzen ähnliche, Pyramiden, und in zwey gleiche Prismata getheilt, hierauf jede der daher entstehenden Pyramiden wieder auf eben die Art, und dies immer so fort: so verhalten sich alle Prismata in der einen Pyramide zu allen Prismatibus von gleicher Anzahl in der andern, wie die Grundfläche der einen, ABC, zur Grundfläche der andern, DEF.

Da





Da die beyden Pyramiden, ABCG, DEFH, von gleicher Höhe sind, so sind (6, 4. Def.) die von G und H auf die Ebnen, ABC, DEF, gefällten Perpendikel, einander gleich. Nun wird der Perpendikel aus G und die Linie, GC, von zweyen Parallelebnen, ABC, OLM, (11, 17. S.) proportionirt geschnitten, folglich, da GC in M halbirt ist, wird auch gedachter Perpendikel von der Ebne, OLM, halbirt. Eben dies geschiehet auch mit dem Perpendikel aus H. Nun sind die ganzen Perpendikel, und daher auch ihre Hälften gleich. Demnach haben die beyden Prismata, KNCOLM, QVFRTS, gleiche Höhe, und verhalten sich daher (11, 28. und 32. S.) wie ihre Grundflächen, KNC, QVF.

Da BN = NC, und AK = KC, so ist (6, 2. S.) KN der AB parallel, und (6, 4. S.) △ ABC ∼ △ KNC. Aus gleichem Grunde ist △ DEF ∼ △ QVF. Nun ist, (weil BC = 2 NC, und EF = 2 VF) BC : EF = NC : VF. Folglich ist (6, 22. S.) △ ABC : △ DEF = △ KNC : △ QVF. Nun war nach obigem △ KNC : △ QVF = Prism. KNCOLM : Prism. QVFRTS. Folglich ist (5, 11. S.) △ ABC : △ DEF = Prism. KNCOLM : Prism. QVFRTS = (12, 3. S.) Prism. IBNKOL : Prism. PEVQRT. Folglich ist (5, 18. S.) △ ABC : △ DEF = Prism. KNCOLM + Prism. IBNKOL : Prism. QVFRTS + Prism. PEVQRT.

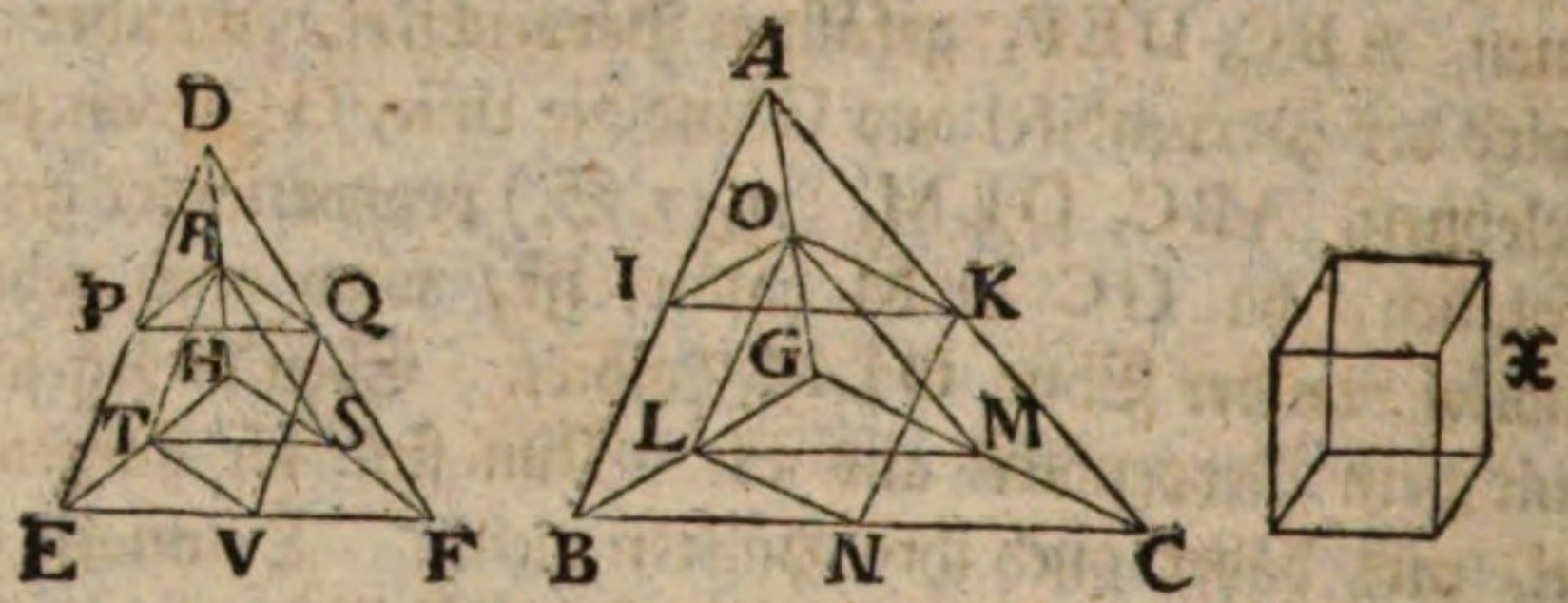
Werden nun die entstandnen kleinern Pyramiden, als AIKO, DPQR, wieder eben so getheilt, so sind aus gleichem Grunde zwey Prismata in AIKO, zu zweyen in DPQR, wie △ AIK zum △ DPQ, das ist, wie △ ABC, zum △ DEF. Folglich sind (5, 18. S.) vier Prismata in ABCG, zu vieren in DEFH, wie △ ABC, zum △ DEF. Auf eben die Art wird der Beweis auch von den Prismatibus in OLMG, RTSH, und überhaupt von allen weitern Eintheilungen in gleicher Anzahl, geführt.

Der

Der 5. Satz.

Dreyeckige Pyramiden von gleicher Höhe, ABCG, DEFH, verhalten sich wie ihre Grundflächen, ABC, DEF.

Wäre nicht △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : Pyr. DEFH, so sey △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X, so daß X entweder gröſſer, oder kleiner als Pyr. DEFH.



Erster Fall.

Es sey △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X, so daß X < Pyr. DEFH, oder daß Pyr. DEFH = X + R.

Theile (12, 3. S.) die Pyr. DEFH, in ihre Pyramiden und Prismata, und die daher entstehenden kleinern Pyramiden wieder auf eben die Art, und so immer fort: so bekomst du zuletzt Pyramiden, welche (10, 1. S.) kleiner sind als jede Gröſſe, R. Nun war Pyr. DEFH = X + R. Folglich sind die Prismata der Pyr. DEFH > X.

Wird nun die andre Pyramide, ABCG, auf eben die Art und in eben so viel Theile getheilt, so verhalten sich (12, 4. S.) die Prismata der Pyr. ABCG, zu den Prismatibus der Pyr. DEFH, wie △ ABC, zum △ DEF, das ist, nach der angenommenen Proportion, wie Pyr. ABCG : X. Nun sind die Prismata der Pyr. ABCG, offenbar < Pyr. ABCG. Folglich sind (5, 14. S.) auch die Prismata der Pyr. DEFH < X, welches dem vorherbewiesenen Prismata der Pyr. DEFH > X, widerspricht.

Demnach ist es unmöglich, daß △ ABC : △ DEF = Pyr. ABCG : X, weil X < Pyr. DEFH. Aus eben den Gründen aber ist es auch unmöglich, daß △ DEF : △ ABC = Pyr. DEFH : Z, wenn Z < Pyr. ABCG.

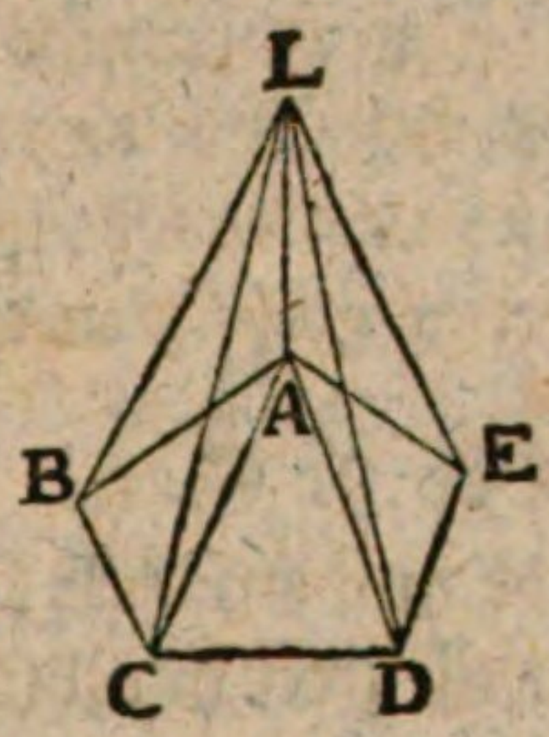
Zweyter Fall.

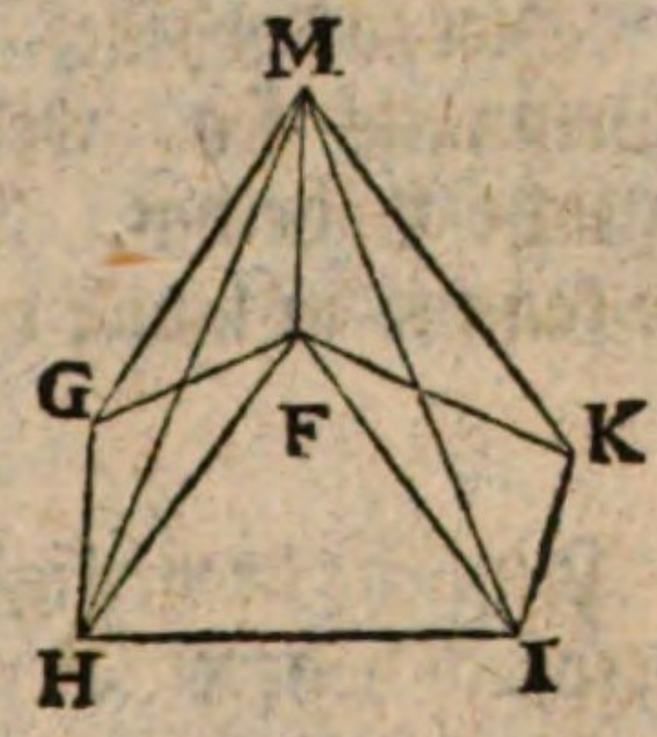
Es sey △ABC : △DEF = Pyr. ABCG : X, so daß X > Pyr. DEFH. Demnach ist auch △DEF : △ABC = X : Pyr. ABCG. Nun mache man X : Pyr. ABCG = Pyr. DEFH : Z, so daß, weil X > Pyr. DEFH, (5, 14. S.) auch Pyr. ABCG > Z, das ist, Z < Pyr. ABCG. Folglich ist △DEF : △ABC = Pyr. DEFH : Z, welches, weil Z < Pyr. ABCG, nach dem ersten Falle unmöglich ist.

Der 6. Satz.

Vieleckige Pyramiden von gleicher Höhe, ABCDEL, FGHIKM, verhalten sich wie ihre Grundflächen, ABCDE, FGHIK.

Theile diese Grundflächen in ihre Triangel, ABC, ACD, ADE; FGH, FHI, FIK, und denke dir über solchen Triangeln Pyramiden, welche mit den erstern von gleicher Höhe sind.



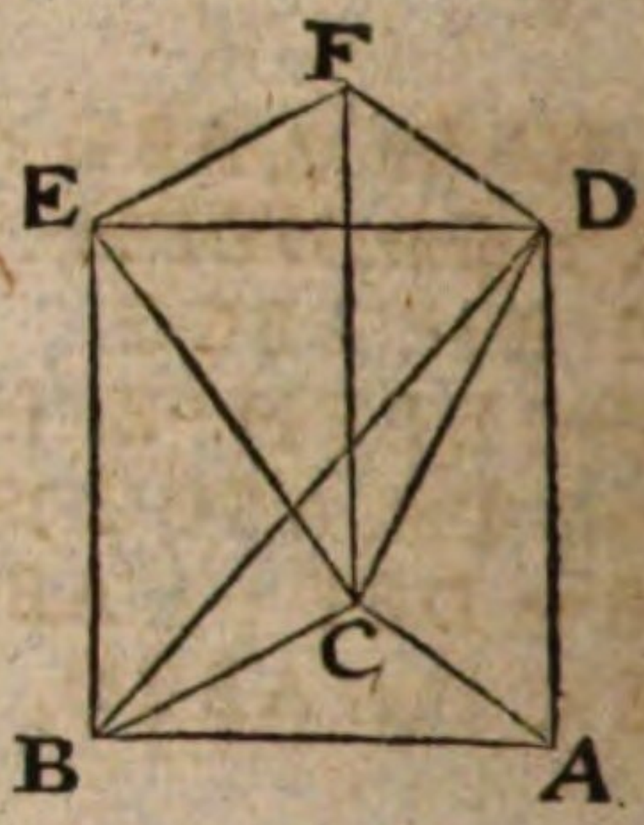


Da (12, 5. S.) △ABC : △ACD = Pyr. ABCL : Pyr. ACDL, so ist (5, 18. S.) verbunden ABCD : ACD = ABCDL : ACDL. Nun ist (12, 5. S.) ACD : ADE = ACDL : ADEL. Folglich ist (5, 22. S.) gleichförmig ABCD : ADE = ABCDL : ADEL, folglich (5, 18. S.) verbunden ABCDE : ADE = ABCDEL : ADEL. Nun ist (12, 5. S.) ADE : FIK = ADEL : FIKM. Folglich ist (5, 22. S.) gleichförmig ABCDE : FIK = ABCDEL : FIKM. Nun wird wie vorher bewiesen, FGHIK : FIK = FGHIKM : FIKM. Folglich ist (5, 22. S.) gleichförmig ABCDE : FGHIK = ABCDEL : FGHIKM.

Der 7. Satz.

Jedes dreyeckige Prisma, ABCDEF, läßt sich in drey gleiche dreyeckige Pyramiden theilen.

Ziehe in den dreyen Parallelogrammen, die Diagonalen, BD, EC, CD, für die dreyeckigen Pyramiden, ABDC, DBEC, ECFD.



Im Parallelogramm, ABED, ist (1, 14. S.) △ ABD = △ DBE, folglich (12, 5. S.) Pyr. ABDC = Pyr. DBEC, weil beyder Spitze in C.

Im Parallelogramm, BCFE, ist eben so △ FEC = △ CEB, und daher, da die Spitze in D, Pyr. FECD = Pyr. CEBD (= Pyr. DBEC) = Pyr. ABDC.

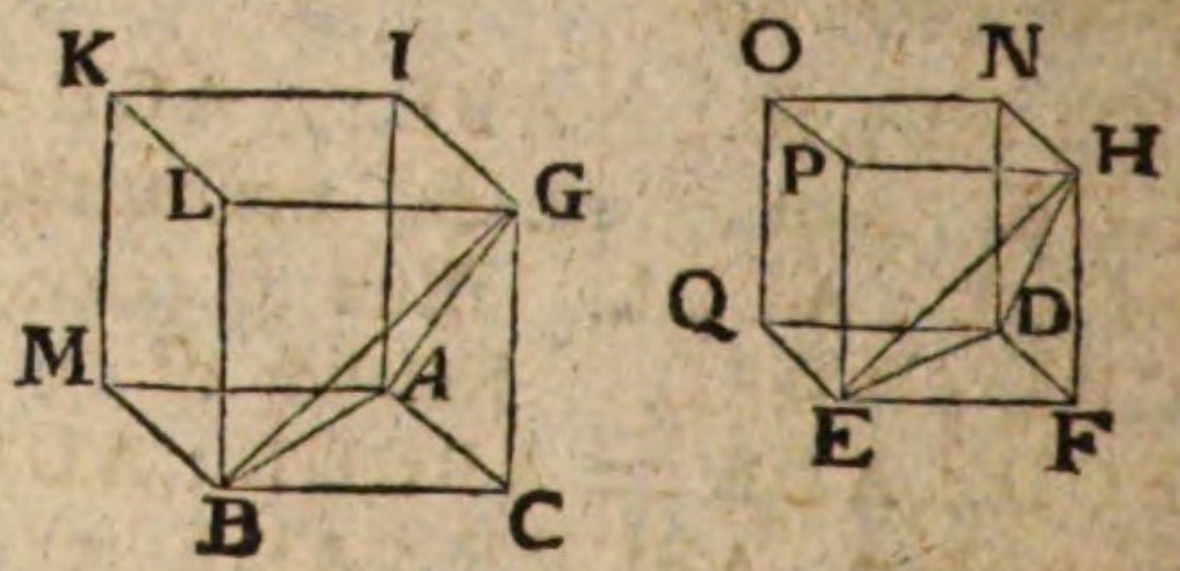
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß jede Pyramide der dritte Theil eines Prismatis sey, welches mit ihr einerley Grundfläche und gleiche Höhe hat. Denn wenn das Prisma auch vieleckig wäre, so kann es in lauter dreyeckige getheilt werden.

Der 8. Satz.

Aenliche dreyeckige Pyramiden, ABCG, DEFH, sind in dreyfach höherer Verhältniß ihrer homologen Seiten, BC, EF.

Vollende die Parallelepipeda, BI, EN, so ist, weil die Pyramiden einander änlich, (11, 9. Def.) BCA = EFD, ACG = DFH, BCG = EFH, und BC : EF = AC : DF = GC : HF. Folglich ist (6, 1. Def.) CM ∼ FQ, CI ∼ FN, CL ∼ FP. Nun sind in jedem Parallelepipedon (11, 24. S.) den drey genannten Ebnen die gegenüberliegenden gleich und änlich. Folglich ist (11, 9. Def.) BI ∼ EN, folglich (11, 33. S.) BI : EN = (BC : EF)³.



Da ein Prisma die Hälfte des Parallelepipedons, und die Pyramide der dritte Theil des Prismatis: so ist die Pyramide der sechste Theil des Parallelepipedons. Demnach ist Pyr. ABCG : Pyr. DEFH = BI : EN = (BC : EF)³.

Zusatz.

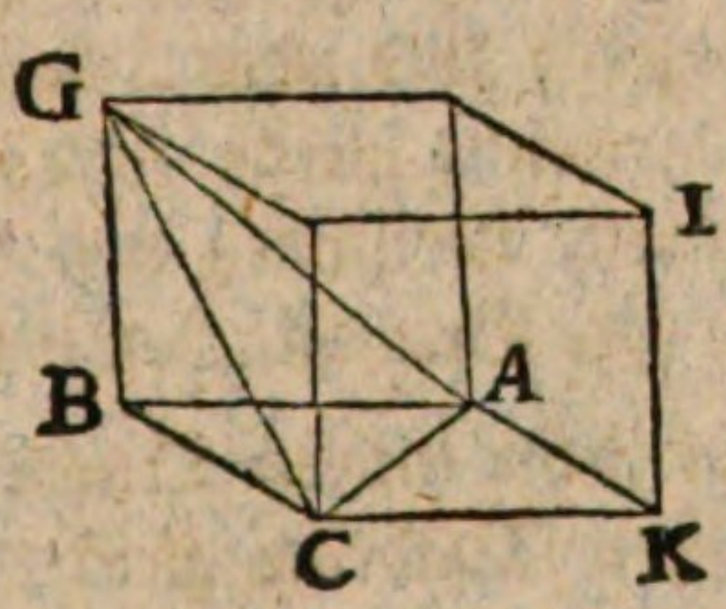
Zusatz.

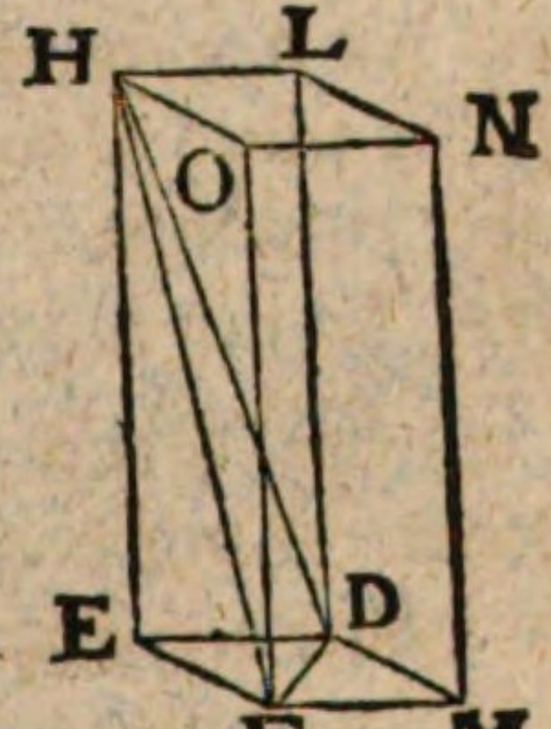
Hieraus erhellet, daß auch ähnliche vieleckige Pyramiden in dreyfach höherer Verhältniß ihrer homologen Seiten sind. Denn wenn man die vieleckigen Pyramiden in lauter dreyeckige zerlegt, indem sich (6, 20. S.) ähnliche Polygone in gleich viele ähnliche Triangel theilen lassen, die den ganzen Polygonen homolog sind: so verhalten sich alle dreyeckige Pyramiden in der einen, zu allen dreyeckigen in der andern, das ist, die eine vieleckige Pyramide, zu der andern, wie eine dreyeckige Pyramide in der einen, zu einer dreyeckigen in der andern. Nun sind die dreyeckigen Pyramiden in dreyfach höherer Verhältniß ihrer homologen Seiten; folglich auch die vieleckigen.

Der 9. Satz.

Wenn dreyeckige Pyramiden, ABCG, DEFH, einander gleich sind: so sind ihre Grundflächen, ABC, DEF, in umgekehrter Verhältniß ihrer Höhen. Und, wenn die Grundflächen in umgekehrter Verhältniß der Höhen sind: so sind die Pyramiden einander gleich.

Vollende die Parallelepipeda, BI, EN, welche mit den Pyramiden gleiche Höhe haben.





Erster Theil.

Wenn ABCG = DEFH, so ist, weil die Pyramide der sechste Theil des Parallelepipedons, (5, 15. S.) auch BI = EN. Folglich sind (11, 34. S.) die Grundflächen, BK, EM, und daher auch (1, 34. S.) die Triangel, ABC, DEF, in umgekehrter Verhältniß der Höhen.

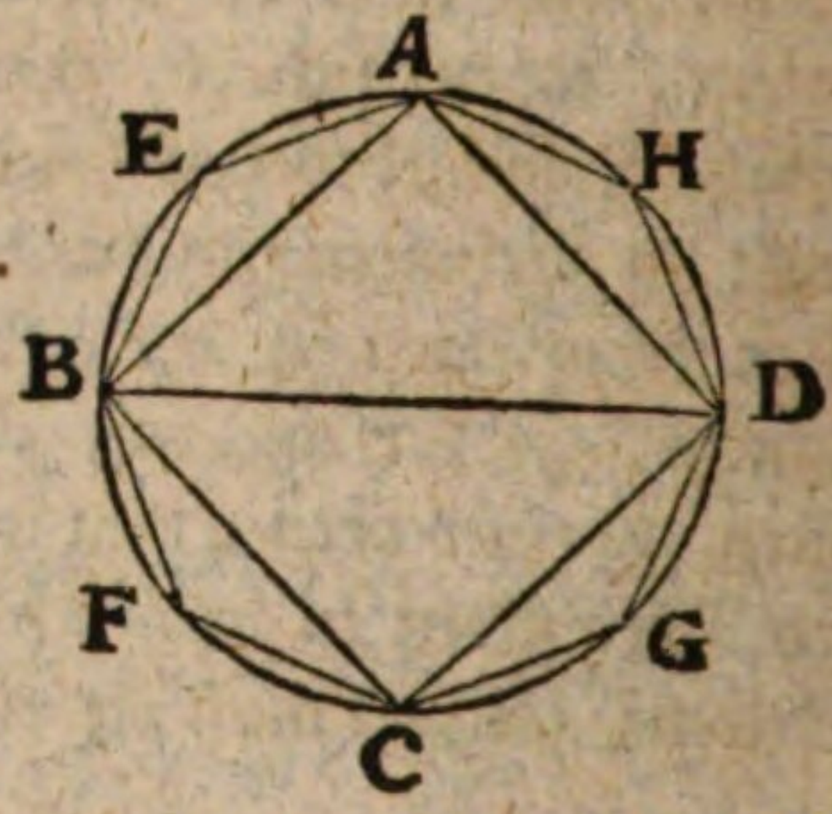
Zweyter Theil.

Wenn die Grundflächen, ABC, DEF, folglich auch (1, 34. S.) BK, EM, in umgekehrter Verhältniß der Höhen sind: so ist (11, 34. S.) BI = EN. Nun ist die Pyramide der sechste Theil des Parallelepipedons. Folglich ist auch (5, 15. S.) Pyr. ABCG = Pyr. DEFH.

Der 10. Satz.

Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, welcher mit ihm einerley Grundfläche, ABCD, und gleiche Höhe hat.

Wäre der Kegel nicht der dritte Theil des Cylinders, das ist, wäre nicht der Konus $= \frac{1}{3}$ Cyl., so sey der Konus entweder grösser, oder kleiner, als $\frac{1}{3}$ Cyl.



Erster Fall.

Es sey Konus $< \frac{1}{3}$ Cyl., oder 3 Kon. $<$ Cyl., das ist, Cylinder $=$ 3 Kon. $+$ X.

Beschreibe in den Cirkel, welcher die Grundfläche des Cylinders und Kegels ist, das Quadrat ABCD; halbire die Bogen, AB, BC, CD, DA, in den Punkten, E, F, G, H; ziehe AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA, und denke dir Tangenten durch alle Theilungspunkte, nebst den verlängerten Seiten des eingetragnen Quadrats: so ist (12, 2. S.) das innre Quadrat der Hälfte des äussern, und jeder Triangel, wie AEB, der Hälfte seines Parallelogramms gleich. Stellet man nun, auf die daher entstandnen Figuren, Prismata von der Höhe des Cylinders, die sich daher wie ihre Grundflächen verhalten: so ist

1.) das Prisma auf dem innern Quadrate der Hälfte des Prismatis auf dem äussern Quadrate gleich; folglich grösser als die Hälfte des Cylinders.

2.) das Prisma auf einem jeden Triangel, wie AEB, der Hälfte des Prismatis auf dem ihm zugehörigen Parallelogramm gleich; folglich grösser als die Hälfte des Abschnitts vom Cylinder, dessen Basis das Segment BEA ist.

Setzet man nun die angefangene Theilung fort, so bleiben zuletzt Abschnitte vom Cylinder übrig, die (10, 1. S.) zusammen kleiner sind als jede Grösse, X. Gesetzt, dies sey geschehen, so ist, weil Cylinder $=$ 3 Kon. $+$ X, das Prisma von der Höhe des Cylinders, dessen Basis das Polygon AEBFCGDH, $>$ 3 Kon. Nun ist (12, 7. S.) eine Pyramide, von gleicher Höhe und Grundfläche, der dritte Theil des Prismatis. Folglich wäre

solche

solche Pyramide grösser als 1 Konus von eben der Spitze, dessen Basis der Cirkel ABCD, das ist, ein Theil grösser als das Ganze, welches unmöglich.

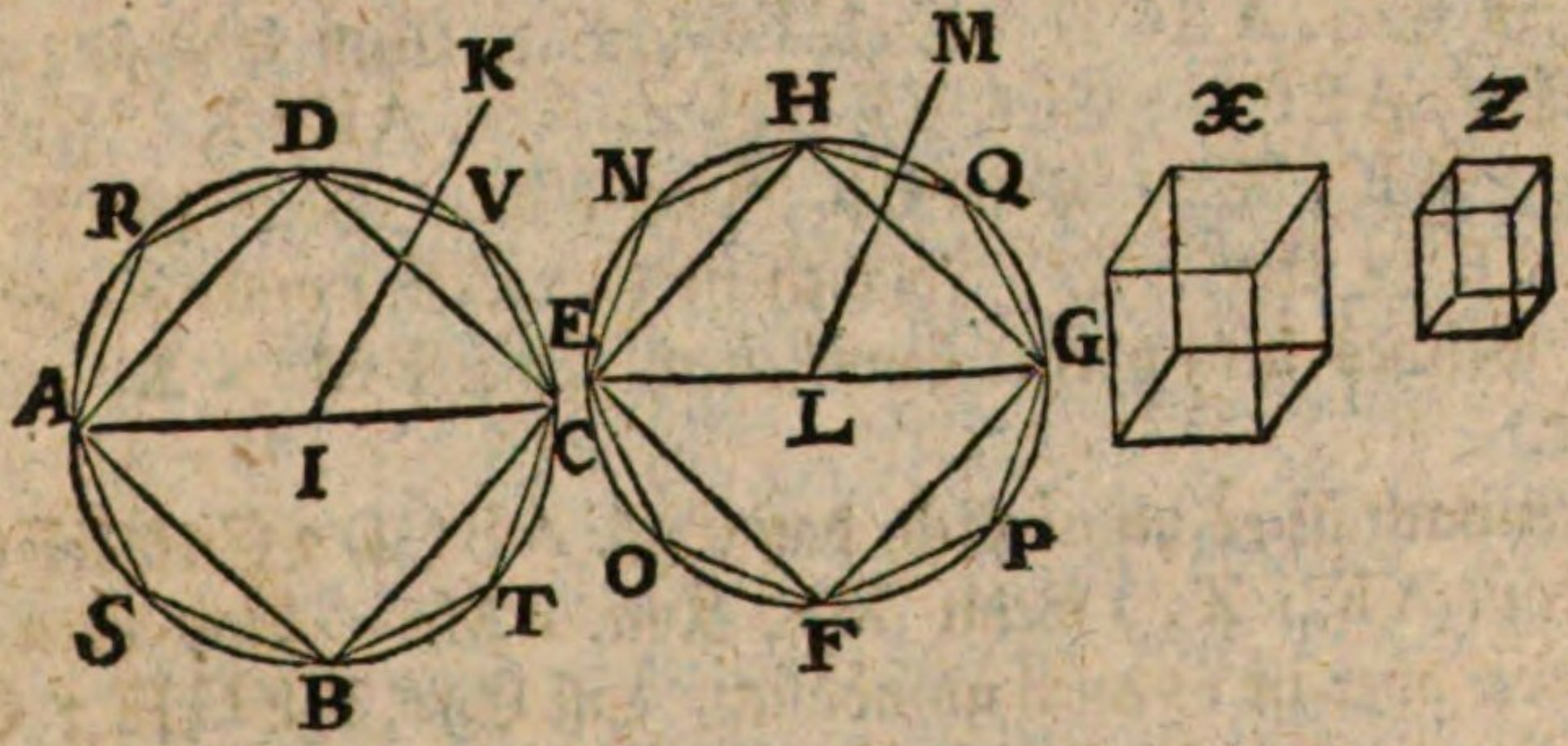
Zweyter Fall.

Es sey Konus $> \frac{1}{3}$ Cyl. und daher Konus $= \frac{1}{3}$ Cyl. + X.

Auf eben die Art, wie beym ersten Falle vom Cylinder Abschnitte gemacht worden, mache auch hier Abschnitte vom Kegel, welche aus eben den Gründen zusammen kleiner sind als jede Grösse, X. Folglich ist aus gleichen Gründen die Pyramide von der Höhe des Cylinders, deren Basis das Polygon AEBFCGDH, $> \frac{1}{3}$ Cyl. Nun ist (12, 7. S.) ein Prisma, von selbiger Höhe und Basi, dreymal so groß als diese Pyramide. Demnach wäre solches Prisma grösser als der Cylinder, das ist, ein Theil grösser als das Ganze, welches unmöglich.

Der 11. Satz.

Kegel, wie auch Cylinder, AK, EM, von gleicher Höhe, IK, LM, verhalten sich wie ihre Grundflächen, ABCD, EFGH.

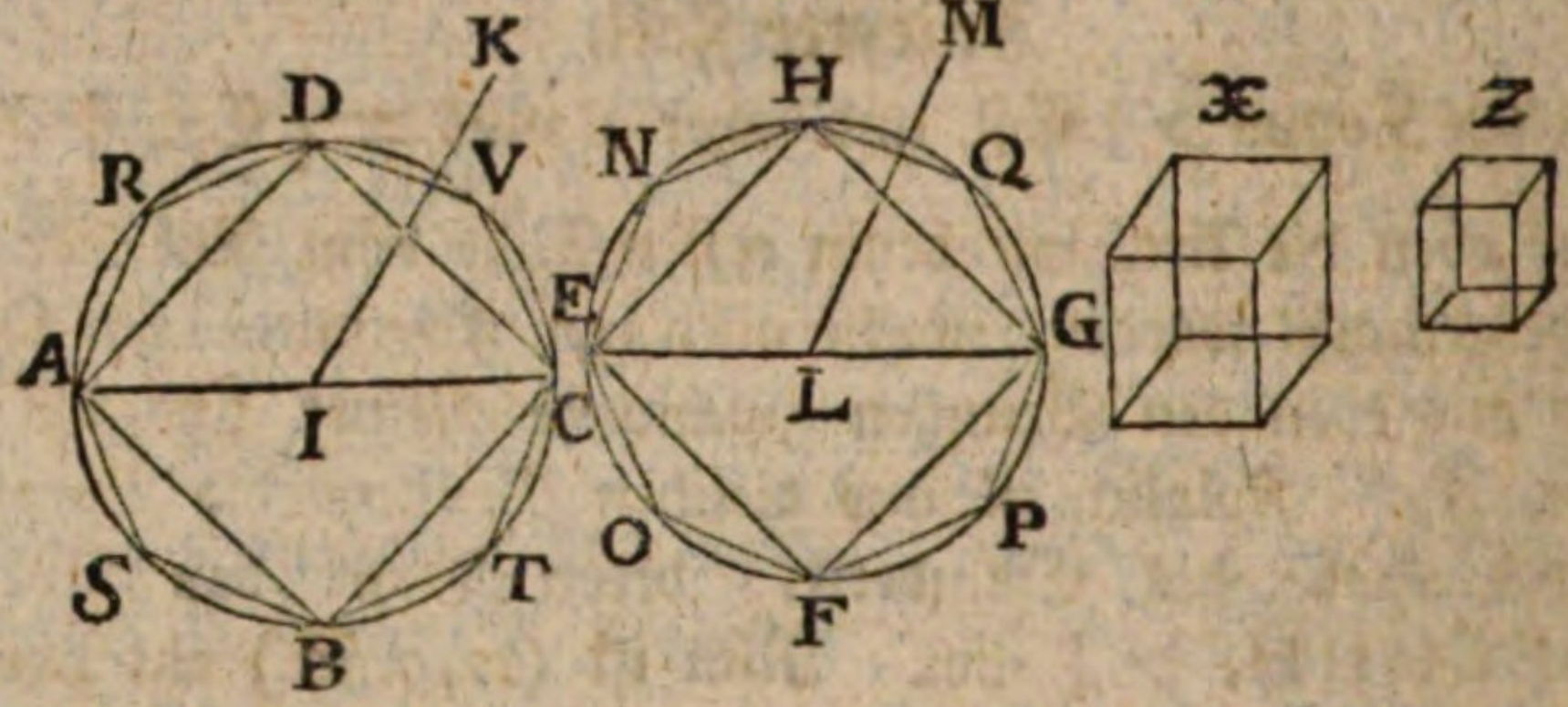


Da (12, 10. S.) ein Cylinder dreymal so groß ist als ein Kegel von einerley Grundfläche und Höhe: so verhalten sich die Cylinder, wie die Kegel. Demnach wird dieser Satz, wenn er von Kegeln bewiesen ist, auch von Cylindern gelten.

Wäre nun nicht Cirk. ABCD : Cirk. EFGH = Kon. AK : Kon. EM, so sey Cirk. ABCD : Cirk. EFGH = Kon. AK : X, so daß X entweder grösser, oder kleiner als Kon. EM.

Erster Fall.

Es sey Cirk. ABCD : Cirk. EFGH = Kon. AK : X, so daß X < Kon. EM.



Construire alles, wie beym vorhergehenden Satze, so ist auch hier die Pyramide, FM, deren Spitze M, und deren Basis das Polygon HNEFPGQ, > X. Beschreibe hierauf in den Cirkel, ABCD, ein diesem ähnliches Polygon, DRASBTCV, und stelle auf dasselbe eine Pyramide, BK, deren Spitze, K, welche daher mit der vorigen gleiche Höhe hat.

Da (12, 1. und 2. S.) die Polygone sowohl, als die Cirkel, sich wie die Quadrate der Durchmesser verhalten, und (12, 6. S.) die Pyramiden, wie ihre Grundflächen: so ist Pyr. BK : Pyr. FM = Cirk. ABCD : Cirk. EFGH. Nun war angenommen Cirk. ABCD : Cirk. EFGH = Kon. AK : X. Folglich ist Kon. AK : X = Pyr. BK : Pyr. FM. Nun ist offenbar Kon. AK > Pyr. BK. Folglich ist (5, 14. S.) auch X > Pyr. FM, welches dem vorher bewiesenen, Pyr. FM > X, widerspricht.

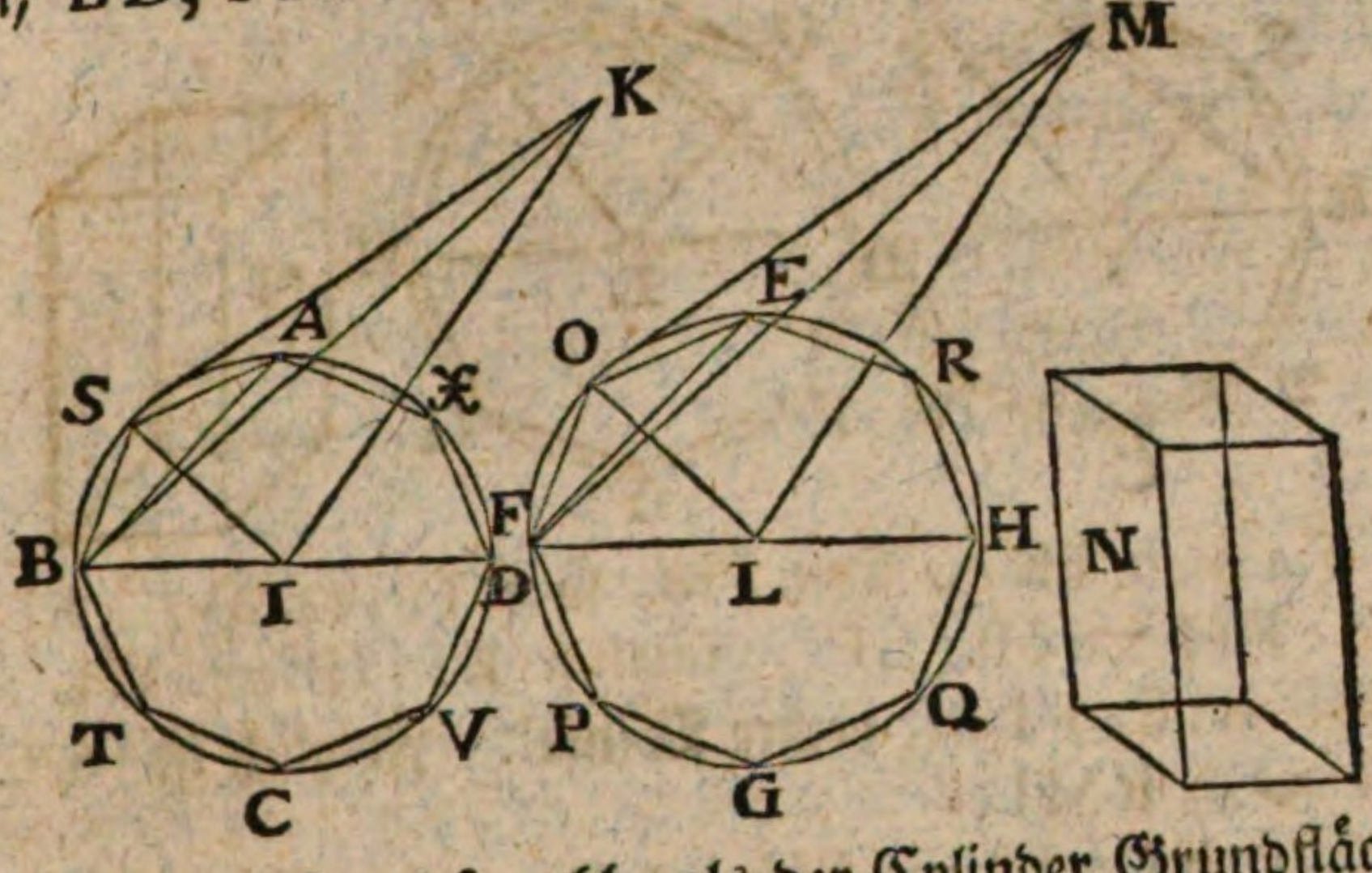
Demnach ist es unmöglich, daß Cirk. ABCD : Cirk. EFGH = Kon. AK : X, wenn X < Kon. EM. Aus eben den Gründen aber ist es auch unmöglich, daß Cirk. EFGH : Cirk. ABCD = Kon. EM : Y, wenn Y < Kon. AK.

Zweyter Fall.

Es sey Cirk. ABCD : Cirk. EFGH = Kon. AK : X, wenn X > Kon. EM. Demnach ist auch Cirk. EFGH : Cirk. ABCD = X : Kon. AK. Nun mache man X : Kon. AK = Kon. EM : Y, so daß, weil X > Kon. EM, (5, 14. S.) auch Kon. AK > Y. Folglich ist Cirk. EFGH : Cirk. ABCD = Kon. EM : Y, welches, weil Y < Kon. AK, nach dem ersten Falle unmöglich.

Der 12. Satz.

Aenliche Kegel, wie auch Cylinder, BK, FM, sind in dreyfach höherer Verhältniß der Durchmesser ihrer Grundflächen, BD, FH.



Es seyen der Kegel sowohl, als der Cylinder Grundflächen die Cirkel ABCD, EFGH, und ihre Axen, IK, LM. Nun ist (12, 10. S.) ein Cylinder dreymal so groß, als ein Kegel von nämlicher Grundfläche und Höhe. Folglich verhalten sich die Cylinder wie die Kegel.

Wäre nun nicht $(BD : FH)^3 = \text{Kon. } BK : \text{Kon. } FM$, so sey $(BD : FH)^3 = \text{Kon. } BK : N$, so daß N entweder grösser, oder kleiner als Kon. FM.

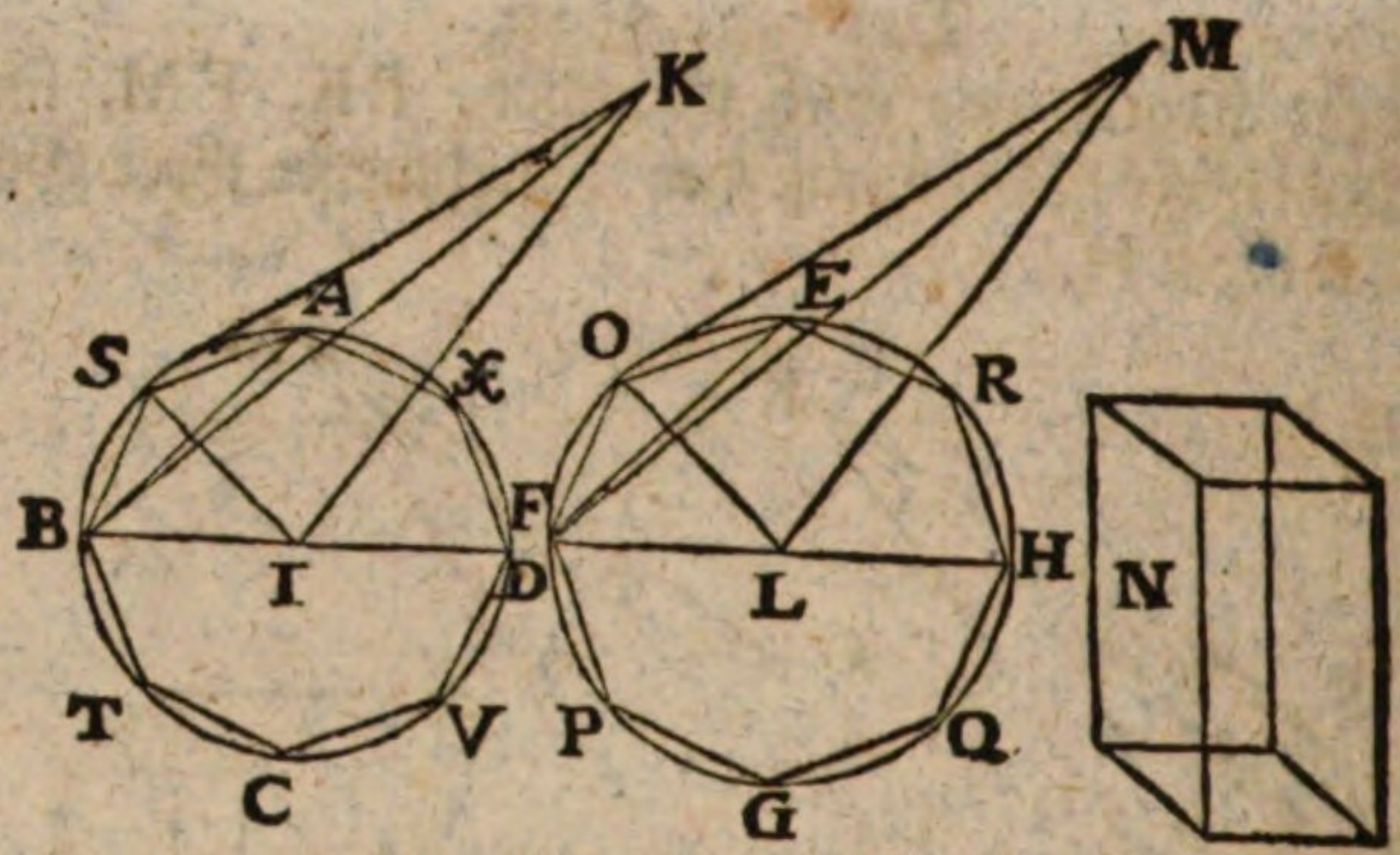
Erster Fall.

Es sey $(BD : FH)^3 = \text{Kon. } BK : N$, so daß $N < \text{Kon. } FM$.

Construire im Cirkel, EFGH, alles wie beym zehnten Satze, so ist auch hier die Pyramide, GM, deren Spitze, M, und deren Basis das Polygon EOFPGQHR, $> N$. Beschreibe in den Cirkel, ABCD, ein diesem änliches Polygon, ASBTCVDX, und stelle auf dasselbe eine Pyramide CK, deren Spitze K. Eine Seite der Pyramide CK sey $\triangle BSK$, und eine Seite der Pyramide GM sey $\triangle OFM$. Ziehe SI, OL, so sind (11, 9. Def.) die dreyeckigen Pyramiden, BISK, FLOM, einander änlich, weil sie von gleich vielen änlichen Flächen begrenzt werden. Denn

1.) Da $BI = IS$, und $FL = LO$, folglich $BI : IS = FL : LO$, aber auch, weil die Polygone änlich, $BIS = FLO$, so ist (6, 6. S.) $\triangle BIS \sim \triangle FLO$.

2.) Da



2.) Da Kon. BK ∼ Kon. FM, so ist (11, 24. Def.) KI : ML = BD : FH = IB : LF, folglich KI : IB = ML : LF. Nun sind BIK, FLM, rechte Winkel. Folglich ist (6, 6. S.) △ BKI ∼ △ FML.

3.) Da KI : IB = ML : LF, aber IB = IS, und LF = LO, so ist KI : IS = ML : LO. Nun sind SIK, OLM, rechte Winkel. Folglich ist (6, 6. S.) △ SKI ∼ △ OML.

4.) Da △ BKI ∼ △ FML, und △ BIS ∼ △ FLO, so ist (6, 1. Def.) KB : BI = MF : FL, und BI : BS = FL : FO, folglich (5, 22. S.) KB : BS = MF : FO.

Eben so, weil △ SKI ∼ △ OML, und △ BIS ∼ △ FLO, so ist KS : SI = MO : OL, und SI : SB = OL : OF, folglich KS : SB = MO : OF.

Endlich, wenn beyde Proportionen verglichen werden, ist (5, 22. S.) auch KS : KB = MO ; MF. Folglich ist (6, 5. S.) △ BKS ∼ △ FMO.

Da also, nach dem jetzt erwiesenen, die Pyr. BISK ∼ Pyr. FLOM, so ist (12, 8. S.) Pyr. BISK : Pyr. FLOM = (BI : FL)³ = (BD : FH)³. Ziehet man nun von allen Punkten der Peripherie, wie von S und O gerade Linien nach den Mittelpunkten I und L, und stellet auf den daher entstehenden Triangeln Pyramiden, deren Spitze K und M: so wird aus gleichen Gründen, diese Verhältniß (BD : FH)³ von jedem Paare dieser Pyramiden gelten. Nun ist (5, 12. S.) eine Pyramide BISK, beym ersten Cirkel, zu einer Pyramide FLOM, beym zweyten Cirkel, wie alle Pyramiden beym ersten Cirkel, zu

allen

allen Pyramiden beym zweyten, das ist, wie die ganze Pyramide, CK, zur ganzen Pyramide, GM. Demnach ist $(BD : FH)^3 =$ Pyr. CK : Pyr. GM. Nun war angenommen $(BD : FH)^3 =$ Kon. BK : N. Folglich ist Kon. BK : N = Pyr. CK : Pyr. GM. Nun ist offenbar Kon. BK > Pyr. CK. Folglich ist (5, 14. S.) auch N > Pyr. GM, welches dem vorherbewiesenen Pyr. GM > N widerspricht.

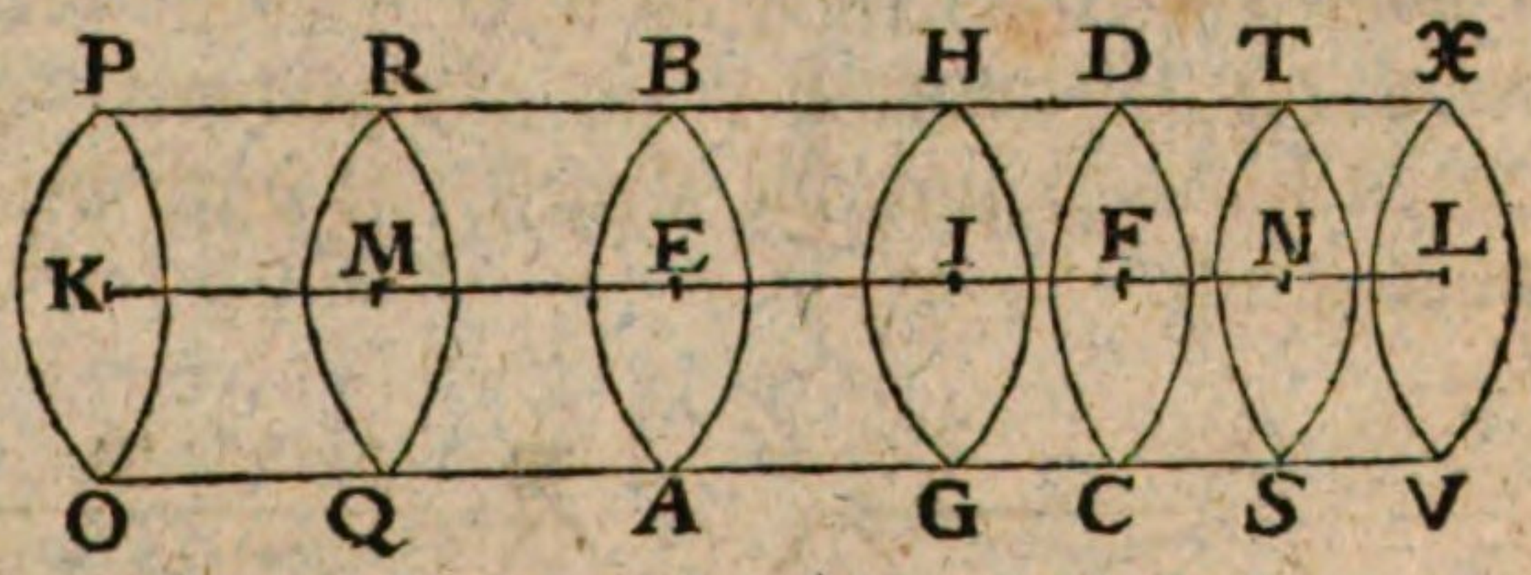
Demnach ist es unmöglich, daß $(BD : FH)^3 =$ Kon. BK : N, wenn N < Kon. FM. Aus eben den Gründen aber ist es auch unmöglich, daß $(FH : BD)^3 =$ Kon. FM : Z, wenn Z < Kon. BK.

Zweyter Fall.

Es sey $(BD : FH)^3 =$ Kon. BK : N, so daß N > Kon. FM. Demnach ist auch $(FH : BD)^3 =$ N : Kon. BK. Nun mache man N : Kon. BK = Kon. FM : Z, so daß, weil N > Kon. FM, (5, 14. S.) auch Kon. BK > Z. Folglich ist $(FH : BD)^3 =$ Kon. FM : Z, welches, weil Z < Kon. BK, nach dem ersten Falle unmöglich.

Der 13. Satz.

Wenn ein Cylinder, AD, mittelst einer Ebne, HG, den einander gegenüberliegenden Grundflächen, AB, CD, parallel geschnitten wird: so verhalten sich die daher entstehenden Cylinder, AH, GD, wie ihre Axen, EI, IF.



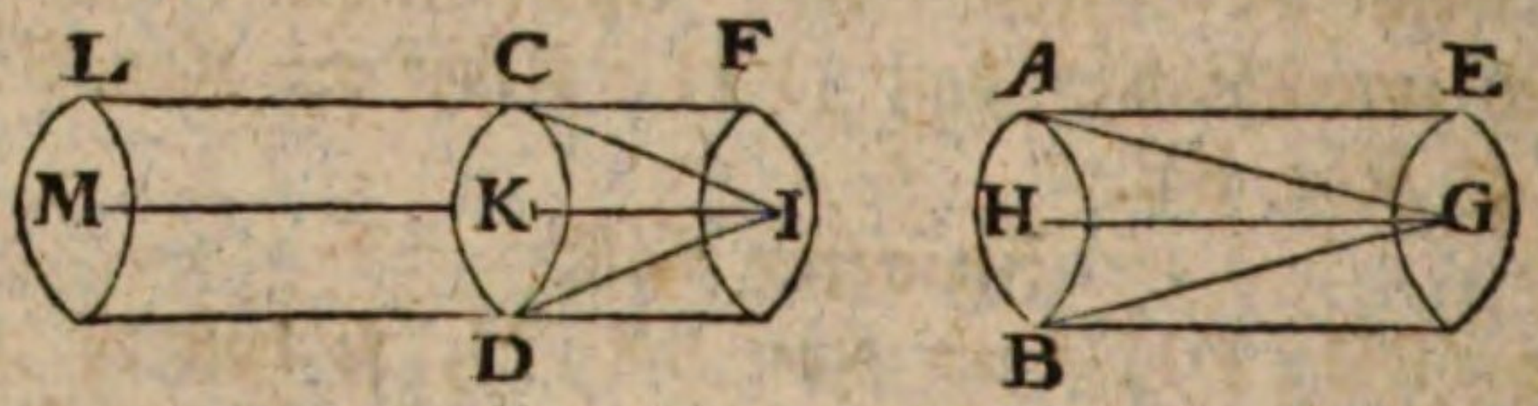
Verlängre die Axe EF an beyden Seiten und mache EM, MK, der EI, desgleichen FN, NL, der IF gleich. Durch M, K, N, L, lege Ebnen der Grundflächen, AB, CD, parallel und gleich, und vollende die Cylinder.

Da die Axen an jeder Seite gleich sind, so verhalten sich (12, 11. S.) die Cylinder, wie ihre Grundflächen. Nun sind diese gleich. Folglich sind die Cylinder auch gleich, nämlich HA = AR = RO, desgleichen HC = CT = TV. Folglich ist KI von EI eben so vielfach, als OH von AH, desgleichen IL von IF eben so vielfach, als GX von GD, das

ist, KI, OH, sind von EI, AH; und IL, GX, von IF, GD, das Gleichvielfache. Nun ist wie KI ≷ IL, eben so auch QH ≷ GX. Folglich ist (5, 5. Def.) EI : IF = AH : GD.

Der 14. Satz.

Kegel, ABG, CDI, wie auch Cylinder, EB, FD, von gleichen Grundflächen, AB, CD, verhalten sich wie die Höhen, GH, IK.

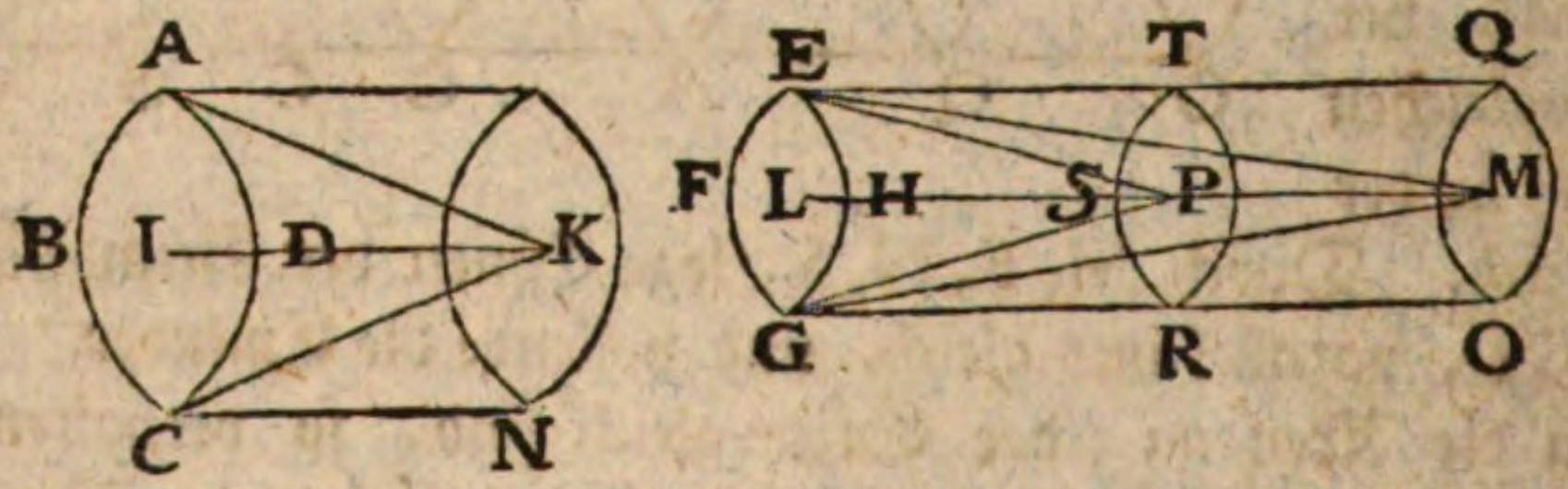


Da (12, 10. S.) ein Kegel der dritte Theil des Cylinders, so verhalten sich die Kegel, wie die Cylinder.

Verlängre IK nach M, mache KM = GH, und vollende den Cylinder, DL, so ist, weil Grundflächen und Axen gleich, (12, 11. S.) DL = EB. Nun ist (12, 13. S.) KM : IK = DL : FD. Demnach ist auch GH : IK = EB : FD.

Der 15. Satz.

Wenn Kegel, ACK, EGM, wie auch Cylinder, AN, EO, einander gleich sind: so sind ihre Grundflächen, AC, EG, in umgekehrter Verhältniß ihrer Höhen, IK, LM. Und wenn die Grundflächen in umgekehrter Verhältniß der Höhen sind: so sind die Kegel, wie auch die Cylinder, einander gleich.



Auch hier braucht der Beweiß nur von den Cylindern geführt zu werden.

Erster Theil.

Wenn die Cylinder, AN, EO, einander gleich sind, so sind ihre Höhen, IK, LM, entweder gleich oder ungleich.

Ist

Ist IK = LM, so ist (12, 11. S.) AN : EO = AC : EG. Nun ist AN = EO. Folglich ist auch AC = EG, und daher AC : EG = LM : IK.

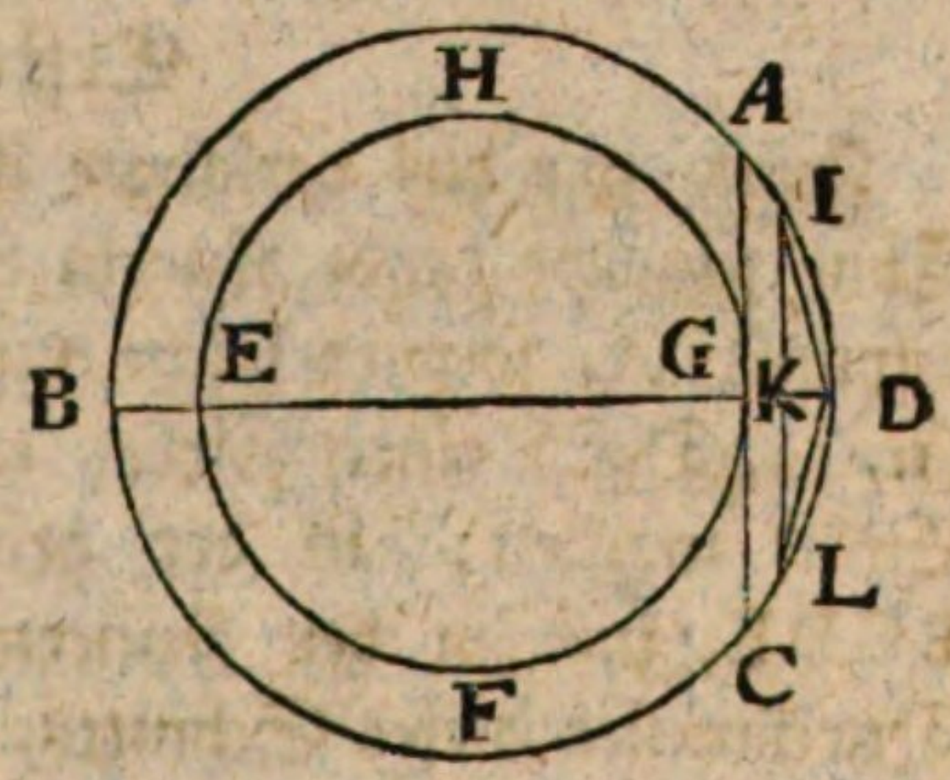
Ist LM > IK, so mache LP = IK, und lege durch P, die Ebne TR, den Grundflächen, EG, QO, parallel. Da AN = EO, so ist (5, 7. S.) AN : ER = EO : OR. Nun ist IK = LP, und TR den Grundflächen parallel. Folglich ist (12, 11. S.) AN : ER = AC : EG, und (12, 13. S.) EO : ER = LM : LP. Demnach ist AC : EG = LM : LP = LM : IK.

Zweyter Theil.

Wenn AC : EG = LM : IK, so ist nach der vorigen Construction AC : EG = LM : LP. Nun ist (12, 11. S.) AC : EG = AN : ER, und (12, 13. S.) LM : LP = EO : ER. Demnach ist AN : ER = EO : ER, folglich (5, 9. S.) AN = EO.

Der 16. Satz.

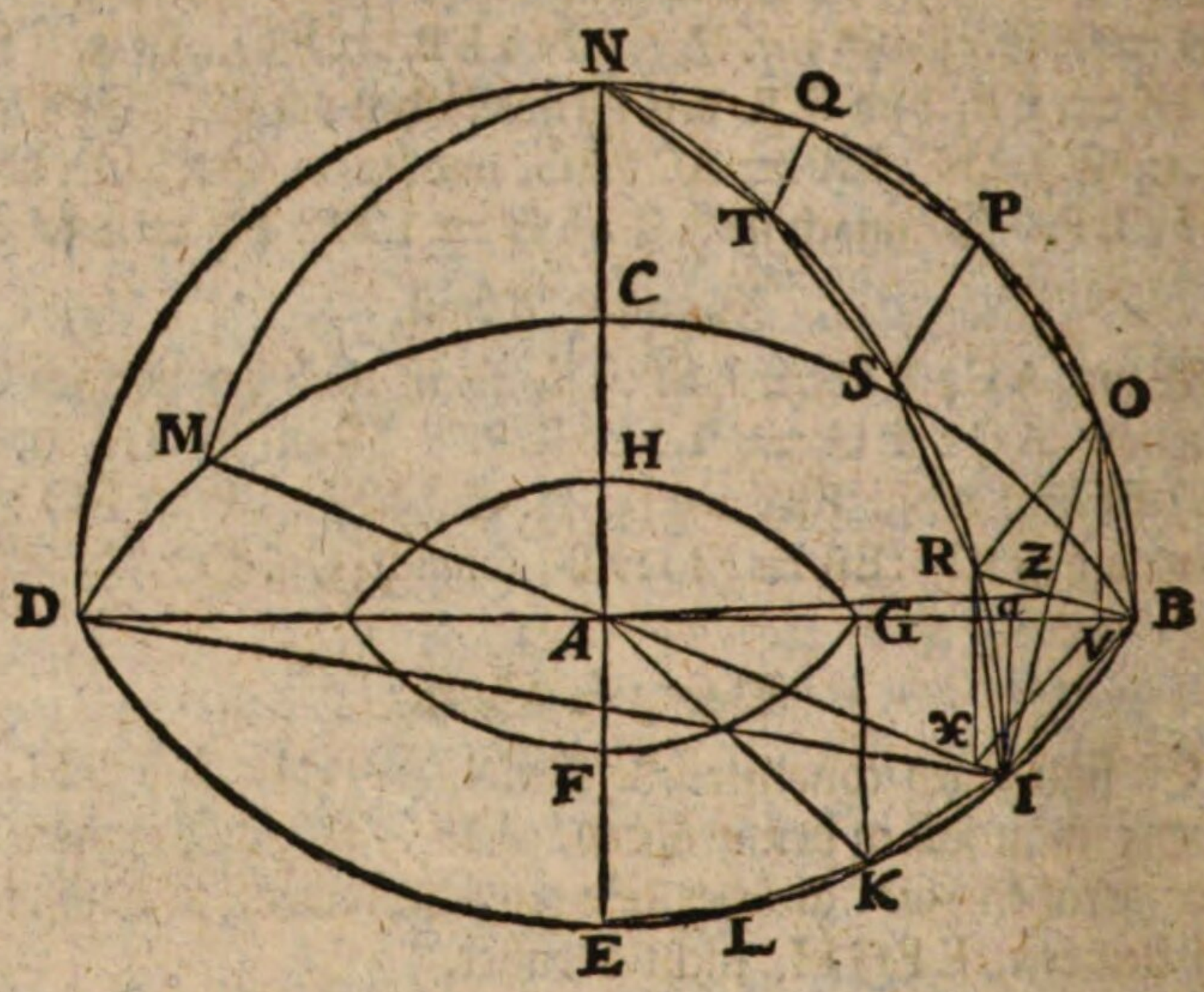
Es sind zwey concentrische Cirkel, ABCD, EFGH, gegeben; man soll in den grössern, ABCD, ein Polygon von einer geraden Zahl gleicher Seiten beschreiben, so daß solches den kleinern, EFGH, nicht berühre.



Ziehe den Durchmesser, BD, und errichte auf demselben die AC in G senkrecht, welche (3, 16. S.) eine Tangente des kleinern Cirkels, EFGH, ist. Theile die Peripherie, BAD, durch fortgesetzte Halbirungen, so bleibt zuletzt ein Stück, ID, welches (10, 1. S.) kleiner als AD. Fälle von I die IKL auf BD senkrecht, und ziehe ID, DL, so ist ID = DL, und IL der AC parallel. Demnach berührt AC, aber nicht IL, und noch weniger ID, DL, den kleinern Cirkel, EFGH. Werden nun in den grössern Cirkel, ABCD, gerade Linien, die der ID gleich sind, eingetragen: so wird ein Polygon von einer geraden Zahl gleicher Seiten in den grössern Cirkel, ABCD, beschrieben, welches den kleinern Cirkel, EFGH, nicht berühret.

Der 17. Satz.

Es sind zwey concentrische Kugeln gegeben; man soll in die grössere ein Polyedron beschreiben, so daß solches die Oberfläche der kleinern nicht berühre.



Erster Theil,

Zeigt, wie das verlangte Polyedron zu construiren. Eine Ebne schneide beyde Kugeln durch ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt, A, so wird solche auf der Oberfläche der beyden Kugeln (11, 14. Def.) einen Cirkel, und zwar (3, 15. S.) einen gröften Cirkel machen; in der grössern Kugel nämlich den Cirkel, BCDE, und in der kleinern den Cirkel, FGH. Ziehe die Durchmesser dieses Schnitts, BD, CE, senkrecht auf einander. Beschreibe (12, 16. S.) in den grössern Cirkel, BCDE, ein Polygon von einer geraden Zahl gleicher Seiten, welches den kleinern concentrischen Cirkel, FGH, nicht berühre. Dieses Polygons Seiten, im Quadranten BE, seyen BI, IK, KL, LE. Ziehe IA und verlängre sie bis M. Errichte in A die AN auf der Cirkelebne, BCDE, senkrecht, welche in N die Oberfläche der grössern Kugel treffe. Durch AN, und jeden der beyden Durchmesser, BD, IM, lege Ebnen, welche, nach dem bereits erwiesenen, auf der Oberfläche der Kugel gröste Cirkel machen werden.

Die

Die Hälften dieser grösten Cirkel seyen BND, INM, welche, (11, 18. S.) so wie AN, auf der Ebne, BCDE, senkrecht sind.

Da BD = IM = CE, so sind die halben Cirkel, BND, INM, BED, und daher auch die Quadranten, BN, IN, BE, einander gleich. So viele Seiten des Polygons also in BE sind, so viele von gleicher Grösse können auch in BN, und IN, seyn. Beschreibe dieselben, nämlich BO, OP, PQ, QN; IR, RS, ST, TN, und ziehe RO, SP, TQ, welche der IB parallel seyn werden. Denn wenn man von O, und R, auf die Ebne, BCDE, die Perpendikel, OV, RX, fället, welche (11, 38. S.) die Durchschnittslinien, BD, IM, treffen, und man ziehet noch VX: so ist, weil auch BND = INM, und BO = IR, (1, 26. S.) OV = RX, und BV = IX. Folglich, da auch AB = AI, ist (6, 2. S.) VX der IB parallel. Nun ist, weil OV, RX, einander gleich, und (11, 6. S.) parallel, (1, 33. S.) auch VX der RO parallel. Folglich ist (11, 9. S.) RO der IB parallel. Eben so wird auch bewiesen, daß SP der RO, und TQ der SP parallel sey.

Da RO, IB, parallel, so ist (11, 7. S.) die vierseitige Figur, IBOR, in Einer Ebne. Aus gleichem Grunde ist auch jede der übrigen, ROPS, SPQT, aber auch (11, 2. S.) der △NQT, in Einer Ebne.

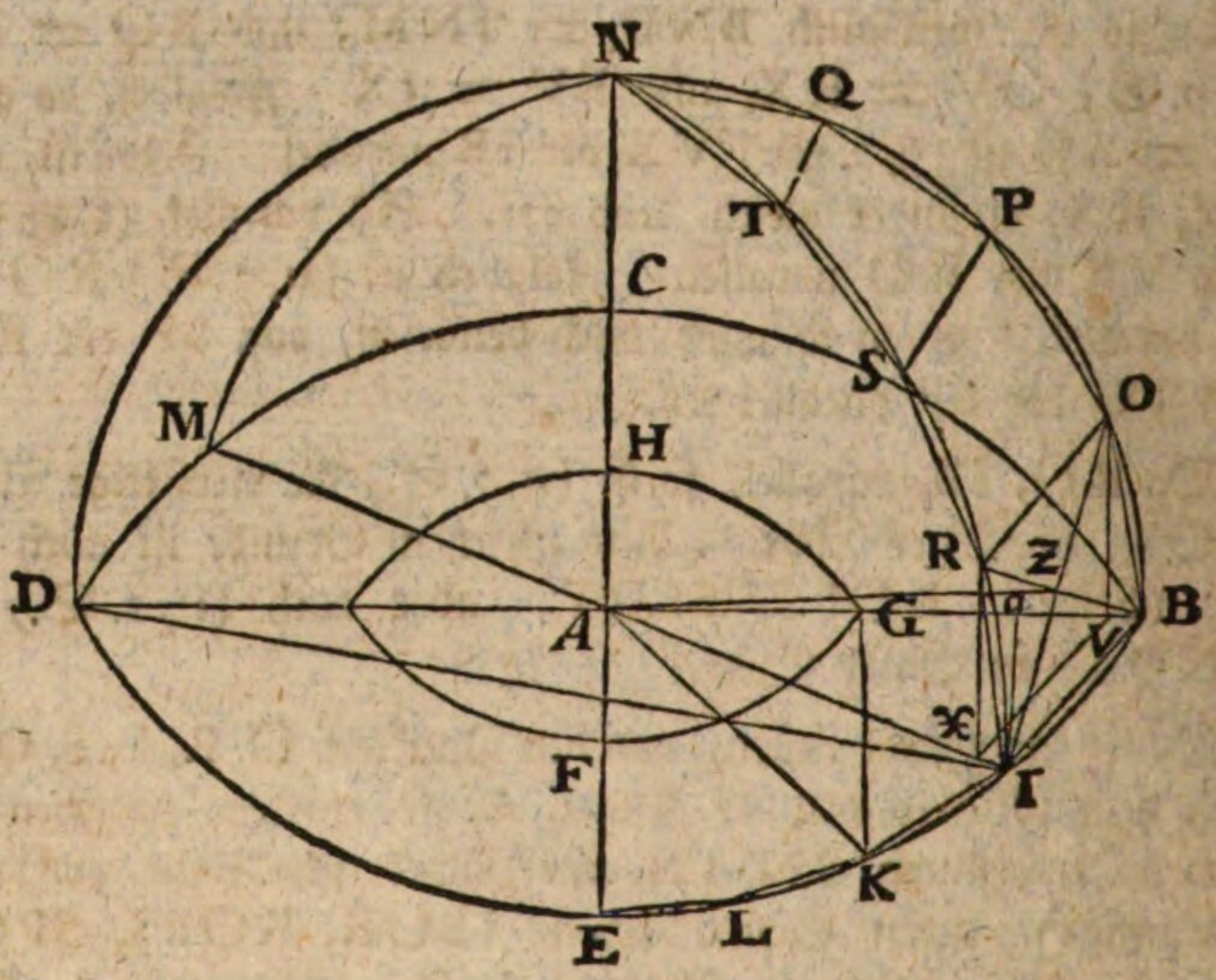
Denke dir gerade Linien, von den Punkten, O, R, P, S, Q, T, nach dem Mittelpunkt der Kugel, A, so entsteht zwischen den beyden Quadranten, BN, IN, eine Polyedrische Figur, aus lauter Pyramiden, deren Grundflächen, IBOR, ROPS, SPQT, NQT, sind, und deren Scheitel A ist. Wird nun im Quadranten, BE, auf jeder der Seiten, IK, KL, LE, eben eine solche Construction gemacht, wie auf BI, und in den drey übrigen Quadranten, BC, CD, DE, wie in BE, und in der andern Halbkugel, wie in dieser: so entsteht in der grössern Kugel ein Polyedron, welches aus lauter Pyramiden von obgedachter Art zusammengesetzt ist.

Zweyter Theil,

Beweißt, daß dieses Polyedron die Oberfläche der kleinern concentrischen Kugel nicht berühre. Fälle von A den Perpendikel, AZ, auf die Ebne IBOR, und ziehe in dieser Ebne die

Linien,

Linien, ZI, ZB, ZO, ZR, auf denen (11, 3. Def.) AZ auch senkrecht ist. Da AB = AI, und in den rechtwinklichen Triangeln, AZB, AZI, (1, 47. S.) □AB = □AZ + □ZB, und □AI = □AZ + □ZI, so ist ZB = ZI. Eben so wird bewiesen, daß auch ZO = ZB, und ZR = ZI. Folglich gehet ein Cirkel, der aus Z mit ZB beschrieben wird, durch alle vier Punkte, I, B, O, R, so daß also IBOR eine vierseitige Figur im Cirkel ist. Nun ist BI = IR = BO, aber BI > VX, und daher auch BI > RO. Folglich ist BZI ein stumpfer Winkel, folglich (2, 12. S.) □IB > 2 □BZ.



Von I fälle auf DB den Perpendikel Ia, und ziehe DI. Da BD < 2 Da, und (2, 1. S.) BD : DA = Rect. DBBA : Rect. DaaB = (6, 8. S.) □BI : □Ia, so ist □BI < 2 □Ia. Nun war □BI > 2 □BZ. Folglich ist 2 □BZ < 2 □Ia, oder □BZ < □Ia.

Da AB = AI, und (1, 47. S.) □AB = □AZ + □BZ, desgleichen □AI = □Aa + □Ia, so ist □AZ + □BZ = □Aa + □Ia. Nun war □BZ < □Ia. Folglich ist □AZ > □Aa, und daher AZ > Aa, folglich noch vielmehr AZ > AG.

Ein

Ein andrer Beweis, daß AZ > AG. Auf AG errichte in G den Perpendikel, GK, und ziehe AK. Theile den Bogen, BE, durch fortgesetzte Halbirungen, bis endlich ein Stück, etwa BI, übrig bleibt, welches (10, 1. S.) kleiner ist als ein Bogen, dessen Sehne GK wäre. Folglich wäre auch die Sehne BI < GK. Nun ist nach dem vorher bewiesenen BZI ein stumpfer Winkel, folglich BZ < BI. Daher ist BZ < GK, oder □BZ < □GK.

Da AB = AK, und (1, 47. S.) □AB = □AZ + □BZ, desgleichen □AK = □AG + □GK, so ist □AZ + □BZ = □AG + □GK. Nun war □BZ < □GK. Folglich ist □AZ > □AG, und daher AZ > AG.

Zusatz.

Wenn in eine andre Kugel, B, ein Polyedron beschrieben wird, welches dem in die Kugel, A, beschriebnen Polyedron ähnlich ist: so sind beyde Polyedra in dreyfach höherer Verhältniß der Durchmesser ihrer Kugeln.

Theilt man diese Polyedra in gleich viele Pyramiden einer Art, so sind diese Pyramiden einander ähnlich, folglich (12, 8. S.) in dreyfach höherer Verhältniß ihrer homologen Seiten, das ist, eine Pyramide in der Kugel, A, deren Grundfläche, IBOR, und deren Scheitel, A, ist zu einer homologen Pyramide in der Kugel, B, in dreyfach höherer Verhältniß der Halbmesser, oder Durchmesser beyder Kugeln. Nun ist aber (5, 12. S.) eine Pyramide der Kugel A, zu einer Pyramide der Kugel B, wie alle Pyramiden der Kugel A, zu allen Pyramiden der Kugel B, das ist, wie das ganze Polyedron in der Kugel A, zu dem ganzen Polyedron in der Kugel B. Demnach sind diese Polyedra auch in dreyfach höherer Verhältniß der Durchmesser ihrer Kugeln.

Der 18. Satz.

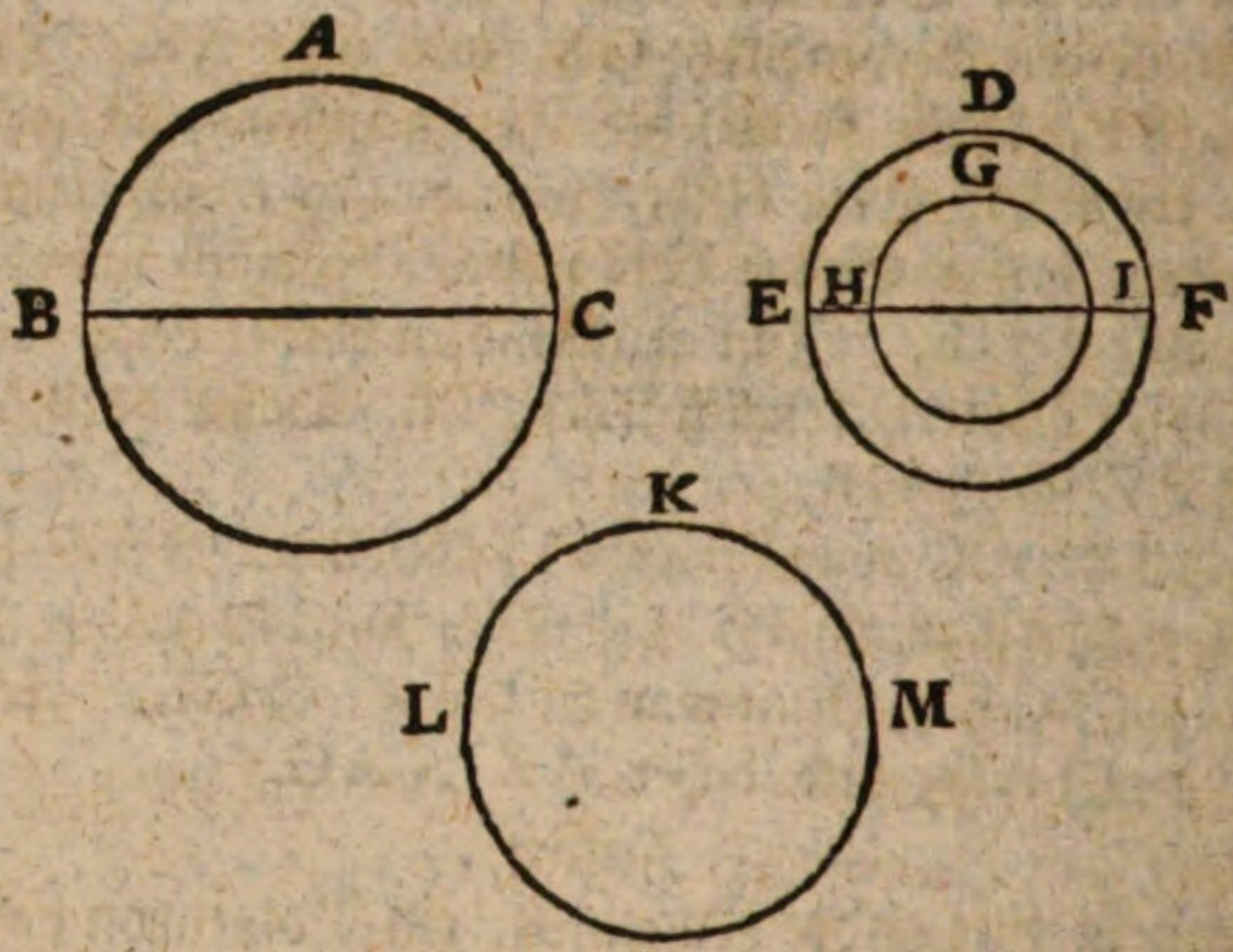
Kugeln, ABC, DEF, sind in dreyfach höherer Verhältniß ihrer Durchmesser, BC, EF.

Wäre nicht (BC : EF)³ = Kugel ABC : Kugel DEF, so sey (BC : EF)³ = Kugel ABC : X, so daß X entweder grösser, oder kleiner als die Kugel DEF.

Erster Fall.

Es sey (BC : EF)³ = Kugel ABC : X, so daß X < Kugel DEF.

Mache



Mache eine Kugel GHI = X, concentrisch mit der Kugel DEF. Beschreibe in die Kugel DEF ein Polyedron, welches die Oberfläche der Kugel GHI, nicht berühre, und in der Kugel ABC, ein dem ersten ähnliches Polyedron: so ist (12, 17. Zus.) (BC : EF)³ = Polyedr. ABC : Polyedr. DEF. Nun war (BC : EF)³ = Kugel ABC : Kugel GHI. Folglich ist Polyedr. ABC : Polyedr. DEF = Kugel ABC : Kugel GHI. Nun ist offenbar Polyedr. ABC < Kugel ABC. Folglich ist (5, 14. S.) auch Polyedr. DEF < Kugel GHI, welches offenbar falsch ist.

Demnach ist es unmöglich, daß (BC : EF)³ = Kugel ABC : X, wenn X < Kugel DEF. Aus eben den Gründen aber ist es auch unmöglich, daß (EF : BC)³ = Kug. DEF : Z, wenn Z < Kugel ABC.

Zweyter Fall.

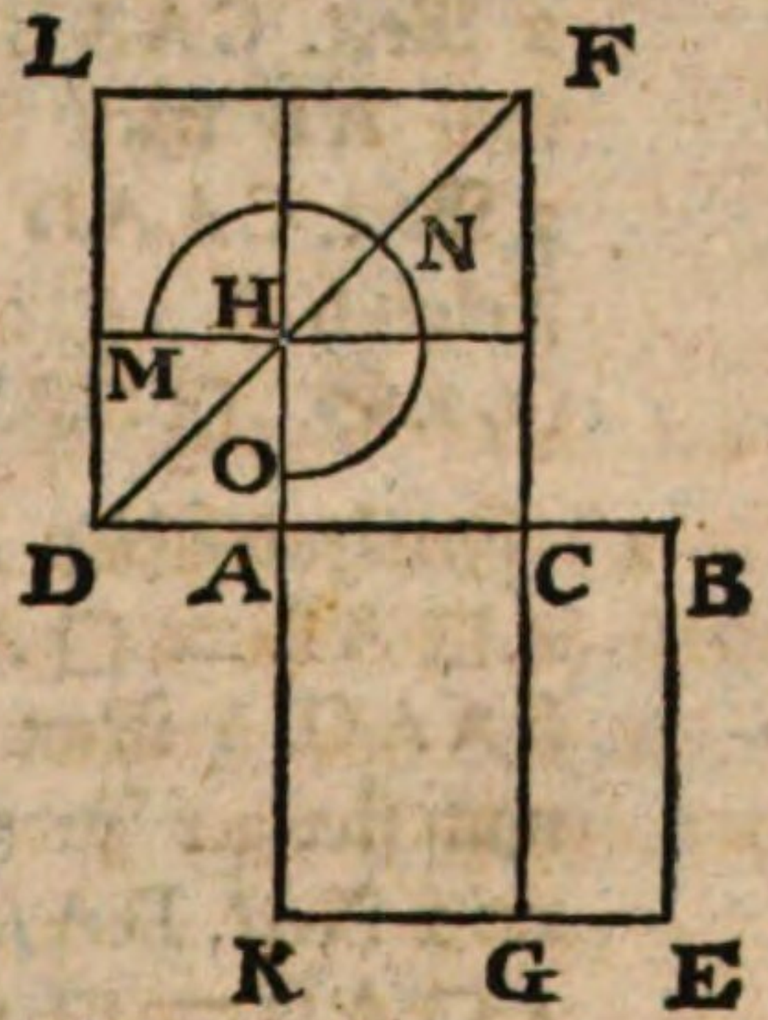
Es sey (BC : EF)³ = Kug. ABC : X, so daß X > Kug. DEF. Es sey aber X = Kugel KLM. Demnach ist auch (EF : BC)³ = Kugel KLM : Kugel ABC. Nun sey Kugel KLM : Kugel ABC = Kugel DEF : Z, so daß, weil Kugel KLM > Kugel DEF, (5, 14. S.) auch Kugel ABC > Z. Folglich ist (EF : BC)³ = Kugel DEF : Z, welches, weil Z < Kugel ABC, nach dem ersten Falle unmöglich.

Euklids Elemente

Dreyzehntes Buch.

Der 1. Satz.

Wenn eine gerade Linie, AB, nach stetiger Proportion geschnitten wird: so ist das Quadrat einer Linie, CD, welche aus dem grössern Abschnitte, CA, und aus der Hälfte von der Ganzen, AD, bestehet, fünfmal so groß als das Quadrat der Hälfte von der Ganzen, AD,



Schneide (6, 30. S.) AB nach stetiger Proportion in C, so daß (6, 3. Def.) AB : AC = AC : CB, folglich (6, 17. S.) Rect. ABBC = □ AC. Verlängre BA nach D, so daß AD = ½ AB, oder AB = 2 AD. Beschreibe auf AB, DC, die Quadrate, AE, DF. Verlängre FC, KA, und vollende (2, 4. S.) die Figur.

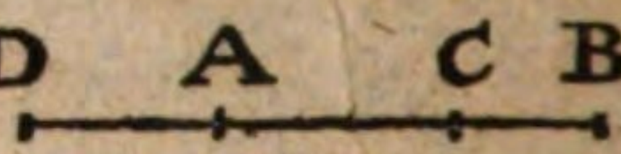
Da Rect. ABBC = □ AC, aber AB = BE, und daher Rect. ABBC = CE, auch □ AC = FH, so ist CE = FH.

Da AB = 2 AD, aber AB = KA, und AD = AH, so ist KA = 2 AH. Folglich, da (6, 1. S.) KA : AH = KC : CH, ist KC = 2 CH = (1, 43. S.) LH + HC. Nun war CE = FH. Folglich (wenn man addirt) ist AE, oder □ AB, = Gnom. MNO.

Da AB = 2 AD, so ist (6, 20. Zus.) □ AB = 4 □ AD. Nun war Gnom. MNO = □ AB. Folglich ist Gnom. MNO = 4 □ AD. Nun ist DH = □ AD. Folglich (wenn man addirt) ist DF, oder □ CD, = 5 □ AD.

Anmerkung.

Man kann diesen Satz auch ohne Figuren beweisen, und zwar entweder **analytisch**, wenn man das Gesuchte als bekannt annimmt, und davon durch Schlüsse auf bekannte Wahrheiten zurückkommt, oder **synthetisch**, wenn man von bekannten Wahrheiten durch Schlüsse bis zu dem Gesuchten kommt. Es sey nämlich die gerade Linie AB nach stetiger Proportion in C geschnitten, so daß AC > CB; auch sey solche nach D verlängert, so daß AD = ½ AB, oder AB = 2 AD; und nun zu beweisen, daß □ CD = 5 □ DA.



1.) **analytischer Beweis.** Da 5 □ DA = □ CD = (2, 4. S.) □ CA + □ DA + 2 Rect. CAAD, so ist (wenn man □ DA subtrahirt) 4 □ DA = □ CA + 2 Rect. CAAD. Nun ist □ CA = Rect. ABBC, weil AB nach stetiger Proportion geschnitten ist; und 2 Rect. CAAD = Rect. BAAC, weil BA = 2 AD. Folglich ist 4 □ DA = Rect. ABBC + Rect. BAAC = (2, 2. S.) □ AB. Und dies ist richtig, weil AB = 2 AD.

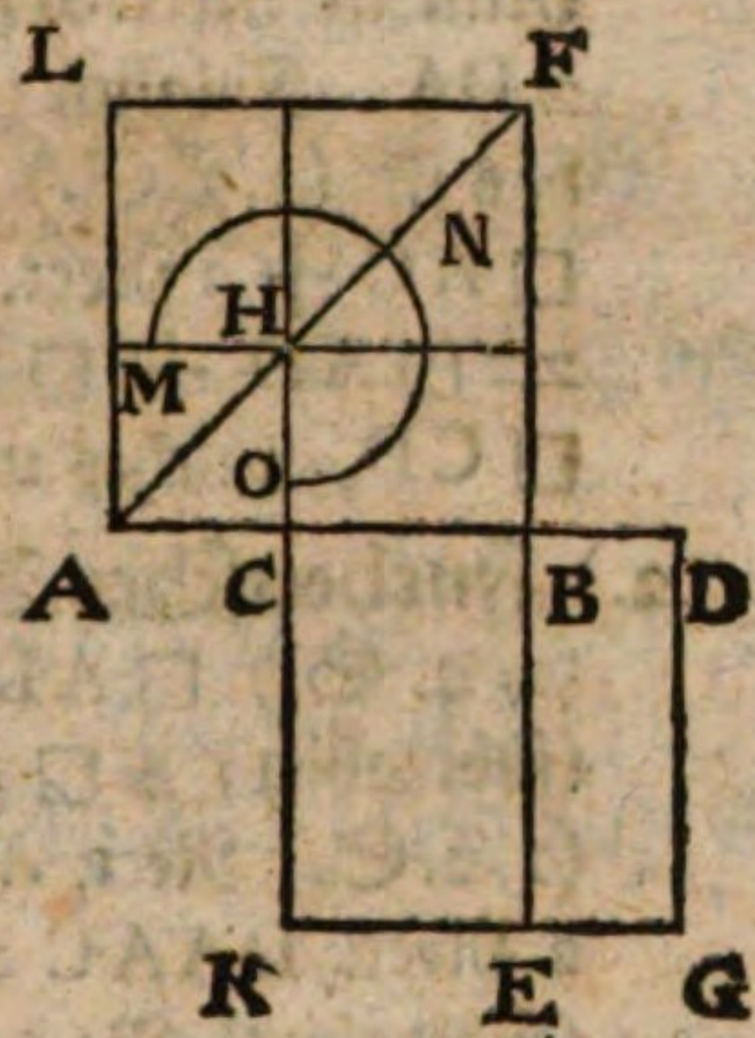
2.) **synthetischer Beweis.** Da 2 AD = AB, so ist 4 □ AD = □ AB = (2, 2. S.) Rect. ABBC + Rect. BAAC. Nun ist Rect. ABBC = □ AC, weil AB nach stetiger Proportion geschnitten ist; und Rect. BAAC = 2 Rect. DAAC, weil BA = 2 DA. Folglich ist 4 □ AD = □ AC + 2 Rect. DAAC. Folglich (wenn man □ AD addirt) ist 5 □ AD = □ AD + □ AC + 2 Rect. DAAC = (2, 4. S.) □ CD.

Der 2. Satz.

Wenn das Quadrat einer geraden Linie, AB, fünfmal so groß ist, als das Quadrat eines Stücks derselben, AC: so ist das Zwiefache dieses Stücks, CD, nach stetiger Proportion geschnitten, und der grössere Abschnitt das übrige Stück der erstgedachten Linie, CB.

Beschreibe auf AB, CD, die Quadrate AF, CG, und vollende (2, 4. S.) die Figur. Da

Da □ AB = 5 □ AC, das ist, AF = 5 AH, so ist (wenn man AH subtrahirt) Gnom. MNO = 4 AH; folglich, da CD = 2 AC, und daher □ CD = 4 □ AC, das ist CG = 4 AH, ist Gnom. MNO = CG.



Da CD = 2 AC, aber CD = CK, und AC = CH, so ist CK = 2 CH, folglich auch KB = 2 BH = (1, 43. S.) LH + HB. Nun war CG = Gnom. MNO. Folglich (subtrahirt) ist BG = FH. Nun ist BG = Rect. CDDB, weil CD = DG; und FH = □ CB. Folglich ist Rect. CDDB = □ CB, folglich (6, 17. S.) CD : CB = CB : DB, Nun ist CD > CB. Folglich auch CB > DB.

Lehnsatz.

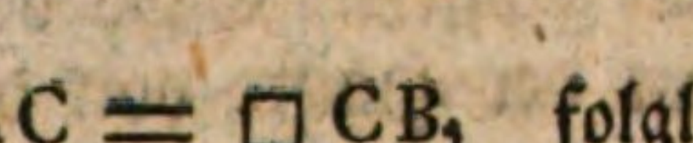
Noch ist zu beweisen, daß CD, das ist, 2 AC, > CB. Denn wäre dies nicht, so sey

1.) 2 AC = CB, folglich 4 □ AC = □ CB, folglich 5 □ AC = □ CB + □ AC. Nun ist auch □ AB = 5 □ AC. Folglich wäre □ AB = □ CB + □ AC, welches (2, 4. S.) unmöglich.

2.) 2 AC < CB. Demnach wäre nach eben den Schlüssen □ AB < □ CB + □ AC, welches noch viel weniger möglich.

Anmerkung.

Es sey dieser Satz noch auf andre Art zu beweisen, nämlich, wenn AB = 2 AD, und □ CD = 5 □ AD,



daß alsdenn die Linie AB nach stetiger Proportion in C geschnitten sey, so daß AC > CB.

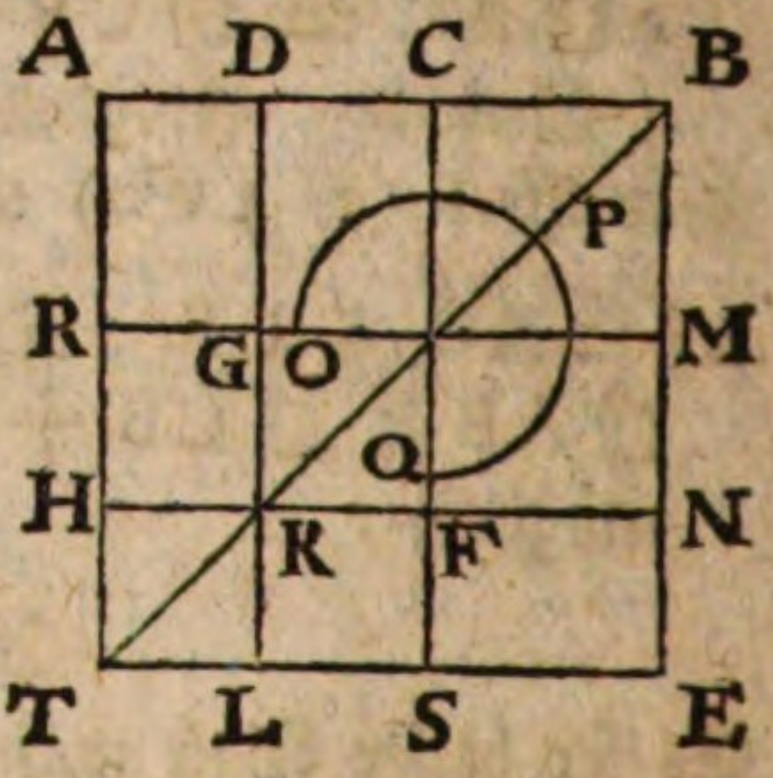
1.) analytischer Beweis. Wird der Satz als wahr angenommen, so ist (6, 17. S.) Rect. ABBC = □ AC.

Nun ist Rect. BAAC = 2 Rect. DAAC, weil BA = 2 DA. Folglich (addirt) ist Rect. ABBC + Rect. BAAC, das ist (2, 2. S.) □ AB, das ist (6, 20. S.) 4 □ AD, = □ AC + 2 Rect. DAAC. Folglich (addirt) ist 5 □ AD = □ AD + □ AC + 2 Rect. DAAC = (2, 4. S.) □ CD, welches unsre Hypothese ist.

2.) Synthetischer Beweis. Da 5 □ AD = □ CD = (2, 4. S.) □ AD + □ AC + 2 Rect. DAAC, so ist (subtrahirt) 4 □ AD, das ist (6, 20. S.) □ AB, das ist (2, 2. S.) Rect. ABBC + Rect. BAAC, = □ AC + 2 Rect. DAAC = □ AC + Rect. BAAC; folglich (subtrahirt) Rect. ABBC = □ AC; folglich BA : AC = AC : CB. Nun ist BA > AC. Folglich auch AC > CB.

Der 3. Satz.

Wenn eine gerade Linie, AB, nach stetiger Proportion geschnitten wird: so ist das Quadrat einer Linie, BD, welche aus dem kleinern Abschnitt, BC, und aus der Hälfte von dem grössern, CD, besteht, fünfmal so groß, als das Quadrat der Hälfte von dem grössern Abschnitte, CD.



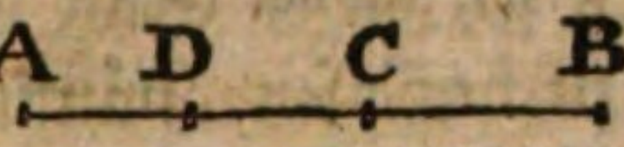
Beschreibe auf AB das Quadrat AE, und vollende die Figur. Da AC = 2 CD, so ist □ AC = 4 □ CD, das ist RS = 4 FG. Nun ist (6, 17. S.) Rect. ABBC = □ AC, das ist, CE = RS. Folglich ist CE = 4 FG.

Da AD = DC, so ist (1, 34. S.) auch HK = KF, folglich das Quadrat HL = GF, folglich LK = KG, folglich (1, 34. S.) EN = NM, folglich (1, 36. S.) EF = FM = (1, 43. S.) CG, folglich (addirt) EF + CN = CG + CN, das ist, CE = Gnom. OPQ. Nun war CE = 4 FG. Folglich ist Gnom. OPQ = 4 FG; folglich (addirt) DN = 5 FG, das ist, □ BD = 5 □ CD.

Anmer-

Anmerkung.

Es sey dieser Satz noch auf andre Art zu beweisen, nämlich, wenn AB nach stetiger Proportion geschnitten ist, so daß AC > CB, und CD = ½ AC, daß alsdenn □ BD = 5 □ CD.

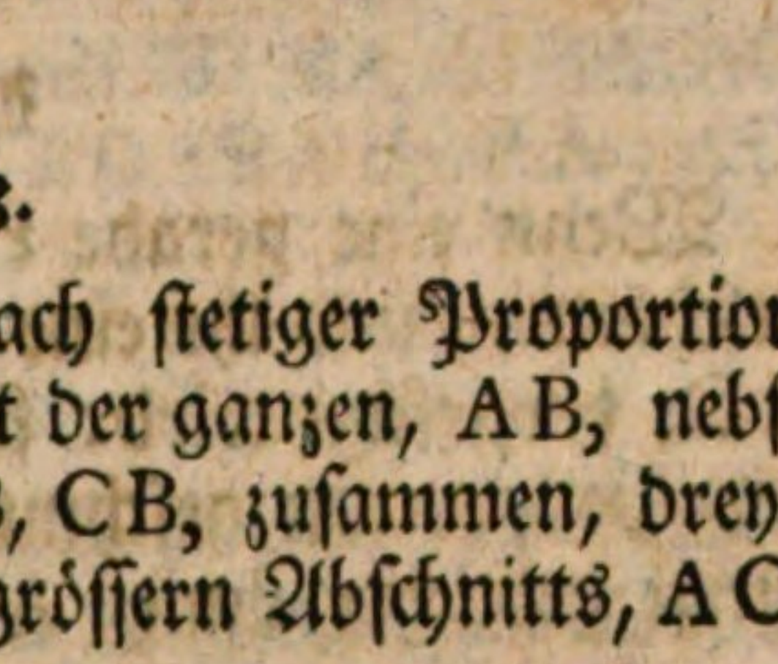


1.) analytischer Beweis. Es sey 5 □ CD = □ BD = (2, 6. S.) Rect. ABBC + □ CD. Folglich ist 4 □ CD = Rect. ABBC = (6, 17. S.) □ AC. Und dies ist richtig, weil AC = 2 CD.

2.) synthetischer Beweis. Da 2 CD = AC, so ist 4 □ CD = □ AC = (6, 17. S.) Rect. ABBC; folglich 5 □ CD = Rect. ABBC + □ CD = (2, 6. S.) □ BD.

Der 4. Satz.

Wenn eine gerade Linie, AB, nach stetiger Proportion geschnitten wird: so ist das Quadrat der ganzen, AB, nebst dem Quadrat des kleinern Abschnitts, CB, zusammen, dreymal so groß als das Quadrat des grössern Abschnitts, AC.

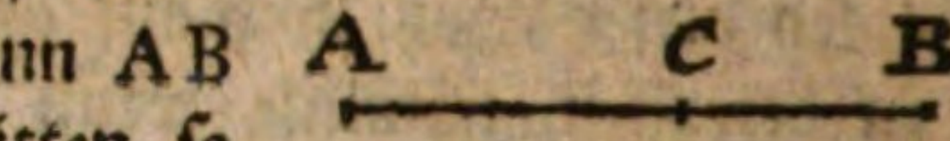


Beschreibe auf AB das Quadrat AE, und vollende die Figur. Da AB nach stetiger Proportion geschnitten, so ist (6, 17. S.) Rect. ABBC = □ AC, das ist, AK = HG.

Da (1, 43. S.) AF = FE, so ist (CK addirt) AK = CE; folglich AK + CE = 2 AK = 2 HG, weil AK = HG. Nun ist AK + CE = Gnom. LMN + CK. Folglich ist Gnom. LMN + CK = 2 HG, folglich (addirt) Gnom. LMN + HG + CK, oder AE + CK = 3 HG, das ist, □ AB + □ CB = 3 □ AC.

Anmerkung.

Es sey dieser Satz noch auf andre Art zu beweisen, nämlich, wenn AB nach stetiger Proportion geschnitten, so daß AC > CB, daß alsdenn □AB + □CB = 3□AC.



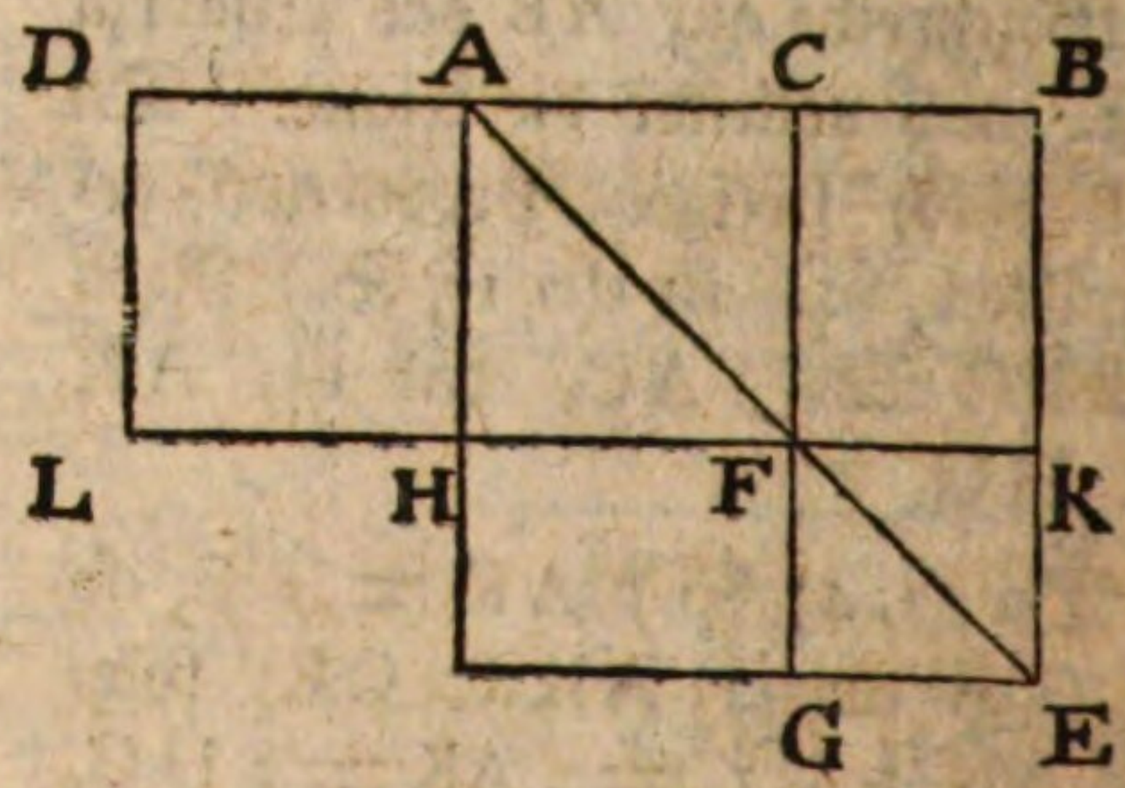
1.) analytischer Beweis. Es sey 3□AC = □AB + □CB = (2, 7. S.) 2 Rect. ABBC + □AC, folglich (subtrahirt) 2□AC = 2 Rect. ABBC, folglich □AC = Rect. ABBC. Und dies ist richtig, weil AB nach stetiger Proportion in C geschnitten ist.

2.) synthetischer Beweis. Da □AC = Rect. ABBC, so ist 2□AC = 2 Rect. ABBC, folglich 3□AC = 2 Rect. ABBC + □AC = (2, 7. S.) □AB + □CB.

Der 5. Satz.

Wenn eine gerade Linie, AB, nach stetiger Proportion geschnitten, und ihr eine dem grössern Abschnitt, AC, gleiche, AD, beygefügt wird: so ist die ganze Linie, DB, nach stetiger Proportion geschnitten, und der grössere Abschnitt die zuerst gedachte Linie, AB.

Beschreibe auf AB das Quadrat AE, und vollende die Figur. Da AB nach stetiger Proportion geschnitten, so ist (6, 17. S.) Rect. ABBC = □AC, das ist, CE = CH. Nun ist (1, 43. S.) CE = HE und CH = DH. Folglich ist DH = HE, folglich (HB addirt) DK = AE. Nun ist DK = Rect. BDDA, und AE = □AB. Folglich ist Rect. BDDA = □AB, folglich (6, 17. S.) BD : BA = BA : AD. Nun ist BD > BA. Folglich BA > AD.



Anmer-

Anmerkung.

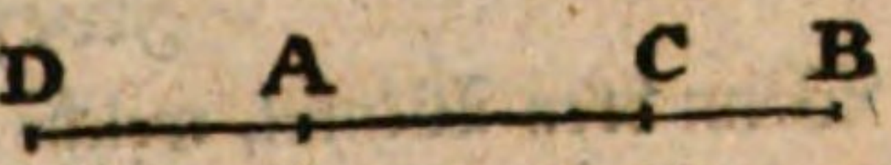
Es sey dieser Satz noch auf andre Art zu beweisen, nämlich, wenn AB nach stetiger Proportion in C geschnitten, und die beygefügte AD = AC, daß alsdenn DB : BA = BA : AD.

1.) **analytischer Beweis.** Es sey DB : BA = BA : AD. Nun ist AD = AC. Folglich ist DB : BA = BA : AC, folglich (5, 19. S.) **zurückkehrend** DB : AD = BA : BC. Nun war DB : BA = BA : AC. Folglich ist (5, 17. S.) **getheilt** BA : AD = AC : BC. Nun war AD = AC. Folglich ist BA : AC = AC : BC. Und dies ist richtig, weil AB nach stetiger Proportion in C geschnitten ist.

2.) **synthetischer Beweis.** Da BA : AC = AC : BC, aber AC = AD, so ist BA : AD = AC : CB, folglich (5, 18. S.) **zusammengesetzt** BD : DA = BA : BC, folglich (5, 19. Zus.) **zurückkehrend** BD : BA = BA : AC. Nun ist AC = AD. Folglich ist BD : BA = BA : AD.

Der 6. Satz.

Wird eine Rationallinie, AB, nach stetiger Proportion geschnitten: so ist jeder der beyden Abschnitte, AC, CB, irrational, genannt Apotome.



Verlängre BA nach D, und mache AD = ½ AB. Folglich ist (13, 1. S.) □ CD = 5 □ DA, folglich sind (10, 6. S.) □ CD, □ DA, commensurabel. Nun ist □ DA rational, weil AB, und also auch DA = ½ AB, rational. Folglich ist (10, 6. Def.) □ CD, und daher (10, 8. Def.) CD, rational. Nun verhalten sich □ CD, □ DA, nicht wie Quadratzahlen. Folglich ist (10, 9. S.) CD der DA in Länge incommensurabel. Demnach sind CD, DA, rational nur in Quadrat commensurabel. Folglich ist (10, 74. S.) AC irrational, genannt Apotome.

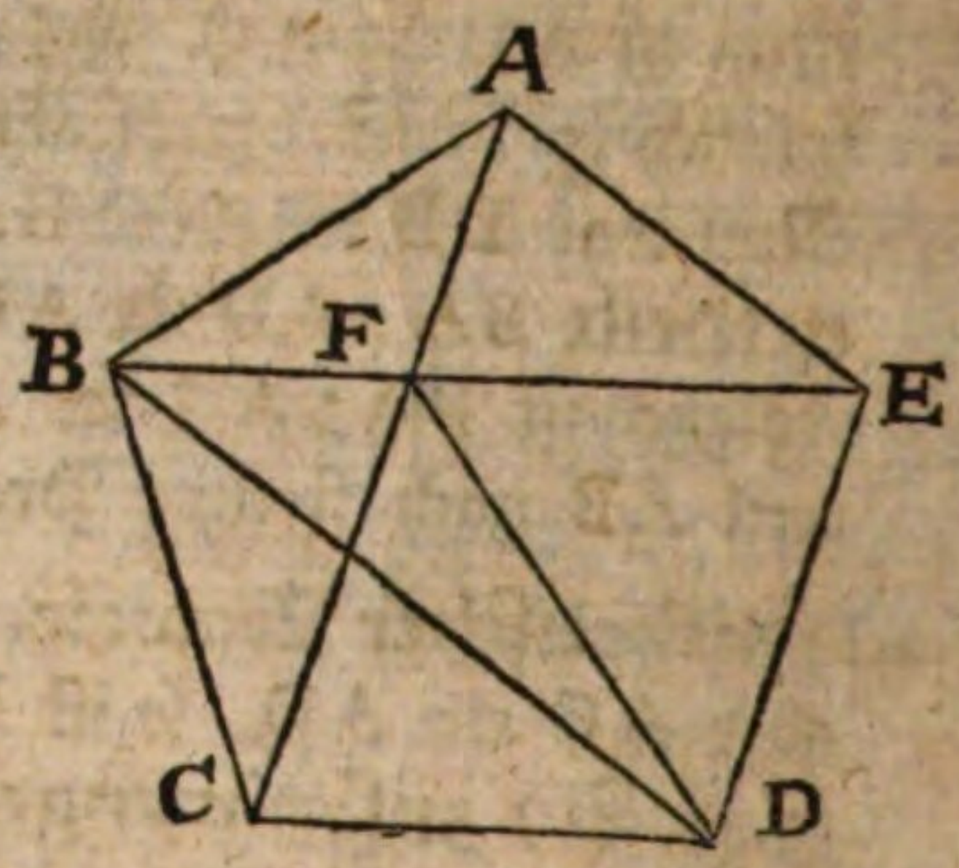
Da AB nach stetiger Proportion in C geschnitten, so ist Rect. ABBC = □ AC, folglich (10, 98. S.) CB die erste Apotome

Der 7. Satz.

Wenn in einem gleichseitigen Pentagon, drey Winkel, entweder in der Ordnung wie sie auf einander folgen, A, B, C, oder ausser solcher Ordnung, A, C, D, einander gleich sind: so ist das Pentagon gleichwinklich.

Erster Fall.

Wenn drey Winkel, welche in der Ordnung auf einander folgen, wie A, B, C, einander gleich sind.



Ziehe AC, BE, FD. In den Triangeln, ABC, ABE, ist CB = BA, BA = AE, und B = A, folglich (1, 4. S.) AC = BE, BCA = BEA, und ABE = CAB.

Im △ AFB ist also ABF = FAB, folglich (1, 6. S.) AF = BF. Nun war AC = BE. Folglich ist (subtrahirt) CF = FE; folglich, da auch CD = DE, und FD beyden Triangeln gemein, ist (1, 8. S.) FCD = FED. Nun war BCA = AEB. Folglich ist (addirt) BCD = AED. Eben so wird bewiesen, daß ABC = CDE. Demnach ist A = B = C = D = E.

Zweyter Fall.

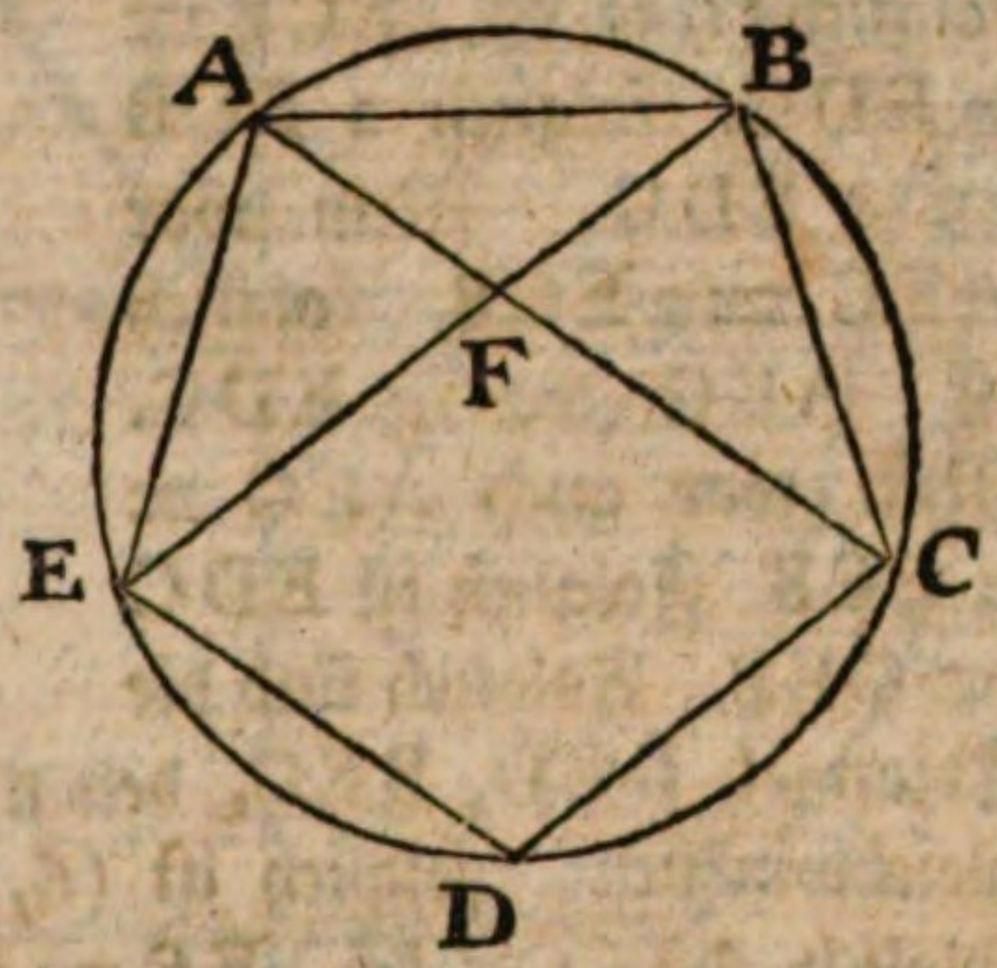
Wenn drey Winkel, welche nicht in der Ordnung auf einander folgen, wie A, C, D, einander gleich sind.

Ziehe BD. In den Triangeln, ABE, BCD, ist AB = BC, AE = CD, und A = C, folglich ist (1, 4. S.) BE = BD, und AEB = CDB, folglich (1, 6. S.) BED = BDE, folglich (addirt) AED = CDE. Eben so wird bewiesen, daß ABC = BCD. Demnach ist A = C = D = E = B.

Der 8. Satz.

Wenn in einem gleichseitigen und gleichwinklichen Pentagon, ABCDE, an zweyen in der Ordnung auf einander folgenden

folgenden Winkeln, A, B, die Gegenseiten, BE, AC, gezogen werden: so schneiden solche einander nach stetiger Proportion, so daß der grössere Abschnitt, der Seite des Pentagons gleich ist.



Beschreibe (4, 14. S.) um das Pentagon einen Cirkel. Da A = B, und EA = AB = BC, so ist (1, 4. S.) BE = AC, und ABE = BAC; folglich (1, 6. und 32. S.) AFE = 2 BAC. Folglich, da auch (6, 33. S.) EAC = 2 BAC, ist EAC = AFE, folglich (1, 6. S.) FE = EA = AB.

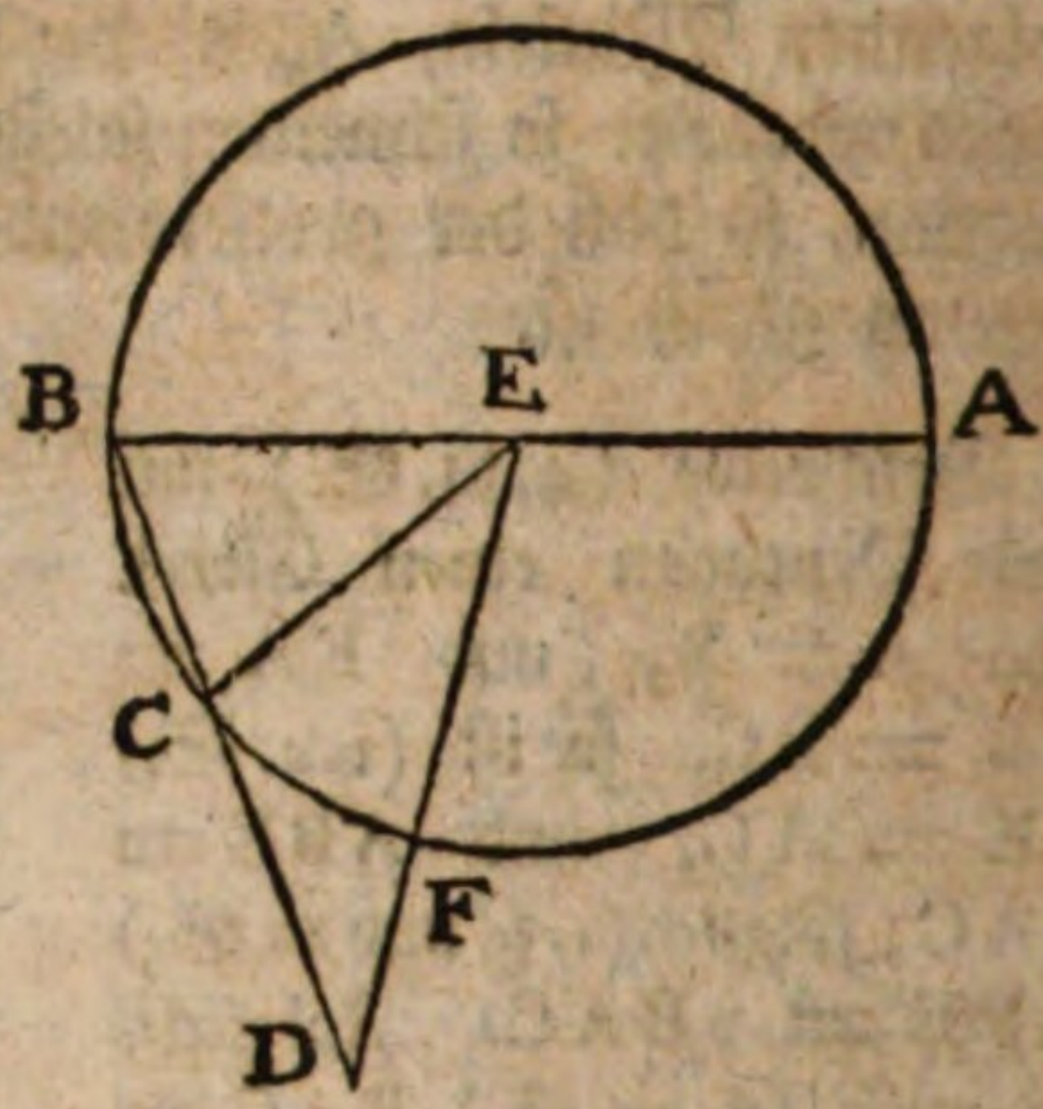
Da EA = AB, so ist (1, 5. S.) ABE = AEB. Nun war auch ABE = BAC. Folglich ist BAC = AEB, folglich die beyden Triangel, ABE, ABF, denen auch der Winkel bey B gemein, (1, 32. S.) gleichwinklich. Folglich ist (6, 4. S.) EB : BA = BA : BF. Nun war BA = EF. Folglich ist EB : EF = EF : BF, folglich, da EB > EF, ist auch EF > BF.

Auf eben die Art wird ein gleiches auch von AC bewiesen.

Der 9. Satz.

Wird die Seite eines Hexagons, CD, und eines Dekagons, CB, die beyde in einerley Cirkel beschrieben sind, zusammengesetzt: so ist die ganze Linie, BD, nach stetiger Proportion geschnitten, und der grössere Abschnitt, ist die Seite des Hexagons, CD.

Es sey das Centrum in E. Ziehe EB, EC, ED, und verlängre BE nach A. Da BC die Seite des Dekagons, so ist der Bogen ACB = 5 Bog. CB, folglich der Bogen AC = 4 Bog. CB, folglich ist (6, 33. S.) AEC = 4 CEB.



Da (1, 5. S.) ECB = EBC, so ist (1, 32. S.) AEC = 2 ECB. Da (4, 15. S.) EC = CD, so ist (1, 5. S.) CED = CDE, folglich (1, 32. S.) ECB = 2 EDC, folglich 2 ECB = 4 EDC. Nun war AEC = 2 ECB. Folglich ist AEC = 4 EDC. Nun war auch AEC = 4 CEB. Folglich ist EDC = CEB. Folglich sind die Triangel, BED, BEC, denen auch EBD gemein, (1, 32. S.) gleichwinklich, folglich ist (6, 4. S.) DB : BE = EB : BC, folglich, da (4, 15. S.) EB = CD, ist DB : CD = CD : CB. Nun ist DB > CD. Folglich auch CD > CB.

Der 10. Satz.

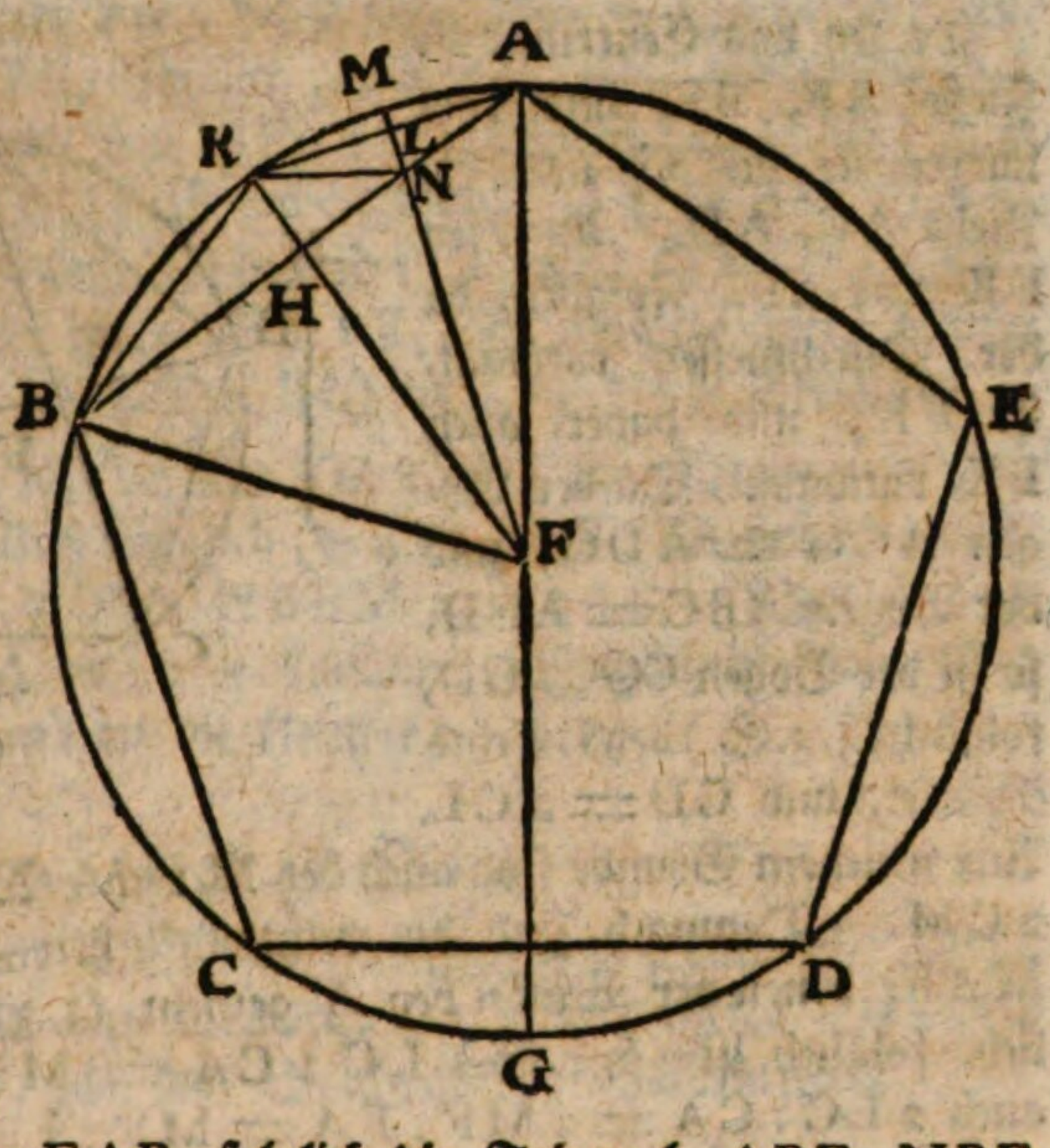
Wird in einen Cirkel ein gleichseitiges Pentagon, ABCDE, beschrieben: so ist das Quadrat der Seite dieses Pentagons so groß, als die Quadrate der Seiten eines in eben denselben Cirkel beschriebnen Hexagons und Dekagons.

Es sey das Centrum in F. Ziehe AF und verlängre sie bis G. Ziehe FB, und fälle von F auf AB den Perpendikel FH, verlängert bis K. Ziehe AK, KB, und fälle abermals von F auf AK, den Perpendikel FL, verlängert bis M. Ziehe KN.

Da der Bogen ABCG = AEDG, und der Bogen ABC = AED, so ist der Bogen CG = GD. Nun ist CGD der Bogen des Pentagons. Folglich ist CG der Bogen des Dekagons.

Da AF = FB, und FH ein Perpendikel, so ist AFK = KFB, folglich der Bogen AK = KB. Nun ist AKB der Bogen des Pentagons. Folglich ist AK der Bogen des Dekagons. Aus gleichem Grunde ist auch der Bogen AM = MK.

Demnach



Demnach ist der Bogen AK, oder CG, = 2 KM, und der Bogen AB, oder BC, = 2 BK, folglich (addirt) der Bogen GB = 2 BM, folglich (6, 33. S.) GFB = 2 BFN.

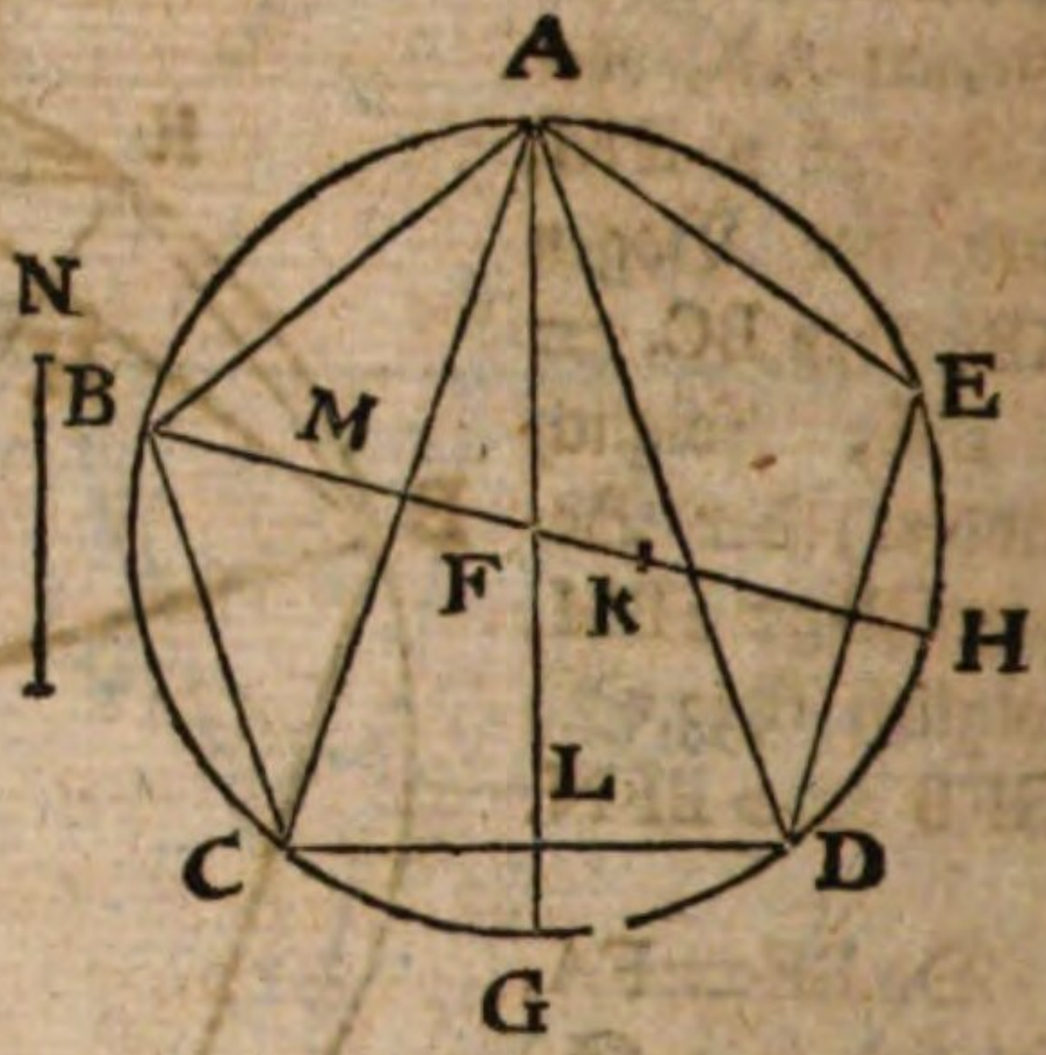
Da BF = FA, folglich (1, 5. S.) FBA = FAB, so ist (1, 32. S.) GFB = 2 FAB. Nun war GFB = 2 BFN. Folglich ist BFN = FAB, folglich die Triangel, ABF, NBF, denen der Winkel bey B gemein, (1, 32. S.) gleichwinklich. Folglich ist (6, 4. S.) AB : BF = FB : BN, folglich Rect. ABBN = □ FB.

Da AL = LK, auch LN gemein und senkrecht, so ist (1, 4. S.) KN = AN, und LKN = LAN = (1, 5. S.) KBN. Folglich sind die beyden Triangel, BAK, NAK, denen auch der Winkel bey A gemein, (1, 32. S.) gleichwinklich. Folglich ist (6, 4. S.) BA : AK = KA : AN, folglich (6, 17. S.) Rect. BAAN = □ AK. Nun war Rect. ABBN = □ FB. Folglich ist (addirt) □ FB + □ AK = Rect. ABBN + Rect. BAAN = (2, 2. S.) □ AB.

Der 11. Satz.

Wird in einen Cirkel, welcher einen rationalen Durchmesser hat, ein gleichseitiges Pentagon, ABCDE, beschrieben: so ist dessen Seite irrational, genannt die kleinere.

Es



Es sey das Centrum, F. Ziehe AF, BF, und verlängre sie bis G und H. Ziehe AC, AD. Auch sey $FK = \frac{1}{4} AF$. Folglich, da der Durchmesser rational, ist FK, und daher auch BK, rational. Da der Bogen $ACG = ADG$, und der Bogen $ABC = AED$, so ist der Bogen $CG = GD$, folglich (3, 3. S.) bey L rechte Winkel, und $CD = 2\,CL$. Aus gleichem Grunde sind auch bey M rechte Winkel und $AC = 2\,CM$. Demnach sind die rechtwinklichen Triangel, LAC, MAF, denen der Winkel bey A gemein, (1, 32. S.) gleichwinklich, folglich ist (6, 4. S.) $LC : CA = MF : FA$, folglich auch $2\,LC : CA = 2\,MF : FA = MF : \frac{1}{2} FA$, folglich auch $2\,LC : \frac{1}{2} CA = MF : \frac{1}{4} FA$. Nun ist $2\,LC = DC$, $\frac{1}{2} CA = CM$, $\frac{1}{4} FA = FK$. Demnach ist $DC : CM = MF : FK$, folglich **verbunden** (5, 18. S.) (*) $DCM : CM = MK : KF$, folglich (6, 22. S.) (*) $\square DCM : \square CM = \square MK : \square KF$.

Da AC die Gegenseite des Winkels ABC, so ist (13, 8. S.) AC nach stetiger Proportion geschnitten, und der grössere Abschnitt $= DC$. Folglich, da $CM = \frac{1}{2} DC$, ist (13, 1. S.) (*) $\square DCM = 5 \square CM$. Nun war $\square DCM : \square CM = \square MK : \square KF$. Folglich ist auch $\square MK = 5 \square KF$. Nun ist KF, und daher auch $\square KF$, rational. Folglich ist (10, 6. S.) $\square MK$, und daher auch MK, rational.

Da $BF = 4\,FK$, so ist $BK = 5\,FK$, folglich (6, 20. Zus.) $\square BK = 25 \square FK$. Nun war $\square MK = 5 \square FK$. Folglich ist $\square BK = 5 \square MK$. Folglich sind (10, 9. S.) BK, MK, in Länge incommensurabel, beyde aber rational. Folglich sind BK, KM, rational nur in Quadrat commensurabel. Folglich ist (10, 74. S.) MB irrational, genannt Apotome.

Es

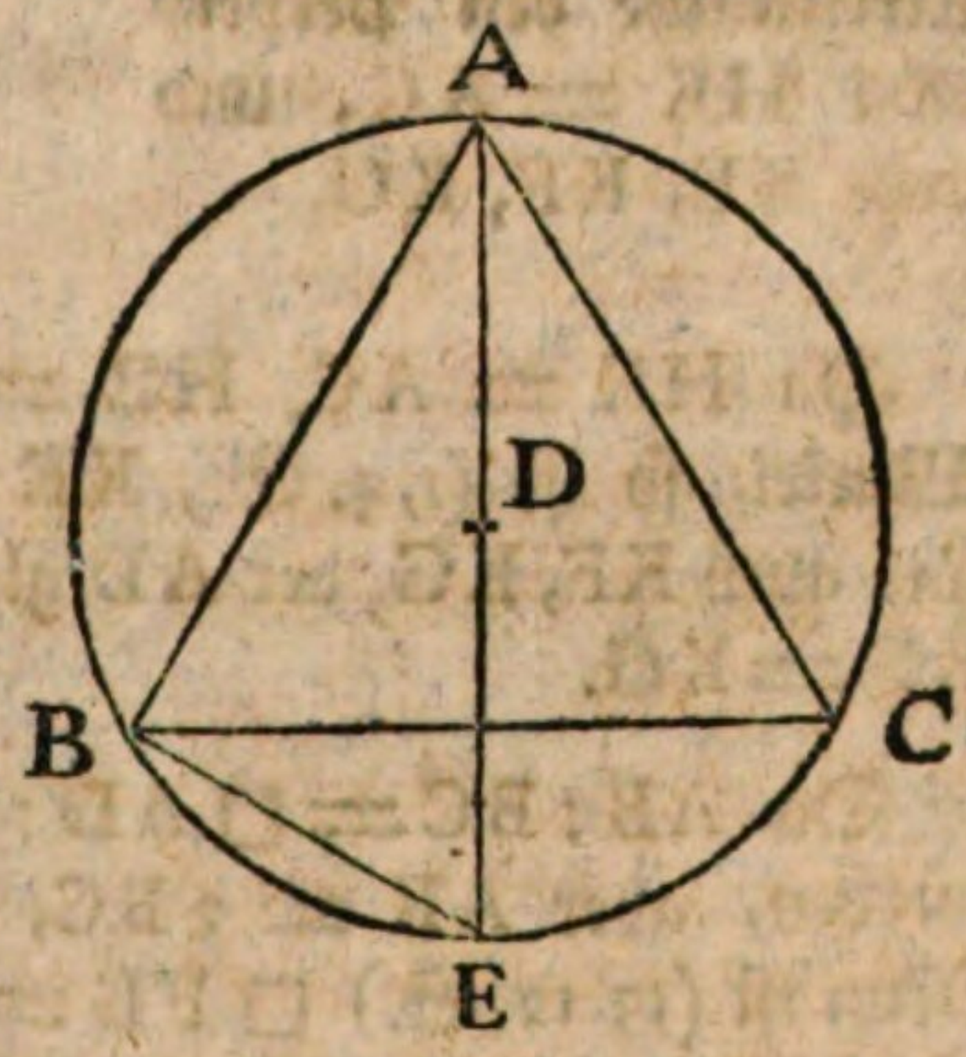
(*) Hier wird das Aggregat zweyer geraden Linien, DC und CM, durch DCM angezeigt.

Es sey eine gerade Linie, N, so daß □BK — □KM = □N. Nun sind KF, FB, folglich auch KB, BF, commensurabel. Eben dies gilt auch von BF, BH, folglich (10, 12. S.) auch von BK, BH. Da □BK = 5 □KM, so ist □BK : □KM = 5 : 1, folglich zurückkehrend (5, 19. S.) □BK : □N = 5 : 4, folglich sind (10, 9. S.) BK, N, in Länge incommensurabel, folglich ist (10, 4. Def. III.) MB die vierte Apotome.

Ziehet man AH, so sind (6, 8. S.) die Triangel ABH, ABM, gleichwinklich, folglich (6, 4. S.) HB : BA = AB : BM, folglich (6, 17. S.) Rect. HBBM = □AB. Nun ist HB rational, und BM die vierte Apotome. Folglich ist (10, 95. S.) AB irrational, genannt die kleinere.

Der 12. Satz.

Wird in einen Cirkel ein gleichseitiger Triangel, ABC, beschrieben: so ist das Quadrat der Seite dieses Triangels dreymal so groß, als das Quadrat des Halbmessers.



Es sey das Centrum D. Ziehe AD verlängert bis E, hierauf BE. Da △ABC gleichseitig, so ist der Bogen BEC der dritte, folglich der Bogen BE der sechste Theil der Peripherie, oder die Linie BE die Seite des Hexagons, folglich (4, 15. S.) BE = DE.

Da AE = 2 DE = 2 BE, so ist (6, 20. Zus.) □AE = 4 □BE. Nun ist (1, 47. S. und 3, 31. S.) □AE = □AB + □BE. Folglich ist □AB + □BE = 4 □BE, folglich □AB = 3 □BE = 3 □DE.

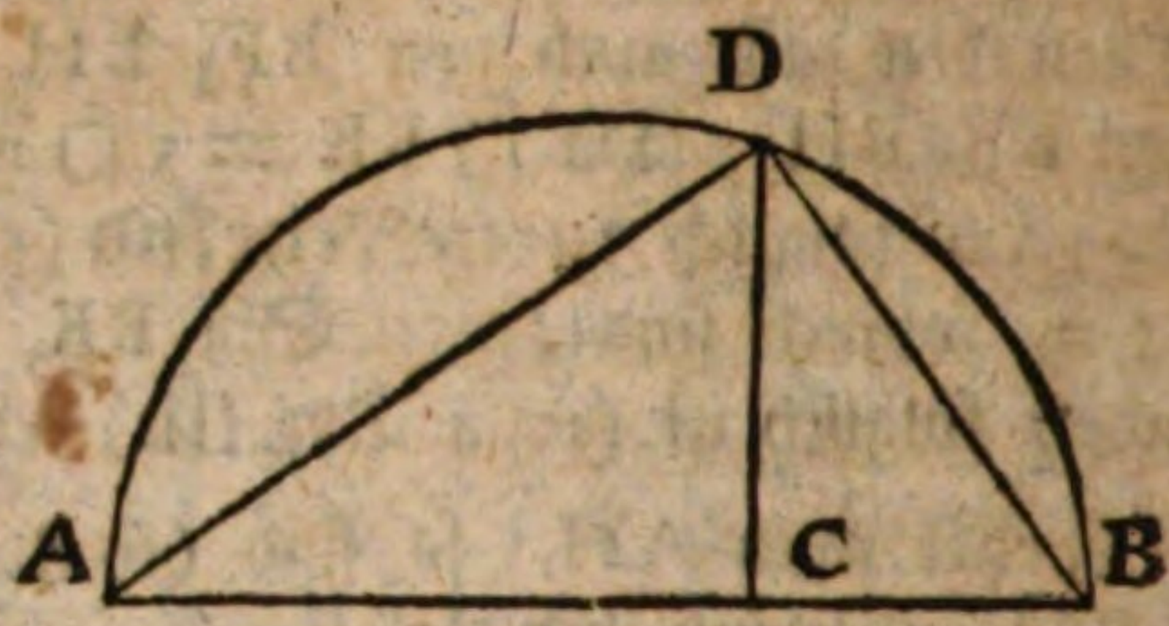
Der 13. Satz.

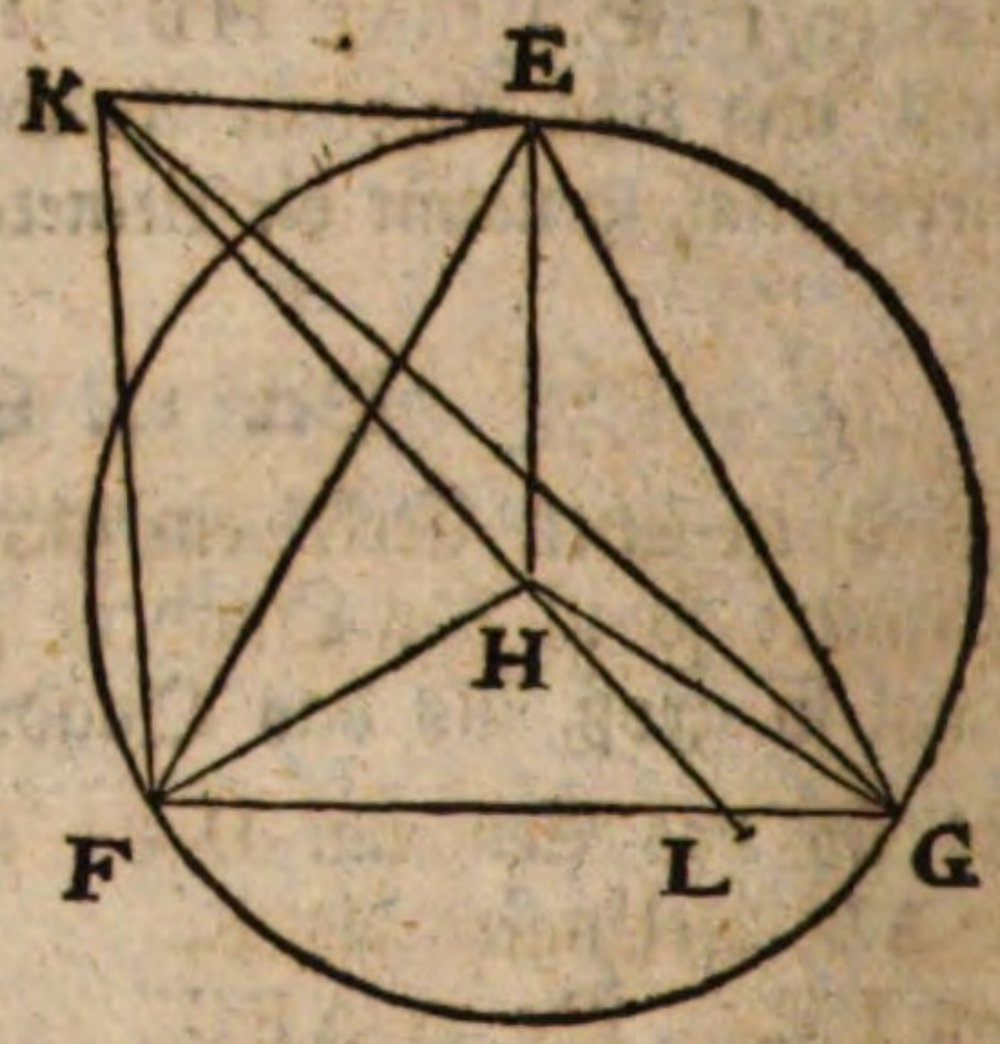
Ein Tetraedron in eine gegebne Kugel zu beschreiben; auch zu beweisen, daß das Quadrat des Durchmessers der Kugel, zum Quadrat der Seite des Tetraedrons wie drey zu zwey sich verhalte.

Erster

Erster Theil.

Es sey der Durchmesser der gegebnen Kugel, AB, in C so geschnitten, daß AC = 2 CB, oder AB = 3 BC. Beschreibe über AB den halben Cirkel ADB, errichte in C auf AB den Perpendikel CD, und ziehe DA, DB. Nun sey ein Cirkel EFG, dessen Halbmesser = DC. In diesen Cirkel, dessen Centrum H, beschreibe den gleichseitigen △ EFG. Ziehe HE, HF, HG. In H errichte auf der Cirkelfläche den Perpendikel HK = AC, und ziehe KE, KF, KG.





Da HK = AC, HE = CD, und bey H und C rechte Winkel, so ist (1, 4. S.) KE = AD. Aus gleichem Grunde sind auch KF, KG, der AD gleich. Folglich ist AD = KE = KF = KG.

Da AB : BC = □ AD : □ DC, wie nachher soll bewiesen werden, aber AB = 3 BC, so ist auch □ AD = 3 □ DC. Nun ist (13, 12. S.) □ FE = 3 □ EH = 3 □ DC. Folglich ist AD = FE = FG = GE. Nun war auch AD = KE = KF = KG. Folglich sind die vier Triangel EFG, KEF, KFG, KGE, gleichseitig und gleichwinklich; folglich ist der Körper, dessen Basis EFG, und dessen Spitze K, ein Tetraedron.

Zweyter Theil.

Verlängre KH nach L, so daß HL = BC, folglich KL = AB. Da (6, 8. S.) AC : CD = CD : CB; aber AC = KH, CD = HE, CB = HL; so ist KH : HE = HE : HL, folglich

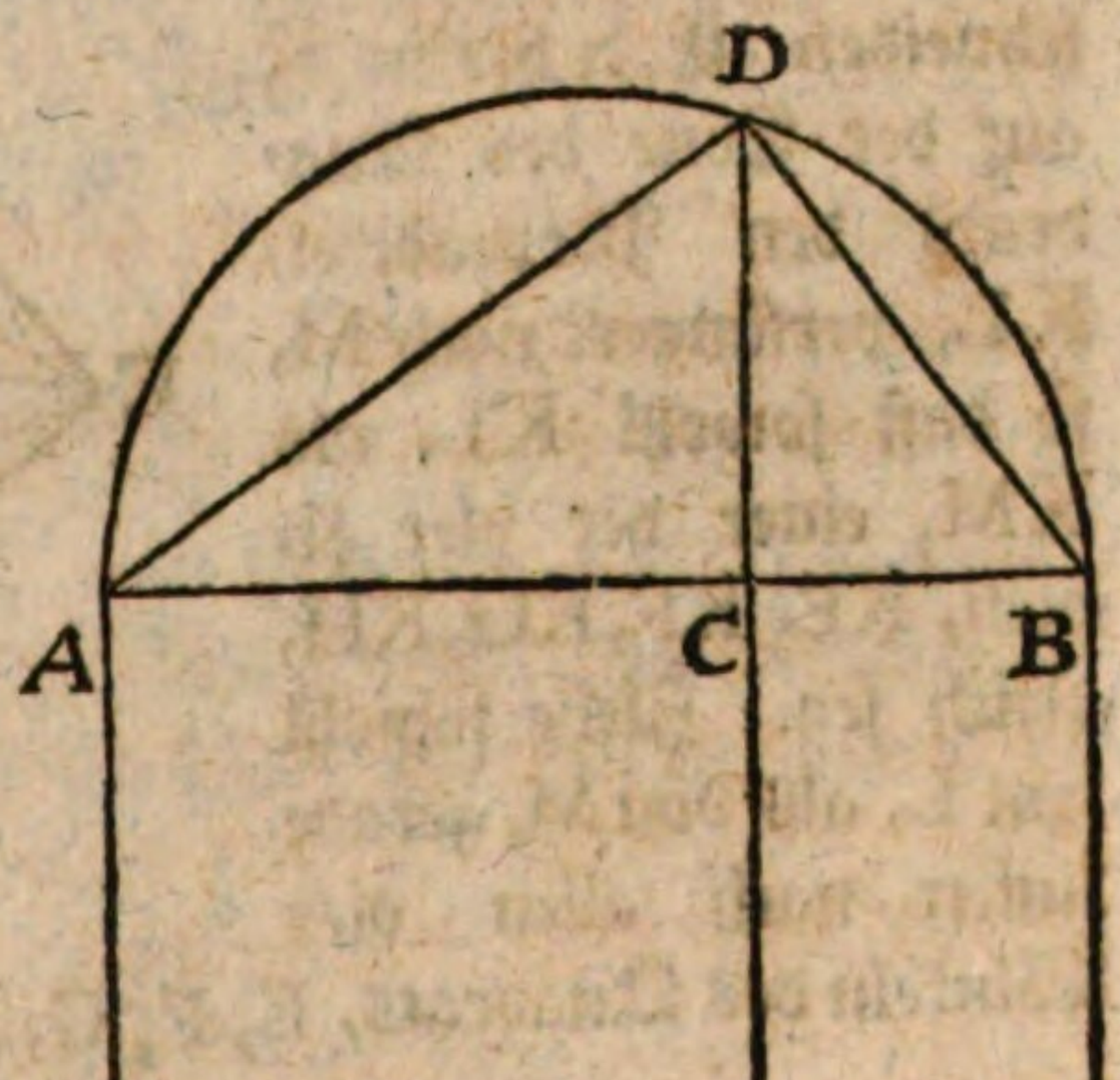
folglich Rect. KHHL = □ HE, folglich ist, wenn man sich LE denkt, KEL ein rechter Winkel, folglich geht ein halber Cirkel, den man über KL beschreibt, durch E. Wird nun dieser Halbcirkel rings um den unverrückten Durchmesser, KL, gedrehet, so gehet er aus eben dem Grunde auch durch die Punkte, F, G. Demnach berühren die Punkte des Tetraedrons, E, F, G, K, die Oberfläche einer Kugel, deren Durchmesser KL = AB.

Dritter Theil.

Da AB = 3 CB, oder AB : CB = 3 : 1, so ist zurückkehrend AB : AC = 3 : 2. Nun ist (6, 8. S. u. 6, 20. Zus.) BA : AC = □ BA : □ AD. Folglich ist auch □ BA : □ AD = 3 : 2. Nun ist BA = KL, dem Durchmesser der Kugel, und AD = KE, der Seite des Tetraedrons. Demnach verhält sich das Quadrat des Durchmessers der Kugel zum Quadrat der Seite des Tetraedrons wie drey zu zwey.

Lehnsatz.

Nun ist noch zu beweisen, daß AB : BC = □ AD : □ DC. Es sey die vorhergehende Figur des halben Cirkels. Beschreibe auf AC, ein Quadrat CE, und vollende das Parallelogramm, FB. Da die Triangel, DAB, DAC, gleichwinklich, so ist (6, 4. S.) BA : AD = DA : AC, folglich (6, 17. S.) Rect. BAAC = □ AD. Da ferner (6, 1. S.) AB : BC = EB : BF, aber EB = Rect. BAAC, und BF = Rect. ACCB, so ist AB : BC = Rect. BAAC : Rect. ACCB. Nun ist ADB ein rechter Winkel. Folglich (6, 1. S.) AC : CD = DC : CB, folglich Rect. ACCB = □ DC. Auch war Rect. BAAC = □ AD. Folglich ist AB : BC = □ AD : □ DC.



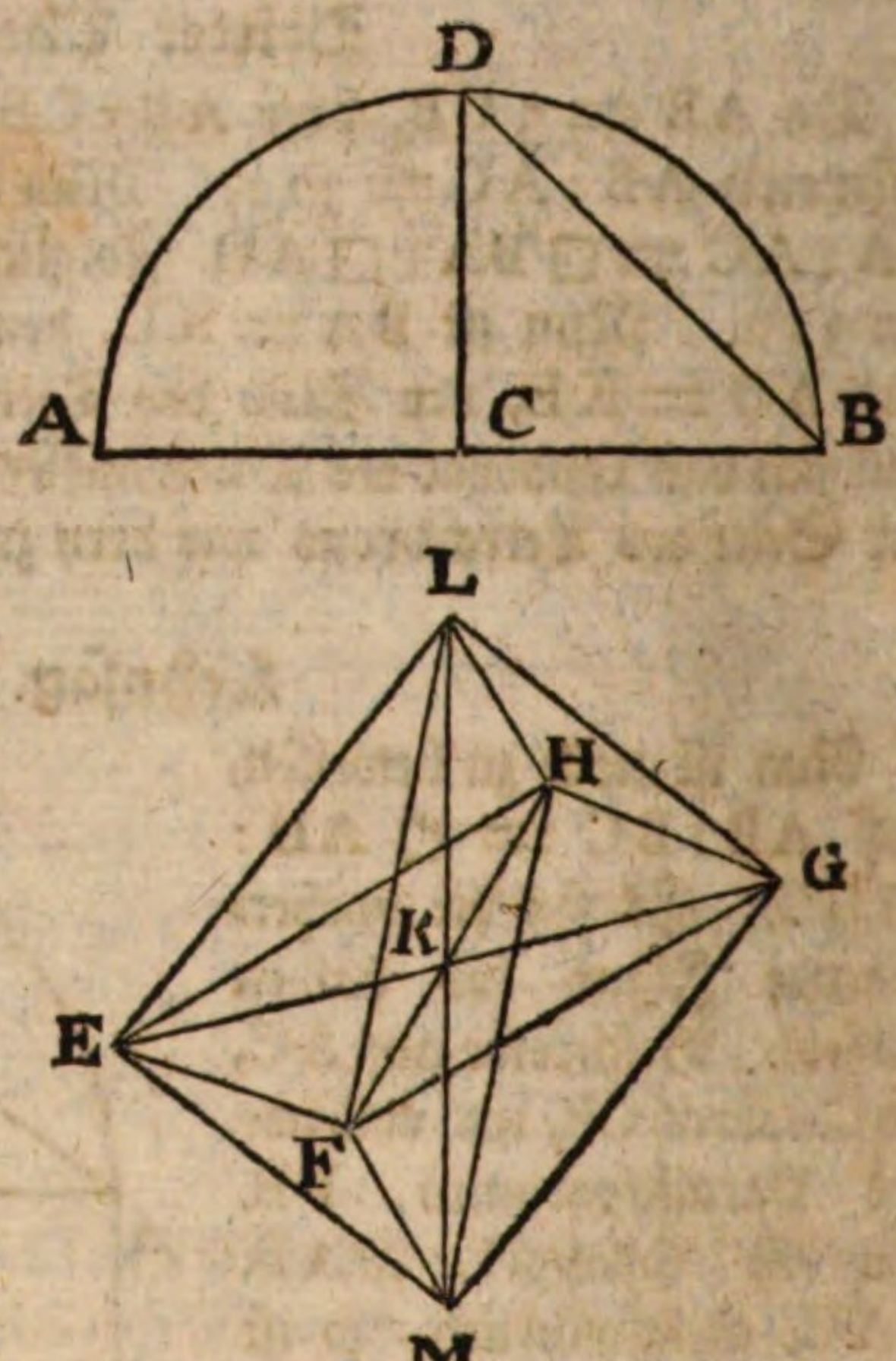
Der

Der 14. Satz.

Ein Oktaedron in eine gegebne Kugel zu beschreiben; auch zu beweisen, daß das Quadrat des Durchmessers der Kugel zum Quadrat der Seite des Oktaedrons, wie zwey zu eins sich verhalte.

Erster Theil.

Es sey der (13, 13. S.) gegebnen Kugel Durchmesser, AB, in C halbirt. Beschreibe über AB den halben Cirkel, ADB, errichte in C auf AB den Perpendikel, CD, und ziehe DB. Nun sey ein Quadrat, EFGH, dessen Seite = DB. Ziehe HF, EG, die sich in K schneiden. Errichte in K auf der Ebne des Quadrats den Perpendikel, KL, verlängert nach M, so daß sowohl KL, als KM, einer der vier Linien, KE, KF, KG, KH, gleich sey. Ziehe sowohl von L, als von M, gerade Linien nach allen vier Winkeln des Quadrats, E, F, G, H.



Da EK = KH und EKH ein rechter Winkel, so ist (1, 47. S.) □ HE = 2 □ KE. Nun ist LK = KE, und LKE ein rechter Winkel, also auch □ LE = 2 □ KE. Folglich ist LE = HE, aber auch aus gleichem Grunde LH = HE. Demnach ist der △ LEH gleichseitig. Ein gleiches wird auf eben die Art von den übrigen Triangeln bewiesen, deren Grund-

linien

linien die Seiten des Quadrats, und deren Spitzen die Punkte, L, M, sind. Folglich ist der construirte Körper ein Oktaedron.

Zweyter Theil.

Da LK = KM = KE, so wird der halbe Cirkel, welcher über LM beschrieben wird, durch E gehen. Dreht sich nun dieser halbe Cirkel rings um den unverrückten Durchmesser, LM, so wird er aus eben den Gründen auch durch F, G, H, gehen. Demnach berühren die Punkte des Oktaedrons E, F, G, H, L, M, die Oberfläche einer Kugel, deren Durchmesser, LM.

Da LK = KM, die Seite EK gemein, und bey K rechte Winkel, so ist (1, 4. S.) LE = EM. Nun ist LEM ein Winkel im halben Cirkel, und daher ein rechter. Folglich ist (1, 47. S.) □ LM = 2 □ LE. Nun war LE = EH = BD. Folglich ist □ LM = 2 □ BD.

Da AC = CB, so ist AB = 2 BC. Nun ist (6, 8. u. 20. S.) AB : BC = □ AB : □ BD. Folglich ist □ AB = 2 □ BD. Es war aber □ LM = 2 □ BD. Folglich ist LM = AB, dem Durchmesser der gegebnen Kugel.

Dritter Theil.

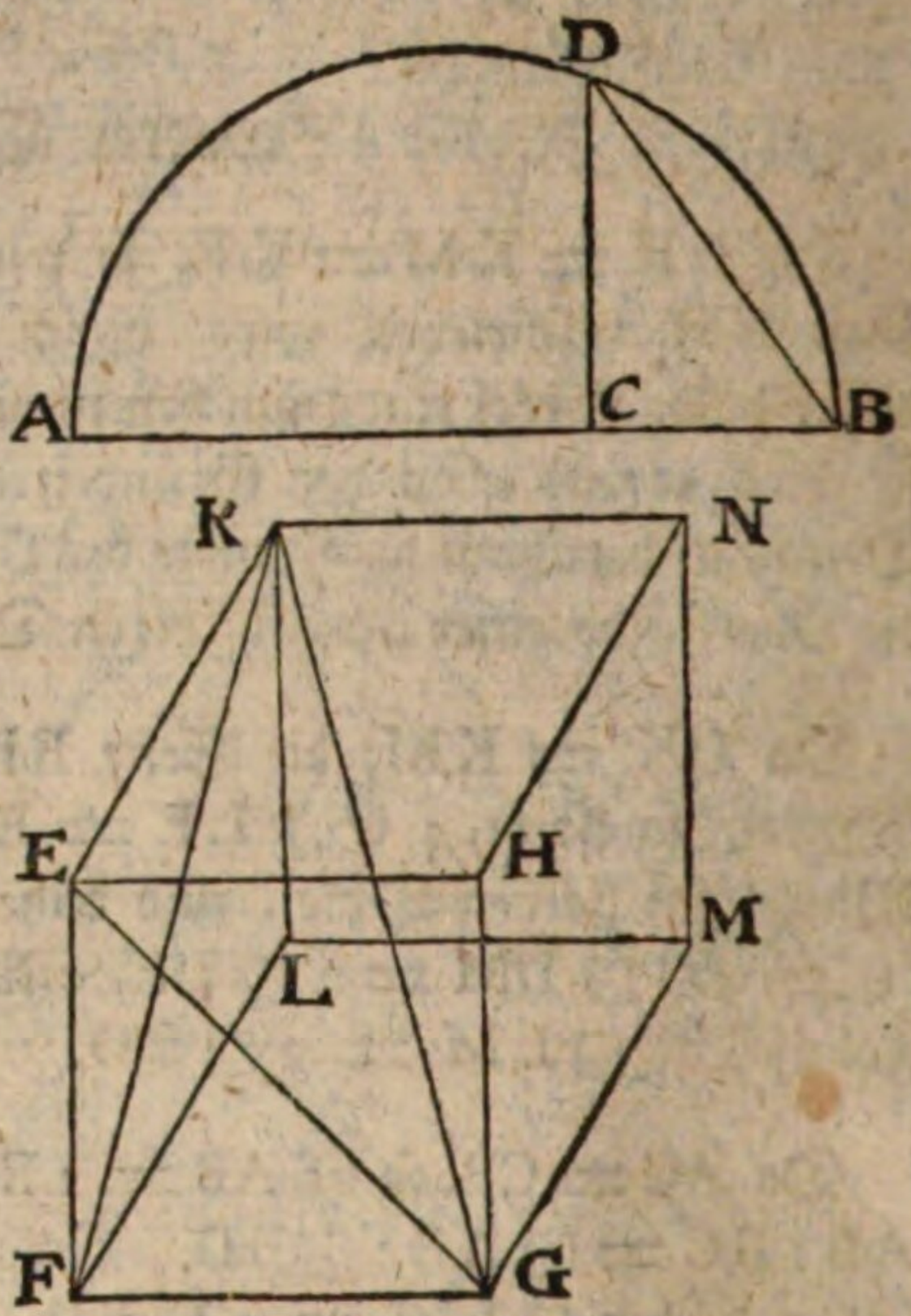
Es war □ LM = 2 □ LE, und LM = AB, folglich □ AB = 2 □ LE, oder □ AB : □ LE = 2 : 1, wo AB der Durchmesser der Kugel, und LE die Seite des Oktaedrons.

Der 15. Satz.

Einen Kubus in eine gegebne Kugel zu beschreiben; auch zu beweisen, daß das Quadrat des Durchmessers der Kugel zum Quadrat der Seite des Kubus wie drey zu eins sich verhalte.

Erster Theil.

Es sey der (13, 13. und 14. S.) gegebnen Kugel Durchmesser, AB, in C geschnitten, so daß AC = 2 CB, oder AB = 3 CB. Beschreibe über AB den halben Cirkel ADB. In C errichte auf AB den Perpendikel, CD, und ziehe DB. Nun sey ein Quadrat, EFGH, dessen Seite = DB. Auf dieser Quadratfläche errichte in E, F, G, H, die Perpendikel, EK, FL, GM, HN, deren jeder = DB, und vollende die Figur, so ist dieselbe der Kubus FN.



Zweyter Theil.

Ziehe EG, GK, KE. Da KE senkrecht auf der Quadratfläche, so ist KEG ein rechter Winkel, folglich gehet (3, 31. S.) der halbe Cirkel, welcher über KG beschrieben wird, durch den Punkt, E. Da GF auf FL und FE senkrecht, so ist sie (11, 4. S.) auch auf der Ebne, EFLK, senkrecht, folglich KFG ein rechter Winkel, folglich gehet der halbe Cirkel, welcher über KG beschrieben wird, auch durch den Punkt F, und aus gleichem Grunde auch durch alle übrige Eckpunkte des Kubus, welche daher die Oberfläche einer Kugel berühren, deren Durchmesser, KG.

Da GF = FE und GFE ein rechter Winkel, so ist (1, 47. S.) □ GE = 2 □ EF = 2 □ EK, folglich □ GE + □ EK, das ist □ KG, = 3 □ EK.

Da AB = 3 BC, und (6, 8. und 20. S.) AB : BC = □ AB : □ BD, so ist auch □ AB = 3 □ BD = 3 □ EK. Nun war auch □ KG = 3 □ EK. Folglich KG = AB, dem Durchmesser der gegebnen Kugel.

Dritter Theil.

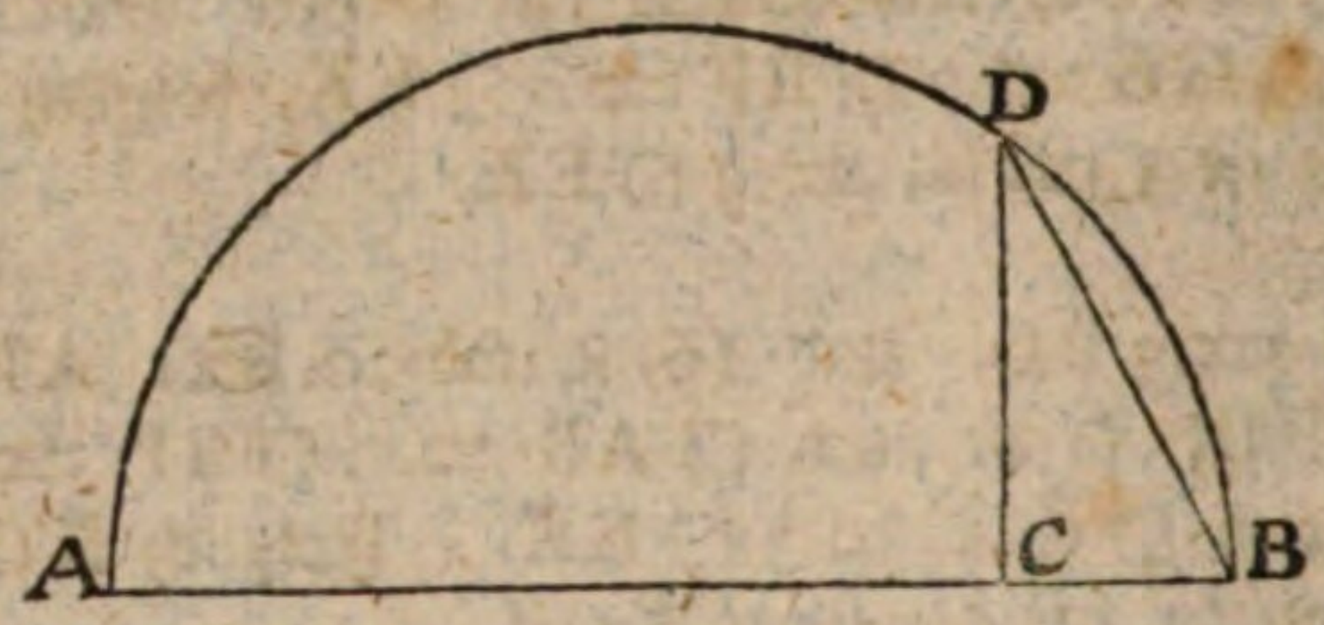
Es war □ KG = 3 □ EK, oder □ KG : □ EK = 3 : 1. Nun ist KG = AB. Folglich □ AB : □ EK = 3 : 1, wo AB der gegebne Durchmesser und EK die Seite des Kubus.

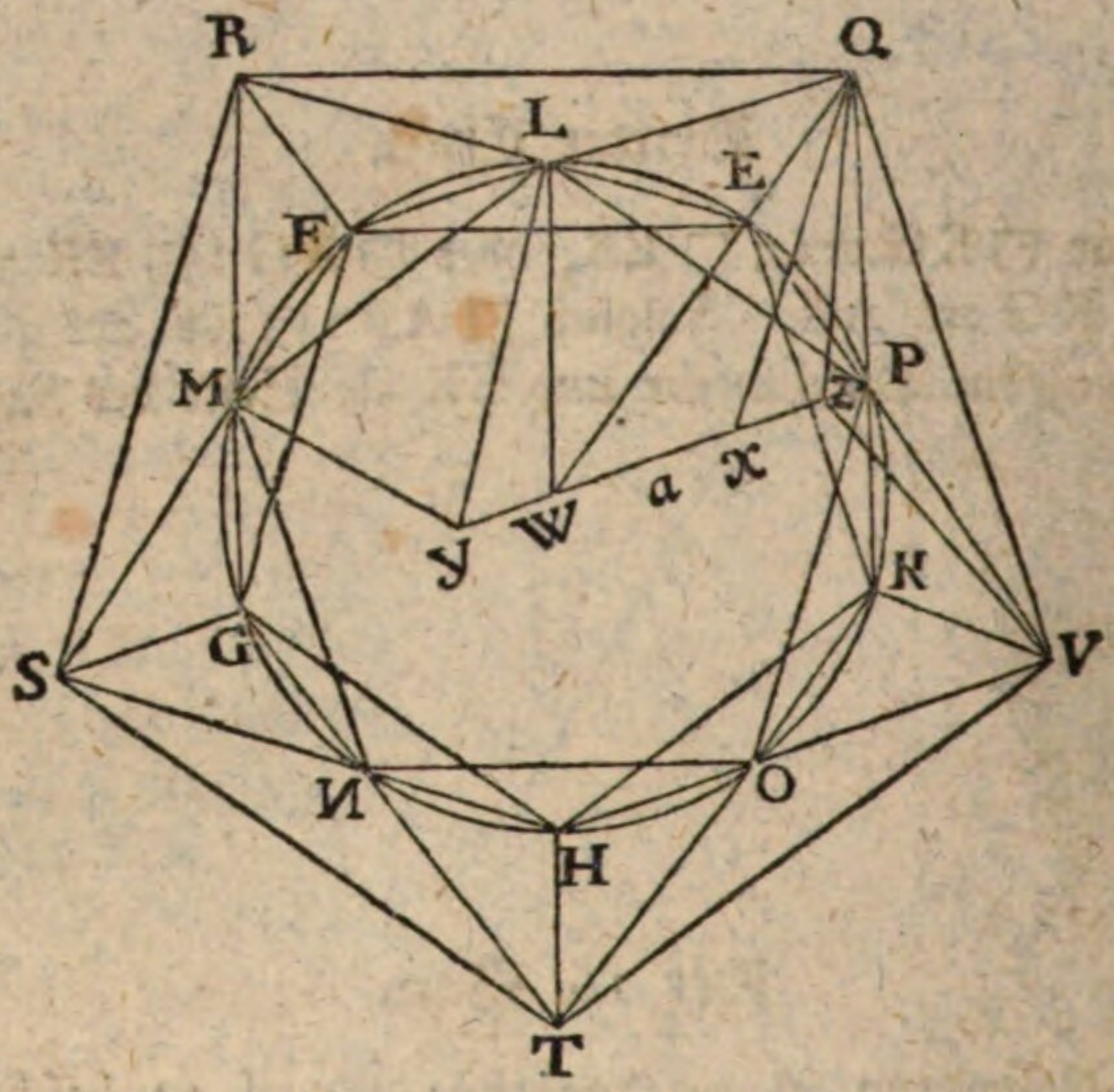
Der 16. Satz.

Ein Ikosaedron in eine gegebne Kugel zu beschreiben; auch zu beweisen, daß die Seite des Ikosaedrons irrational, genannt die kleinere, sey.

Erster Theil.

Es sey der (13, 13. 14. 15. S.) gegebnen Kugel Durchmesser, AB, in C geschnitten, so daß AC = 4 CB, folglich AB = 5 BC. Beschreibe über AB den halben Cirkel ADB, errichte in C auf AB den Perpendikel CD, und ziehe DB. Nun sey ein Cirkel, EFGHK, dessen Halbmesser = DB. In diesen beschreibe ein gleichseitiges und gleichwinkliches Pentagon, EFGHK. Halbire





die Bogen EF, FG, GH, HK, KE, in den Punkten L, M, N, O, P, und ziehe die Linien EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, OK, KP, PE, desgleichen LM, MN, NO, OP, PL: so ist LMNOP auch ein gleichseitiges Pentagon, und die Linie PE die Seite des Dekagons. In den Punkten, E, F, G, H, K, errichte auf der Cirkelfläche die Perpendikel, EQ, FR, GS, HT, KV, und mache jeden derselben dem Halbmesser des Cirkels, EFGHK, gleich. Ziehe QR, RS, ST, TV, VQ, desgleichen QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OV, VP, PQ.

Da EQ, KV, auf der Cirkelfläche senkrecht, so sind sie (11, 6. S.) parallel. Nun sind sie auch gleich. Folglich sind (1, 33. S.) auch VQ, EK, gleich und parallel. Nun ist EK die Seite des im Cirkel beschriebnen Pentagons, folglich auch VQ,

und

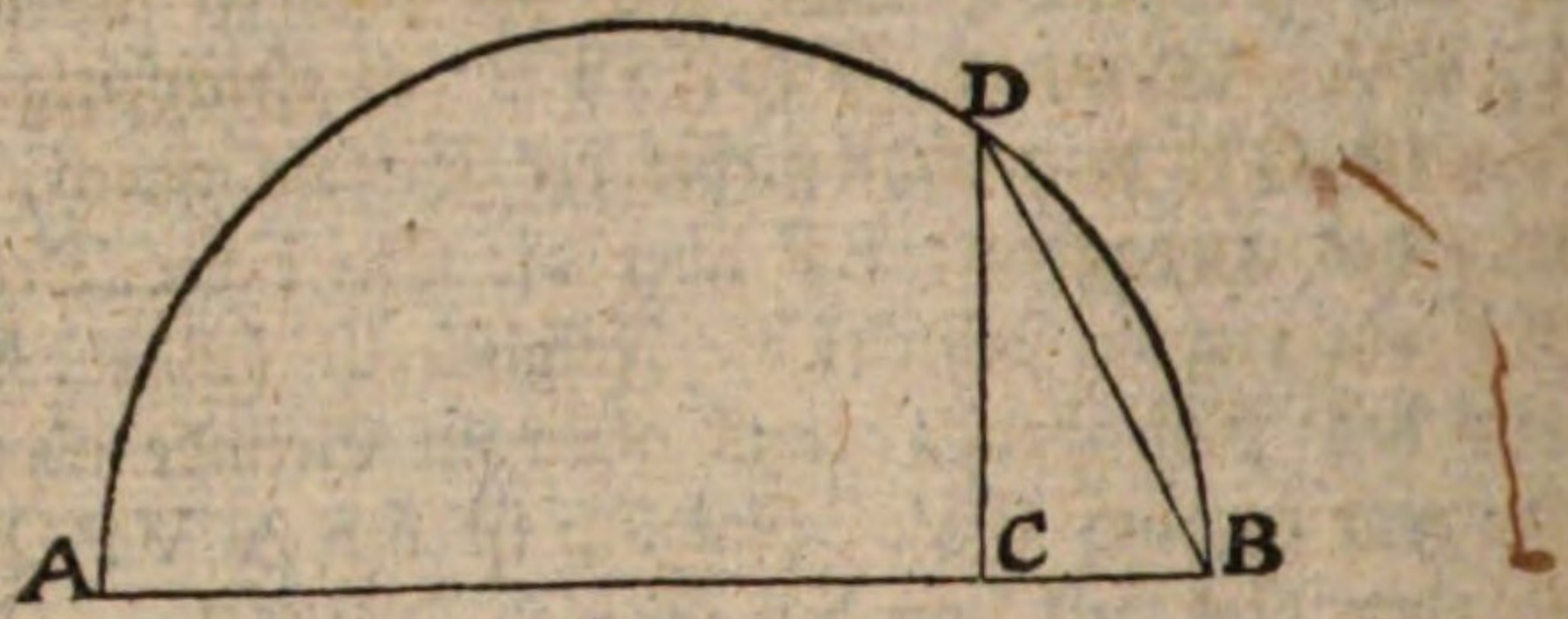
und aus gleichem Grunde auch die übrigen Linien, QR, RS, ST, TV. Demnach ist QRSTV ein gleichseitiges Pentagon. Nun ist QE dem Halbmesser des Cirkels gleich, folglich die Seite des Hexagons; EP aber die Seite des Dekagons, und QEP ein rechter Winkel. Folglich ist (13, 10. S.) QP die Seite des Pentagons; aus gleichem Grunde aber auch PV. Nun war es auch QV. Folglich ist der △ VPQ aleichseitig. Und eben dies gilt von den übrigen Triangeln, QLR, RMS, SNT, TOV.

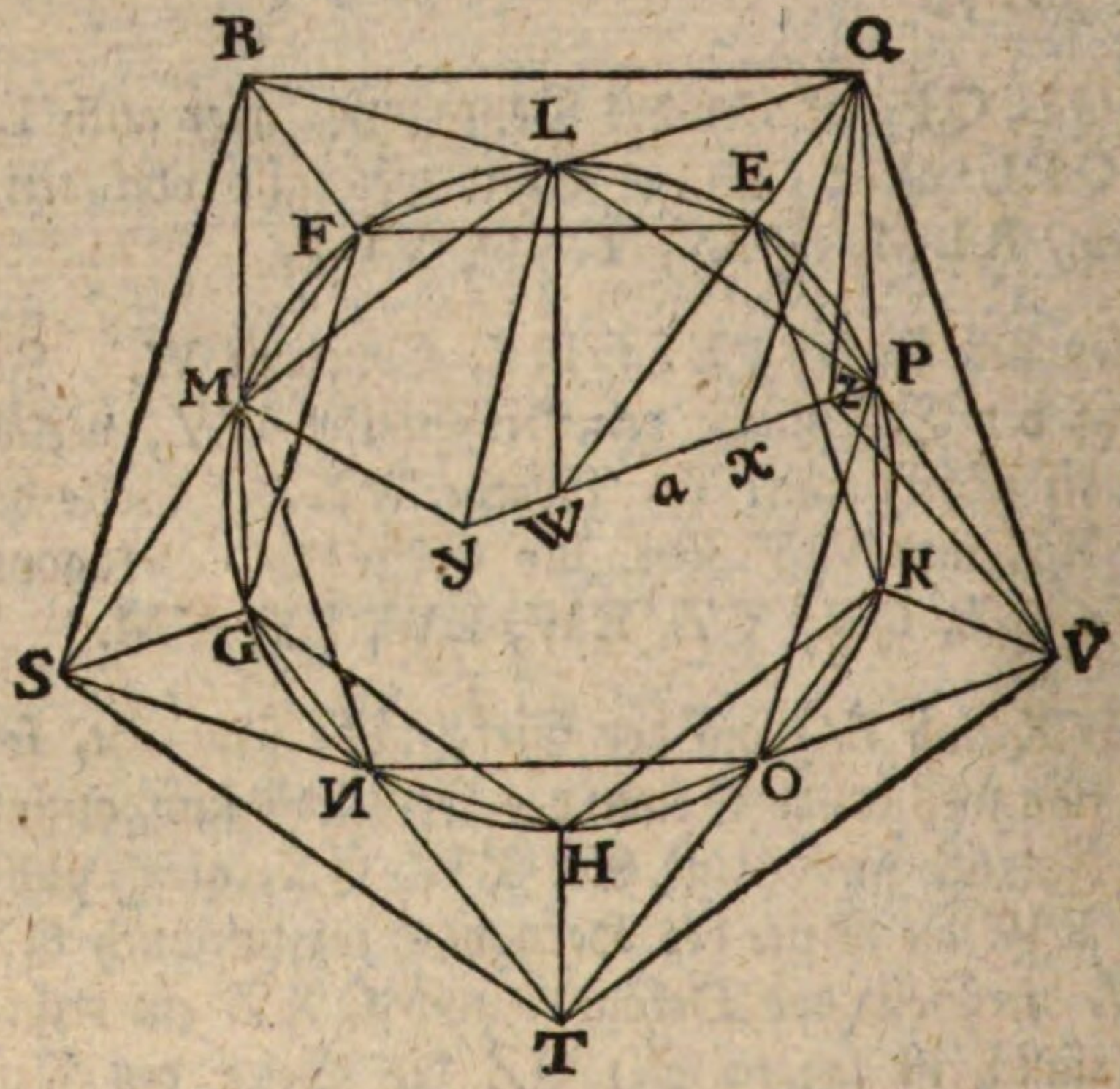
Da QL, QP, Seiten des Pentagons, aber auch LP, so ist der △ QPL gleichseitig. Eben dies gilt von den übrigen Triangeln, RLM, SMN, TNO, VOP.

Es sey des Cirkels, EFGHK, Centrum W. In W errichte auf der Cirkelfläche den Perpendikel WZ, verlängert an der andern Seite nach Y. Mache WX der Seite des Hexagons; XZ und WY aber, der Seite des Dekagons gleich, und ziehe QZ, QX, VZ, EW, LW, LY, YM.

Da WX und EQ auf der Cirkelfläche senkrecht, so sind sie parallel, und weil beyde Seiten des Hexagons sind, auch einander gleich. Folglich sind (1, 33. S.) EW, QX, gleich und parallel. Nun ist EW die Seite des Hexagons, folglich auch QX. Nun war XZ die Seite des Dekagons und QXZ ein rechter Winkel. Folglich ist (13, 10. S.) QZ die Seite des Pentagons. Aus gleichem Grunde ist es auch VZ. Nun war es auch QV. Folglich ist der △ VQZ gleichseitig. Eben dies gilt auch von den übrigen Triangeln, deren Grundlinien QR, RS, ST, TV, und deren Spitze Z.

Da WL die Seite des Hexagons, und WY die Seite des Dekagons, auch LWY ein rechter Winkel, so ist (13, 10. S.) LY die Seite des Pentagons. Eben so wird, wenn man MW ziehet, bewiesen, daß MY die Seite des Pentagons ist. Nun war es auch ML. Folglich ist der △ LMY gleichseitig. Eben dies gilt auch von allen übrigen Triangeln, deren Grundlinien MN, NO, OP, PL, und deren Spitze Y. Demnach ist der construirte Körper ein Ikosaedron.





Zweyter Theil.

Da WX die Seite des Hexagons, und XZ die Seite des Dekagons, so ist (13, 9. S.) WZ nach stetiger Proportion in X geschnitten, folglich ZW : WX = WX : XZ. Nun ist WX = LW, und XZ = WY. Demnach ist ZW : WL = LW : WY. Nun sind bey W rechte Winkel. Folglich sind, wenn LZ gezogen wird, die Triangel, LYW, LWZ, ähnlich, folglich (6, 6. S.) YLZ ein rechter Winkel, folglich geht (3, 31. S.) ein halber Cirkel, welcher über YZ beschrieben wird, durch L.

Auf gleiche Art, da ZW : WX = WX : XZ, aber ZW = XY, und WX = XQ, ist YX : XQ = QX : XZ. Ziehet man nun QY, so ist ebenfalls, wie vorher, YQZ ein rechter

rechter Winkel, und der halbe Cirkel über YZ gehet auch durch Q, und aus gleichem Grunde auch durch alle übrige Eckpunkte des Ikosaedrons, welche daher die Oberfläche der Kugel berühren, deren Durchmesser YZ.

Da WZ nach stetiger Proportion in X geschnitten, so ist, wenn man WX in a halbirt, (13, 3. S.) □ Za = 5 □ aX. Nun ist YZ = 2 Za, und WX = 2 aX. Folglich ist auch □ YZ = 5 □ WX = 5 □ BD.

Da AB = 5 BC, und (6, 8. und 20. S.) AB : BC = □ AB : □ BD, so ist auch □ AB = 5 □ BD. Nun war auch □ YZ = 5 □ BD. Folglich ist YZ = AB, dem Durchmesser der gegebnen Kugel.

Dritter Theil.

Da □ AB = 5 □ BD, und AB rational, so ist auch BD rational. Nun ist der Halbmesser des Cirkels, EFGHK, = BD, folglich dieser Halbmesser, und also auch der Durchmesser, rational. Folglich ist (13, 11. S.) die Seite des Pentagons, welches in solchen Cirkel beschrieben wird, irrational, genannt die kleinere. Diese Seite aber ist die Seite des Ikosaedrons.

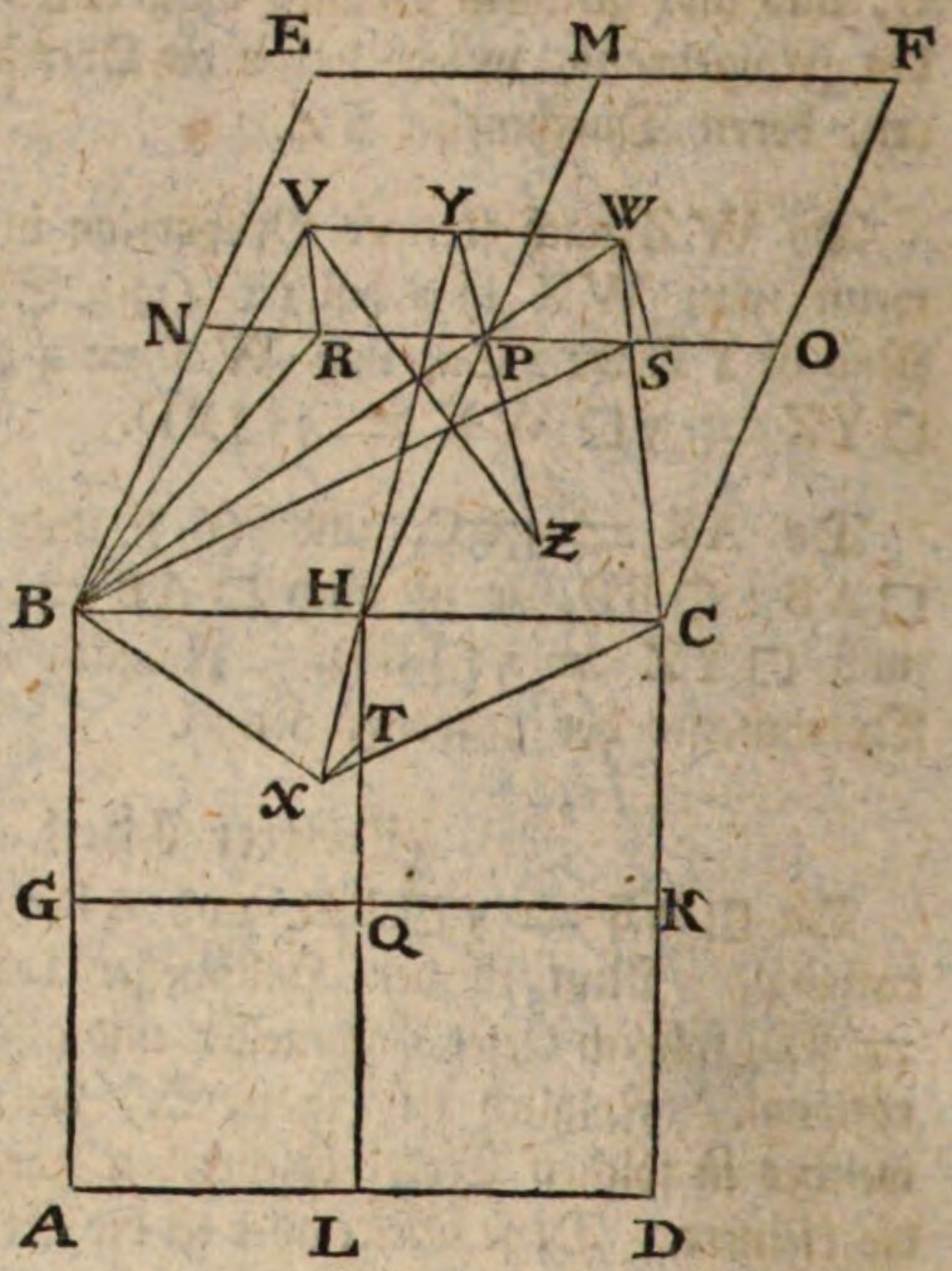
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß das Quadrat des Durchmessers der Kugel fünfmal so groß ist, als das Quadrat des Halbmessers desjenigen Cirkels, auf welchem das Ikosaedron beschrieben wird; auch daß der Durchmesser der Kugel zusammengesetzt ist aus der Seite des Hexagons, und aus zwey Seiten des Dekagons, für einerley Cirkel.

Der 17. Satz.

Ein Dodekaedron in eine gegebne Kugel zu beschreiben; auch zu beweisen, daß die Seite des Dodekaedrons irrational, genannt Apotome, sey.

Erster Theil.



Es seyen von den (13, 15. S.) construirten Kubus zwey Seitenflächen, ABCD, CBEF, rechtwinklich auf einander gestellt. Halbire jede der Linien, AB, BC, CD, DA, EF, EB, FC, in den Punkten, G, H, K, L, M, N, O, und ziehe GK, HL, MH, NO. Schneide nach stetiger Proportion NP, PO, HQ, in den Punkten R, S, T, so daß PR, PS, QT, die grössern Abschnitte sind. In diesen Punkten R, S, T, errichte auf den Seitenflächen des Kubus ausserhalb die Perpendikel, RV, SW, TX, mache solche den grössern Abschnitten, PR, PS, QT, gleich, und ziehe VB, BX, XC, CW, WV.

Erstlich ist zu beweisen, daß VBXCW ein gleichseitiges, gleichwinkliches, und in Einer Ebne liegendes Pentagon sey.

1.) Das Pentagon ist gleichseitig. Ziehe RB, SB, WB. Da NP nach stetiger Proportion in R geschnitten, und PR der grössere Abschnitt, so ist (13, 4. S.) □PN + □NR = 3□PR. Nun ist PN = NB, und PR = RV. Folglich ist □BN + □NR = 3□RV. Nun ist (1, 47. S.) □BN + □NR = □BR. Folglich ist □BR = 3□RV, folglich □BR + □RV, das ist □BV, = 4□RV, folglich (6, 20. S.) BV = 2RV. Nun ist, weil RS = 2RP = 2RV, auch VW = 2RV. Folglich BV = VW. Eben so wird bewiesen, daß auch die übrigen Seiten des Pentagons, BX, XC, CW, der BV, oder VW, gleich sind.

2.) Das

2.) Das Pentagon ist in Einer Ebne. Ziehe durch P den Linien RV, SW, die PY auf der äussern Seite des Kubus parallel. Ziehe YH, HX, so ist YHX Eine gerade Linie. Denn da HQ nach stetiger Proportion in T geschnitten, und QT der grössere Abschnitt, so ist HQ : QT = QT : TH. Nun ist HQ = HP, und QT = TX = PY. Folglich ist HP : PY = TX : TH. Nun sind (11, 6. S.) HP, TX, parallel, weil sie auf der Ebne BD senkrecht, und TH, PY, parallel, weil sie auf der Ebne BF senkrecht. Folglich sind (6, 32. S.) YH, HX, in Einer geraden Linie, folglich ist (11, 1. S.) das Pentagon, worin diese gerade Linie, in Einer Ebne.

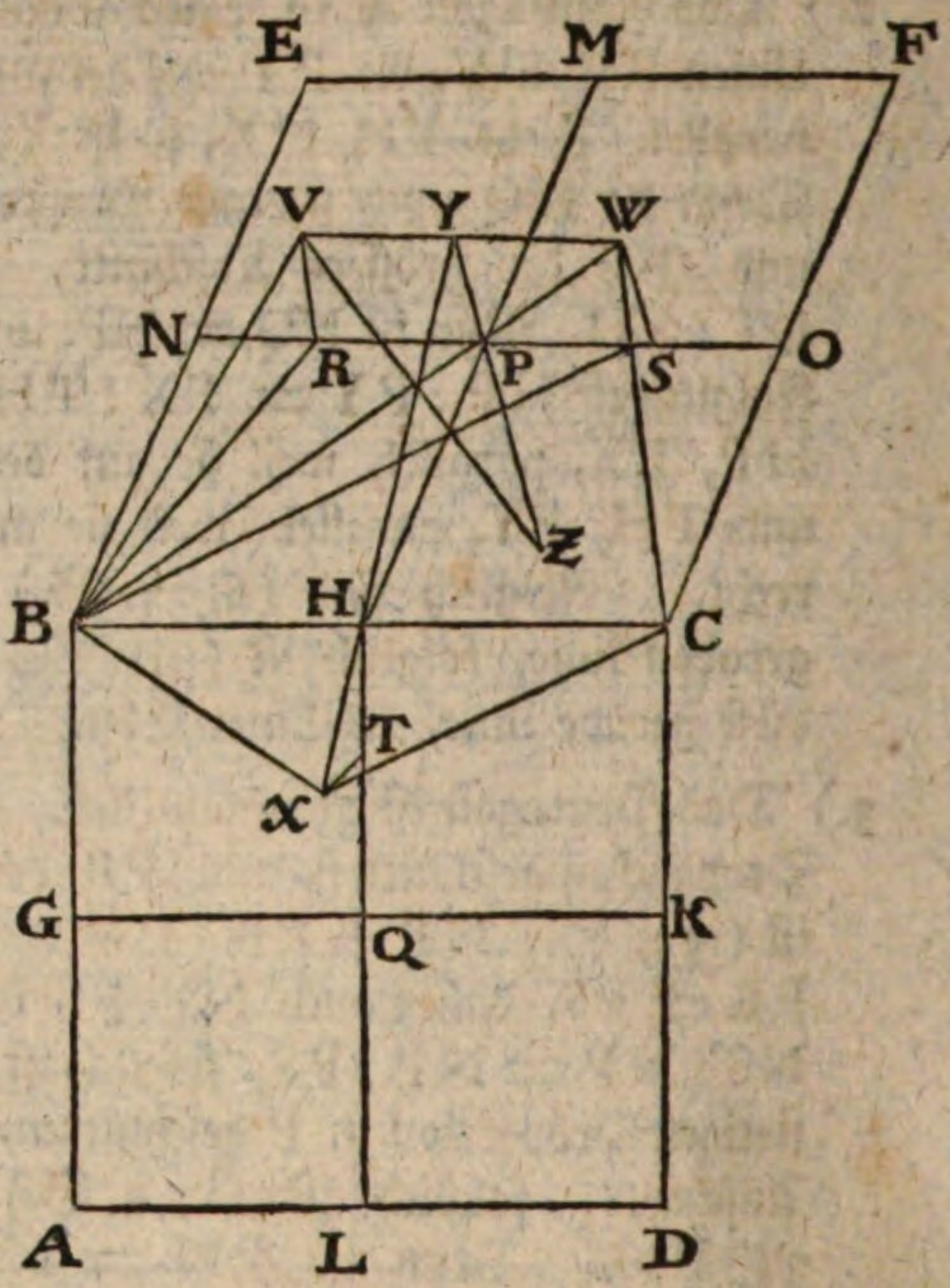
3.) Das Pentagon ist gleichwinklich. Da NP nach stetiger Proportion geschnitten, und PR der grössere Abschnitt, so ist (13, 5. S.) NP + PR : PN = NP : PS. Nun ist PR = PS, daher auch NP + PR = NS. Folglich ist NS : NP = NP : PS, folglich ist (6, 3. Def.) NS nach stetiger Proportion in P geschnitten, und NP der grössere Abschnitt, folglich ist (13, 4. S.) □NS + □SP = 3□PN. Nun ist PN = NB; und SP = SW. Folglich ist □NS + □SW = 3□NB, folglich □NB + □NS + □SW = 4□NB. Nun ist (1, 47. S.) □NB + □NS = □BS. Folglich ist □BS + □SW, das ist, □BW = 4□NB, folglich ist (6, 20. S.) BW = 2NB = BC. Demnach sind in den Triangeln, VBW, XBC, drey Seiten dreyen Seiten gleich, folglich ist (1, 8. S.) BVW = BXC. Eben so wird bewiesen, daß VWC = BXC = BVW. Folglich ist (13, 7. S.) das Pentagon auch gleichwinklich.

Zweytens. Wird auf jeder der zwölf Seiten des Kubus, so wie auf der Seite BC, ein eben solches Pentagon beschrieben: so entsteht ein Körper, welcher von zwölf gleichseitigen und gleichwinklichen Pentagonen begrenzt ist, das ist, ein Dodekaedron.

Zweyter Theil.

Verlängre YP innerhalb des Kubus nach Z, so wird (11, 39. S.) YZ dem Diameter des Kubus begegnen und beyde einander halbiren.

halbiren. Dies geschehe in Z. Folglich ist (13, 15. S.) Z das Centrum der Kugel für den Kubus, und PZ der halben Seite des Kubus, PN, gleich. Ziehe VZ. Da NS nach stetiger Proportion in P geschnitten, und NP der grössere Abschnitt, so ist (13, 4. S.) □NS + □SP = 3 □NP. Nun ist NS = YZ (weil NP = PZ und PS = YP) und SP = VY (weil SP = PR.) Folglich ist □YZ + □VY, das ist □VZ, = 3 □NP. Nun



ist (13, 15. S.) das Quadrat des Durchmessers der Kugel dreymal so groß, als das Quadrat der Seite des Kubus. Folglich ist auch das Quadrat des Halbmessers der Kugel dreymal so groß, als das Quadrat der halben Seite des Kubus. Nun ist NP die halbe Seite des Kubus. Folglich VZ der Halbmesser der Kugel für den Kubus, Z das Centrum, und V ein Punkt in der Oberfläche der Kugel. Auf gleiche Art läßt sich beweisen, daß, so wie V, auch jeder andre Punkt des Dodekaedrons, in der Oberfläche der Kugel sey.

Dritter Theil.

Da NP nach stetiger Proportion in R geschnitten, und RP der grössere Abschnitt, so ist NP : PR = PR : RN, folglich (5, 15. S.) 2 NP : 2 PR = 2 PR : 2 RN, das ist, NO : RS = RS : RN + SO. Nun ist NO > RS. Folglich RS = RN + SO, folglich ist NO nach stetiger Proportion geschnitten, und der grössere Abschnitt RS.

Da

Da der Durchmesser der Kugel rational, und (13, 15. S.) das Quadrat dieses Durchmessers dreymal so groß, als das Quadrat der Seite des Kubus, NO, so ist NO auch rational, folglich (13, 6. S.) ihr Abschnitt, wie RS, irrational, genannt Apotome. Nun ist aber RS = VW, der Seite des Dodekaedrons.

Zusatz:

Hieraus erhellet, daß, wenn eine Seite des Kubus nach stetiger Proportion geschnitten wird, der grössere Abschnitt die Seite des Dodekaedrons sey.

Der 18. Satz.

Die Seiten der fünf regulären Körper darzustellen, und ihre Verhältniß zu einander zu bestimmen.

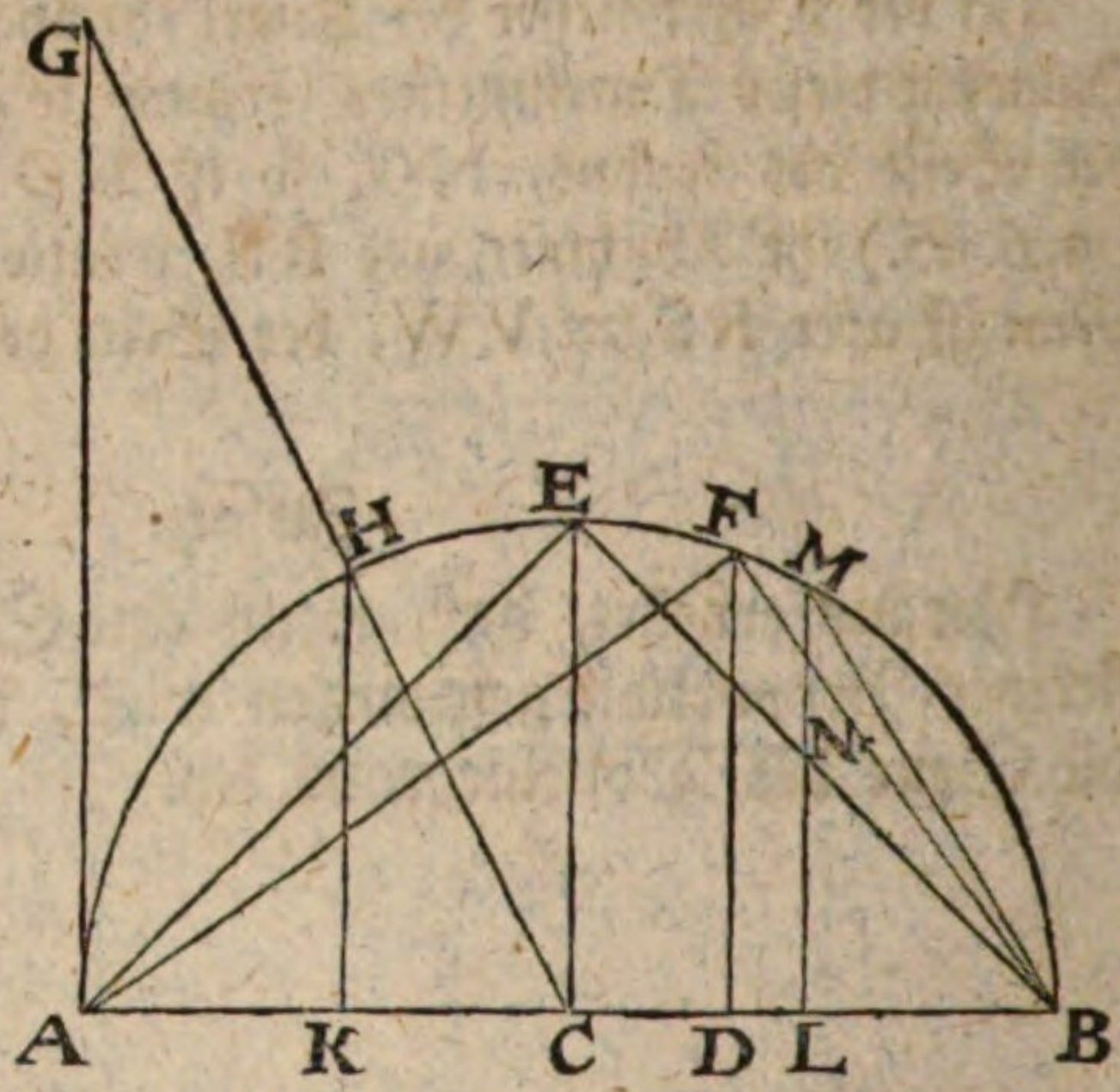
Erster Theil.

Es sey der Durchmesser der gegebnen Kugel, AB, in C und D so geschnitten, daß AC = CB, und AD = 2 DB. Ueber AB beschreibe den halben Cirkel, AEB, und errichte in C und D auf AB die Perpendikel, CE, DF. Ziehe AF, FB, AE, EB.

Da AD = 2 DB, so ist AB = 3 DB, oder AB : DB = 3 : 1, folglich zurückkehrend (5, 19. S.) AB : AD = 3 : 2. Nun ist △ AFB ∼ △ AFD, und daher (6, 20. S.) AB : AD = □ AB : □ AF. Folglich ist auch □ AB : □ AF = 3 : 2, folglich, da AB der Durchmesser der Kugel, ist (13, 13. S.) AF die Seite des Tetraedrons.

Da

Da AD = 2 DB, folglich AB = 3 DB, aber (6, 8. u. 20. S.) AB : BD = □ AB : □ BF, so ist auch □ AB = 3 □ BF. Folglich, da AB der Durchmesser der Kugel, ist (13, 15. S.) BF die Seite des **Kubus.**



Da AC = CB, folglich AB = 2 BC, aber AB : BC = □ AB : □ BE, so ist auch □ AB = 2 □ BE. Folglich, da AB der Durchmesser der Kugel, ist (13, 14. S.) BE die Seite des **Oktaedrons.**

In A errichte auf AB den Perpendikel AG = AB, ziehe GC, und fälle von H auf AB den Perpendikel HK. Da AG = 2 AC, und (6, 4. S.) GA : AC = HK : KC, so ist HK = 2 KC, folglich (6, 20. S.) □ HK = 4 □ KC, folglich □ HK + □ KC, das ist □ HC, = 5 □ KC. Nun ist HC = CB, und daher □ HC = □ CB. Folglich ist □ CB = 5 □ KC.

Da AB = 2 BC, und AD = 2 DB, so ist (subtrahirt) BD = 2 CD, folglich BC = 3 CD, folglich (6, 20. S.) □ BC = 9 □ CD. Nun war □ BC = 5 □ KC. Folglich ist □ KC > □ CD, folglich KC > CD. Mache daher CL = CK, errichte in L auf AB den Perpendikel LM, und ziehe MB.

Da AB = 2 BC, und LK = 2 KC, so ist BC : CK = AB : KL. Nun war □ BC = 5 □ CK. Folglich ist auch □ AB = 5 □ KL. Folglich, da AB der Durchmesser der Kugel, ist (13, 16. Zus.) KL die Seite des Hexagons in demjenigen Cirkel, auf welchen das Ikosaedron beschrieben wird, und KA, oder LB, die Seite des **Dekagons** in eben dem Cirkel.

Da

Da ML, HK, gleich weit vom Mittelpunkte abstehen, so sind sie (3, 14. S.) einander gleich. Nun ist HK = KL, (weil jede = 2 KC). Folglich ist ML = LK, der Seite des Hexagons. Nun war LB die Seite des Dekagons, und MLB ein rechter Winkel. Folglich ist (13, 10. S.) MB die Seite des Pentagons, folglich (13, 17. Zus.) auch die Seite des Ikosaedrons.

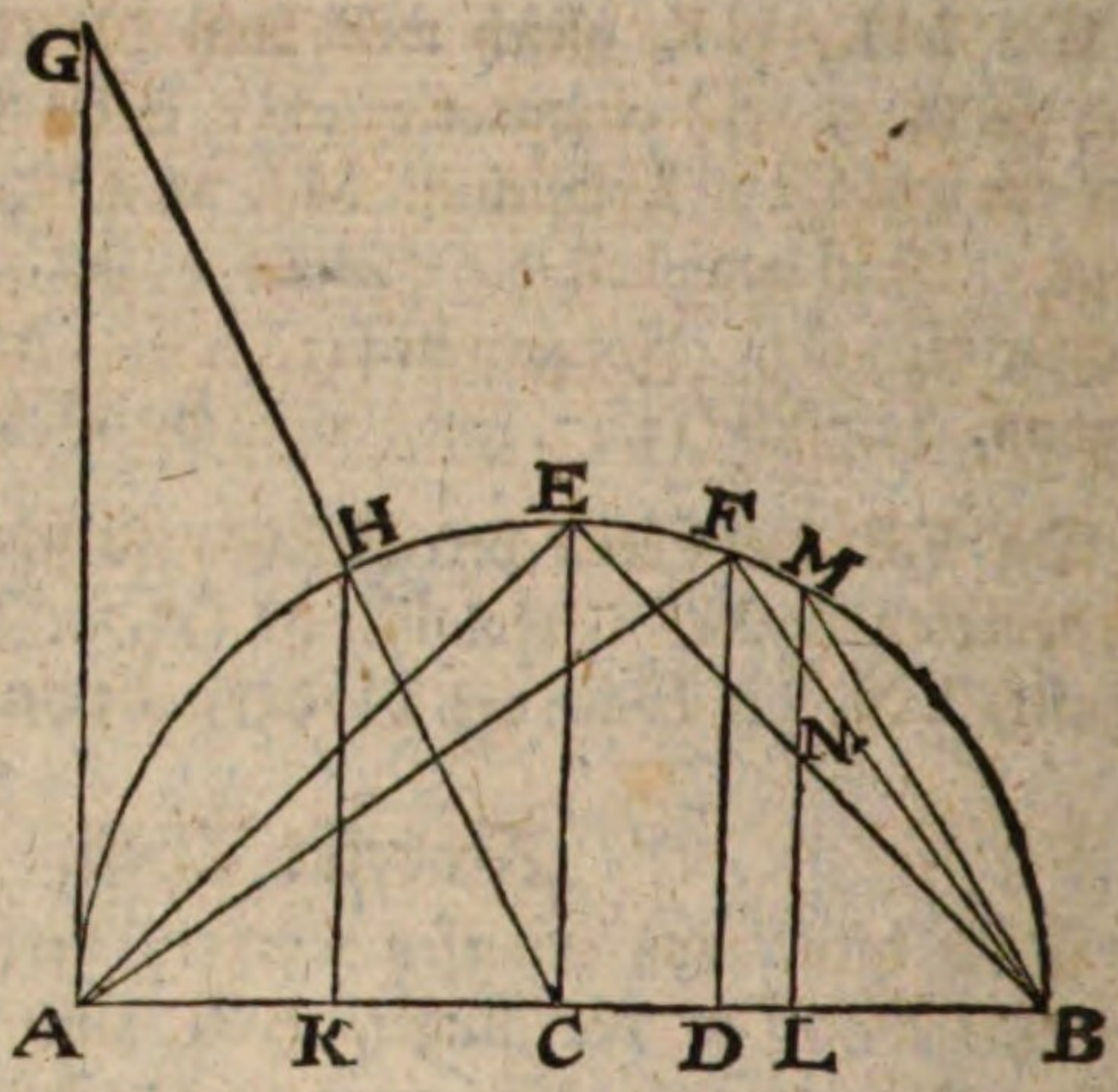
Da FB die Seite des Kubus, so schneide sie nach stetiger Proportion in N. Folglich ist (13, 17. Zus.) der grössere Abschnitt, BN, die Seite des Dodekaedrons.

Zweyter Theil.

Nach dem, was erwiesen worden, verhält sich das Quadrat des Durchmessers der Kugel, AB, zum Quadrat der Seite a.) des Tetraedrons, AF, wie 3 zu 2; b.) des Oktaedrons, BE, wie 2 zu 1; c.) des Kubus, BF, wie 3 zu 1. Theilt man daher das Quadrat des Durchmessers, AB, in 6 Theile: so hat davon vier das □ AF; drey das □ BE; zwey das □ BF. Folglich ist □ AF : □ BE = 4 : 3, □ AF : □ FB = 4 : 2 = 2 : 1, □ BE : □ BF = 3 : 2. Demnach sind die Seiten der gedachten drey Körper, nämlich des Tetraedrons, des Oktaedrons, und des Kubus, zu einander in rationalen Verhältnissen; aber die Seiten der beyden übrigen Körper, nämlich des Ikosaedrons und Dodekaedrons, sind weder zu einander, noch zu den drey erstgedachten in rationalen Verhältnissen; weil sie irrational sind: die eine nämlich (13, 16. S.) die kleinere Irrationale, die andre (13, 17. S.) die Apotome. Doch läßt sich noch bestimmen, daß die Seite des Ikosaedrons, MB, grösser sey, als die Seite des Dodekaedrons, NB. Und dies kann man auf zweyerley Art beweisen:

1.) Da die Triangel, FDB, FAB, gleichwinklich, so ist (6, 4. S.) DB : BF = BF : BA, folglich (6, 20. Zus.) DB : BA = □ DB : □ BF, folglich (5, 4. Zus.) AB : BD = □ FB : □ BD. Nun ist AB = 3 BD. Folglich □ FB = 3 □ BD. Nun ist □ AD = 4 □ BD, weil AD = 2 BD. Folglich ist □ AD > □ FB, folglich AD > FB, folglich noch mehr AL > FB. Nun ist AL sowohl, als FB, nach stetiger Proportion geschnitten, und

und es ist der grössere Abschnitt von jener, KL; von dieser, BN. Folglich ist KL > BN, aber KL = LM, folglich ist LM > BN. Nun ist (1, 19. S.) MB > LM, folglich ist noch mehr MB > BN.



2.) Da (6, 8. S.) △FAB ∼ △FBD, so ist AB : BD = □AB : □BF. Nun ist AD = 2 DB, und daher AB = 3 BD. Folglich ist □AB = 3 □BF. Nun war □AB = 5 □KL. Folglich ist 5 □KL = 3 □BF. Da BN > NZ, so ist Rect. FBBN > □BF + □FN, folglich Rect. FBBN + Rect. BFFN > 2 Rect. BFFN, das ist (2, 2. S.) □FB > 2 □BN, folglich auch 3 □FB > 6 □BN. Nun war 3 □FB = 5 □KL. Folglich ist □KL > □BN, folglich KL > BN. Nun ist KL = LM, folglich LM > BN, folglich noch mehr MB > BN.

Anmerkung.

Ausser den vorerwähnten fünf Körpern, giebt es keinen andern regulären Körper, einen solchen nämlich, der von gleichseitigen und gleichwinklichen Ebnen, welche einander gleich sind, begrenzt würde.

1.) Aus zwey Triangeln, oder aus zwey andern Ebnen, wird (11, 11. Def.) kein körperlicher Winkel. Aus drey gleichseitigen Triangeln entsteht der körperliche Winkel des Tetraedrons; aus vieren des Oktaedrons; aus fünfen des Ikosaedrons. Aber aus sechs, oder mehrern gleichseitigen Triangeln entsteht kein körperlicher Winkel, weil (1, 32. S.) Ein Winkel des gleichseitigen Triangels = $\frac{2}{3}$ R, folglich sechs solche Winkel = 4 R, welches (11, 21. S.) unmöglich.

2.) aus

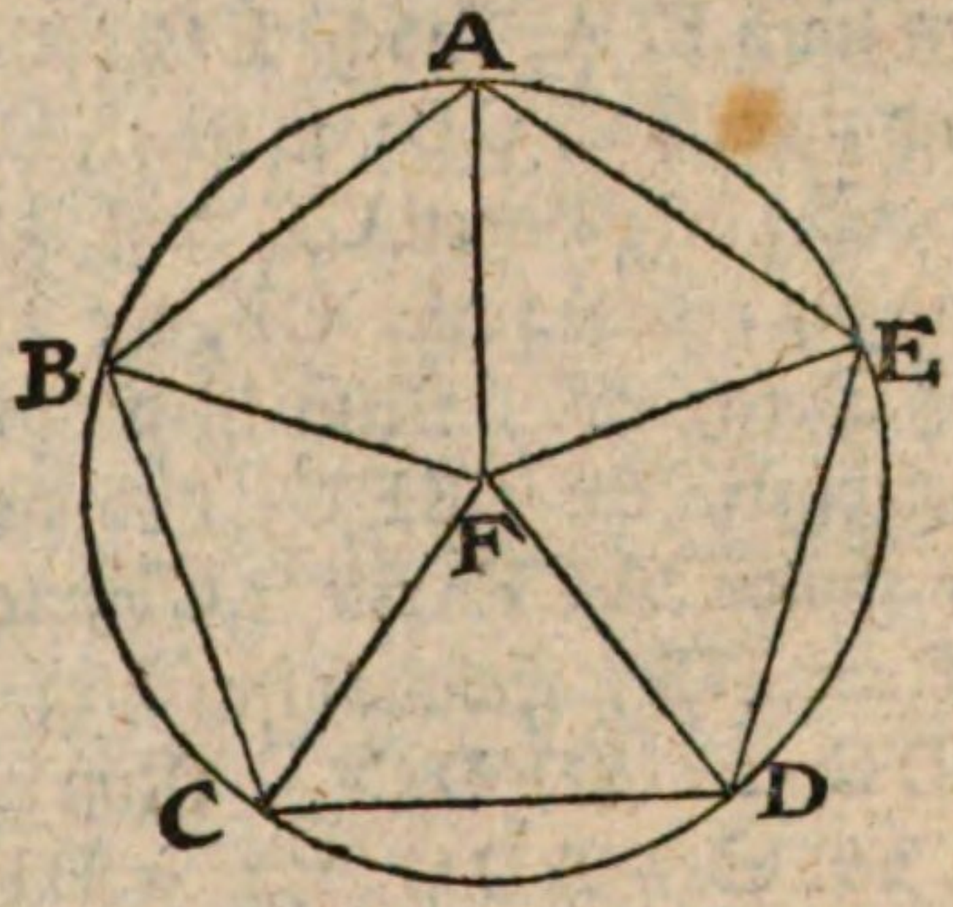
2.) aus drey Quadraten entsteht der körperliche Winkel des Kubus. Aber aus vier oder mehrern Quadraten entsteht (11, 21. S.) kein körperlicher Winkel.

3.) aus drey gleichseitigen und gleichwinklichen Pentagonen entsteht der körperliche Winkel des Dodekaedrons. Aber aus vier oder mehrern gleichseitigen und gleichwinklichen Pentagonen entsteht kein körperlicher Winkel; weil Ein Winkel eines solchen Pentagons $= 1\frac{1}{5}$ R, folglich vier solcher Winkel > 4 R, welches (11, 21. S.) unmöglich.

4.) aus andern Polygonen ist es noch weniger möglich, einen körperlichen Winkel zu machen.

Lehnsatz.

Daß der Winkel eines gleichseitigen und gleichwinklichen Pentagons $= 1\frac{1}{5}$ R. sey, wird also bewiesen:



Um das Pentagon, ABCDE, beschreibe einen Cirkel, dessen Centrum F, und ziehe die Halbmesser, FA, FB, FC, FD, FE, welche (4, 14. S.) die Winkel des Pentagons halbiren. Da die Centri-Winkel $= 4$ R, und alle einander gleich, so ist jeder derselben, wie AFB, $= 1 - \frac{1}{5}$ R. Folglich ist (1, 32. S.) FAB + ABF $= 1\frac{1}{5}$ R. Nun ist FAB $=$ FBC. Folglich FBC + ABF, das ist ABC, $= 1\frac{1}{5}$ R.

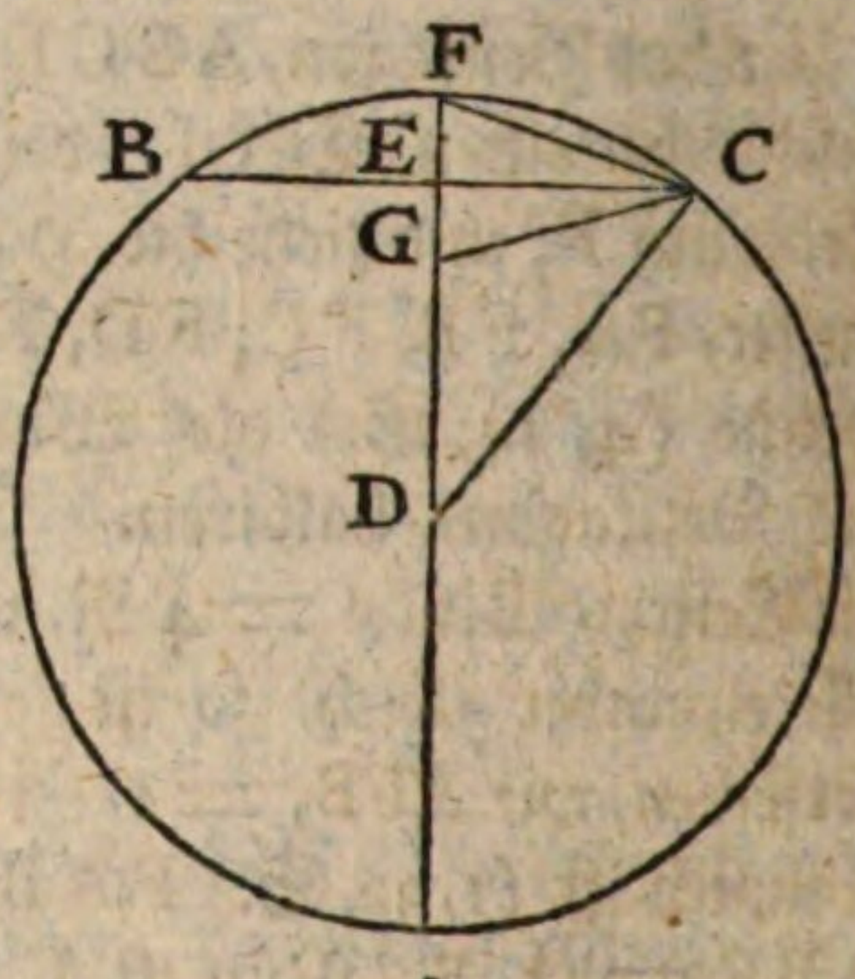
Euklids Elemente

Vierzehntes Buch.

Der 1. Satz.

Eines Cirkels, ABC, Halbmesser, DF, nebst der Seite eines in den Cirkel beschriebnen Dekagons, FC, ist doppelt so groß, als ein vom Mittelpunkte, D, auf die Seite eines in den Cirkel beschriebnen Pentagons, BC, gefällter Perpendikel, DE.

Verlängre DE an beyden Seiten nach F, A, mache EG = EF, und ziehe GC, CD: so ist (3, 3. und 30. S.) der Bogen CF = ½ BFC, und die gerade Linie, CF, die Seite des Dekagons. Nun ist die ganze Peripherie = 5 BFC, und daher die halbe ACF = 5 CF, oder AC = 4 CF. Folglich ist (6, 33. S.) ADC = 4 FDC. Nun ist (3, 20. S.) ADC = 2 DFC. Folglich ist 4 FDC = 2 DFC, folglich 2 FDC = DFC. Nun



ist, weil bey E rechte Winkel, FE = EG, und EC gemein, (1, 4. S.) DFC = FGC, und FC = CG. Folglich ist FGC = 2 FDC, folglich (1, 6. und 32. S.) DG = CG = FC. Nun war GE = EF. Folglich ist DG + GE, das ist DE, = FC + EF, folglich (wenn DE hinzukommt) 2 DE = FC + DF.

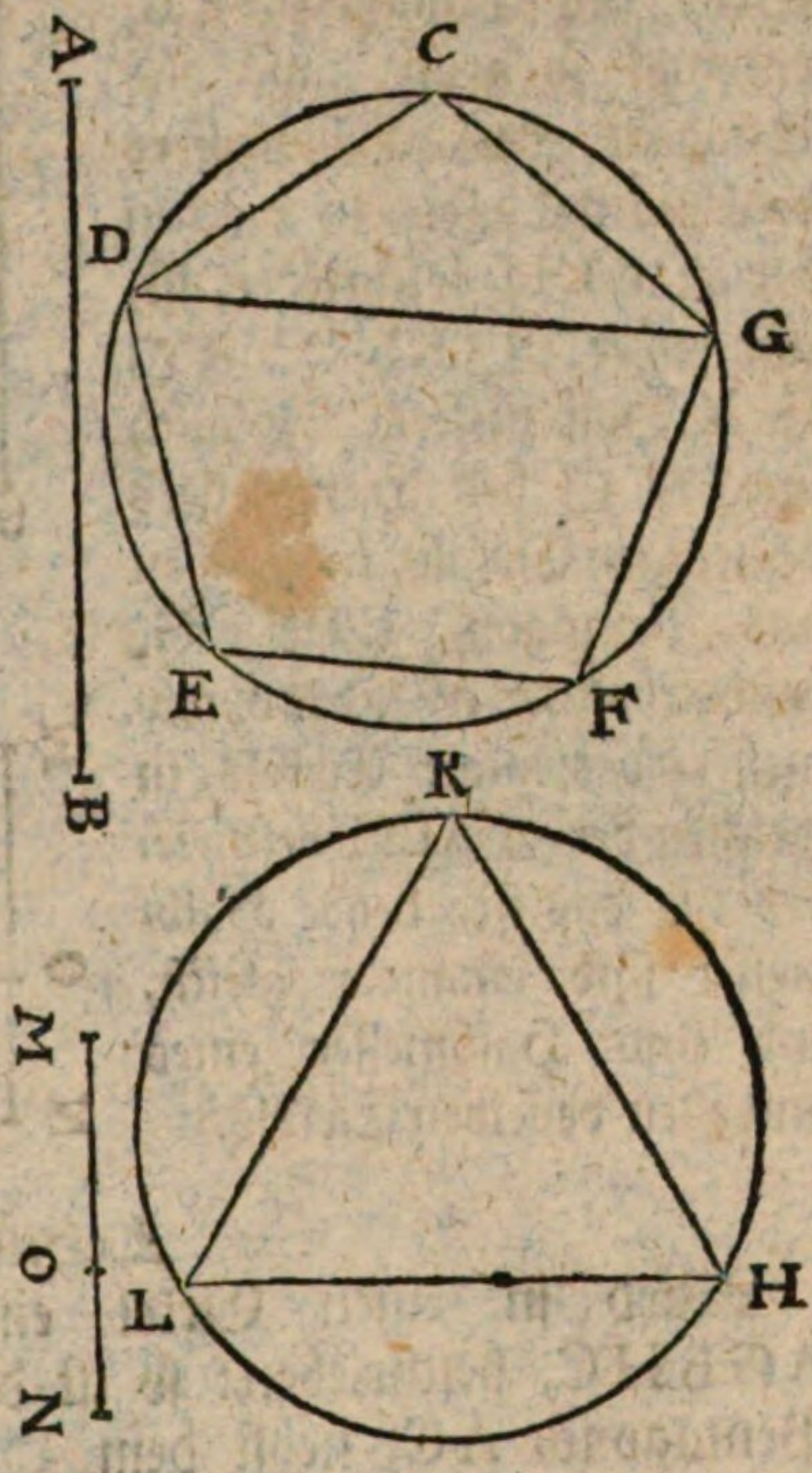
Zusatz.

Aus 13, 12. S. erhellet, daß der Perpendikel, vom Mittelpunkte auf die Seite eines in den Cirkel beschriebnen gleichseitigen Triangels, die Hälfte des Halbmessers sey.

Der

Der 2. Satz.

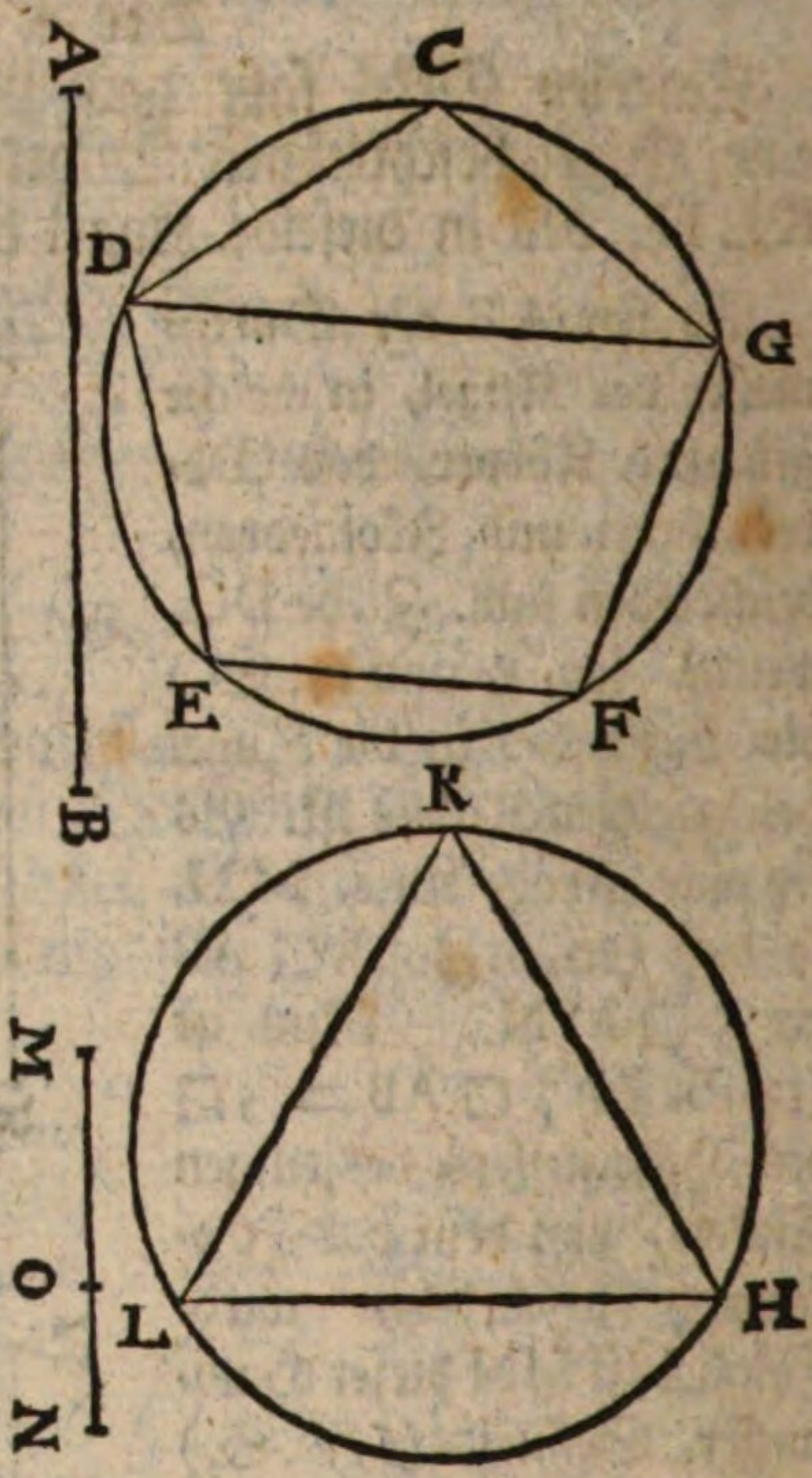
Einerley Cirkel faßt das Pentagon, CDEFG, des in eine Kugel beschriebnen Dodekaedrons, und den Triangel, KLH, des in dieselbe Kugel beschriebnen Ikosaedrons.



Es sey AB der Durchmesser der Kugel, in welche gedachte Körper, das Dodekaedron und Ikosaedron, beschrieben sind. Ziehe DG, welche (13, 8. und 17. S.) die Seite des in die Kugel beschriebnen Kubus ist. Es sey eine gerade Linie, MN, so daß (10, 6. Zus.) □ AB = 5 □ MN. Nun ist (13, 16. Zus.) □ AB = 5 □ des Halbmessers desjenigen Cirkels, von dem das Ikosaedron beschrieben wird. Folglich ist MN dieser Halbmesser. Schneide (6, 30. S.) MN nach stetiger Proportion, so ist (13, 5. u. 9. S.) der grössere Abschnitt, MO, die Seite des in denselben Cirkel beschriebnen Dekagons.

Da □ AB = 5 □ MN, und (13, 15. S. und 17. Zus.) □ AB = 3 □ DG, so ist 3 □ DG = 5 □ MN. Nun ist (13, 8. S. und 14, 7. S.) 3 □ DG : 5 □ MN = 3 □ CG : 5 □ MO. Folglich ist 3 □ CG = 5 □ MO. Nun ist (13, 16. S.) KL die Seite des Pentagons in dem vorgedachten Cirkel, von dem das Ikosaedron beschrieben wird, und daher (13, 10. S.) 5 □ KL = 5 □ MN + 5 □ MO. Folglich ist 5 □ KL = 3 □ DG + 3 □ CG. Nun ist (nächsteh. Lehnsatz) das Quadrat der Seite des Pentagons, CG, nebst dem Quadrat der Gegenseite des Pentagonwinkels, DG, fünfmal so groß, als das Quadrat des Halbmessers desjenigen Cirkels, in welchen das Pentagon beschrieben ist, und daher 3 □ DG + 3 □ CG = 15 □ dieses

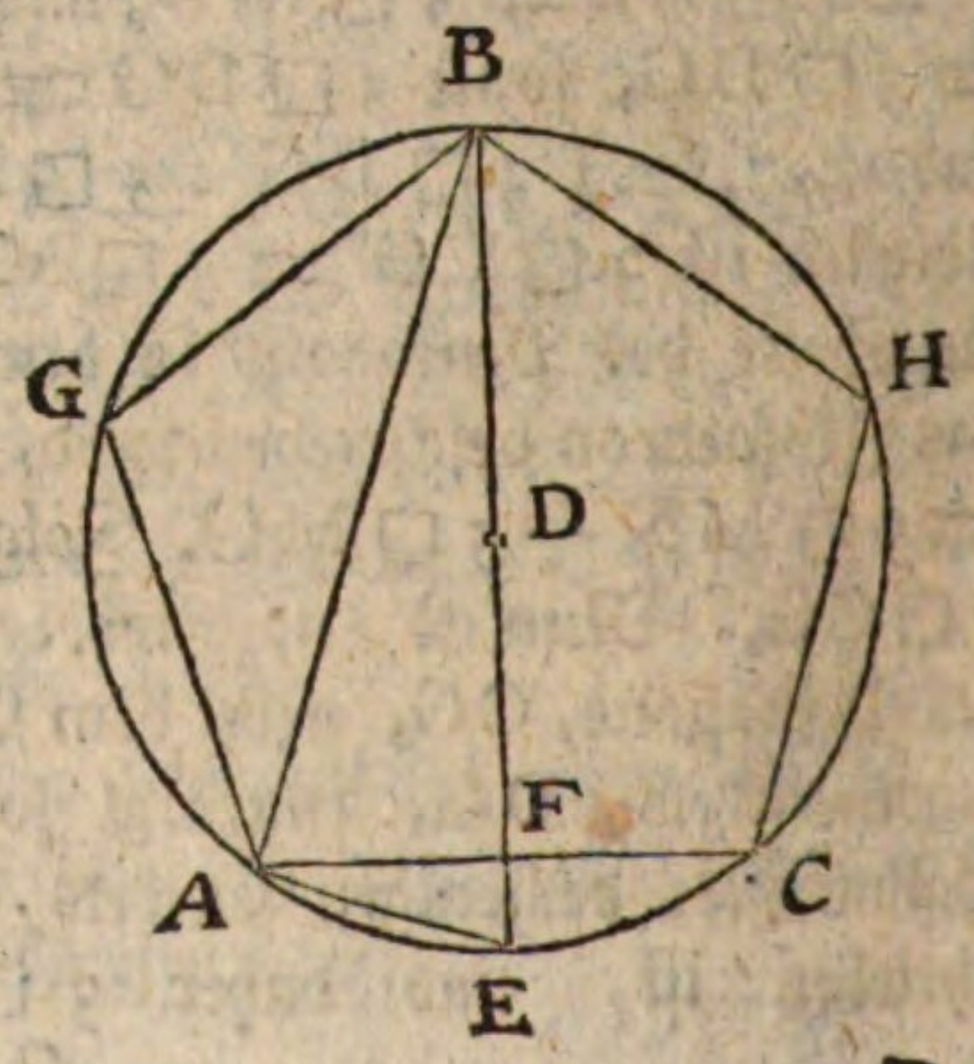
dieses Halbmessers. Folglich ist 5 □ KL = 15 □ dieses Halbmessers. Nun ist (13, 12. S.) das Quadrat der Seite des Triangels, KL, dreymal so groß, als das Quadrat des Halbmessers desjenigen Cirkels, in welchen der △ KLH beschrieben ist, und daher 5 □ KL = 15 □ dieses Halbmessers. Folglich sind 15 □ des Halbmessers desjenigen Cirkels, in welchen das Pentagon, CDEFG, beschrieben = 15 □ des Halbmessers desjenigen Cirkels, in welchen der △ KLH beschrieben ist, das ist, beyde Halbmesser sind einander gleich, und sind Halbmesser eines und eben desselben Cirkels.



Lehnsatz.

Wird in einen Cirkel ein gleichseitiges Pentagon, AGBHC, beschrieben: so ist das Quadrat der Seite des Pentagons, AC, nebst dem Quadrat der Gegenseite des Pentagonwinkels, AB, fünfmal so groß, als das Quadrat des Halbmessers, DE.

Ziehe AE, die Seite des Dekagons. Da BE = 2 DE, so ist (6, 20. Zus.) 4 □ DE = □ BE = □ BA + □ AE, folglich, wenn □ DE hinzukommt, 5 □ DE = □ BA + □ AE + □ DE. Nun ist (13, 10. S.) □ AE + □ DE = □ AC. Folglich ist 5 □ DE = □ BA + □ AC.



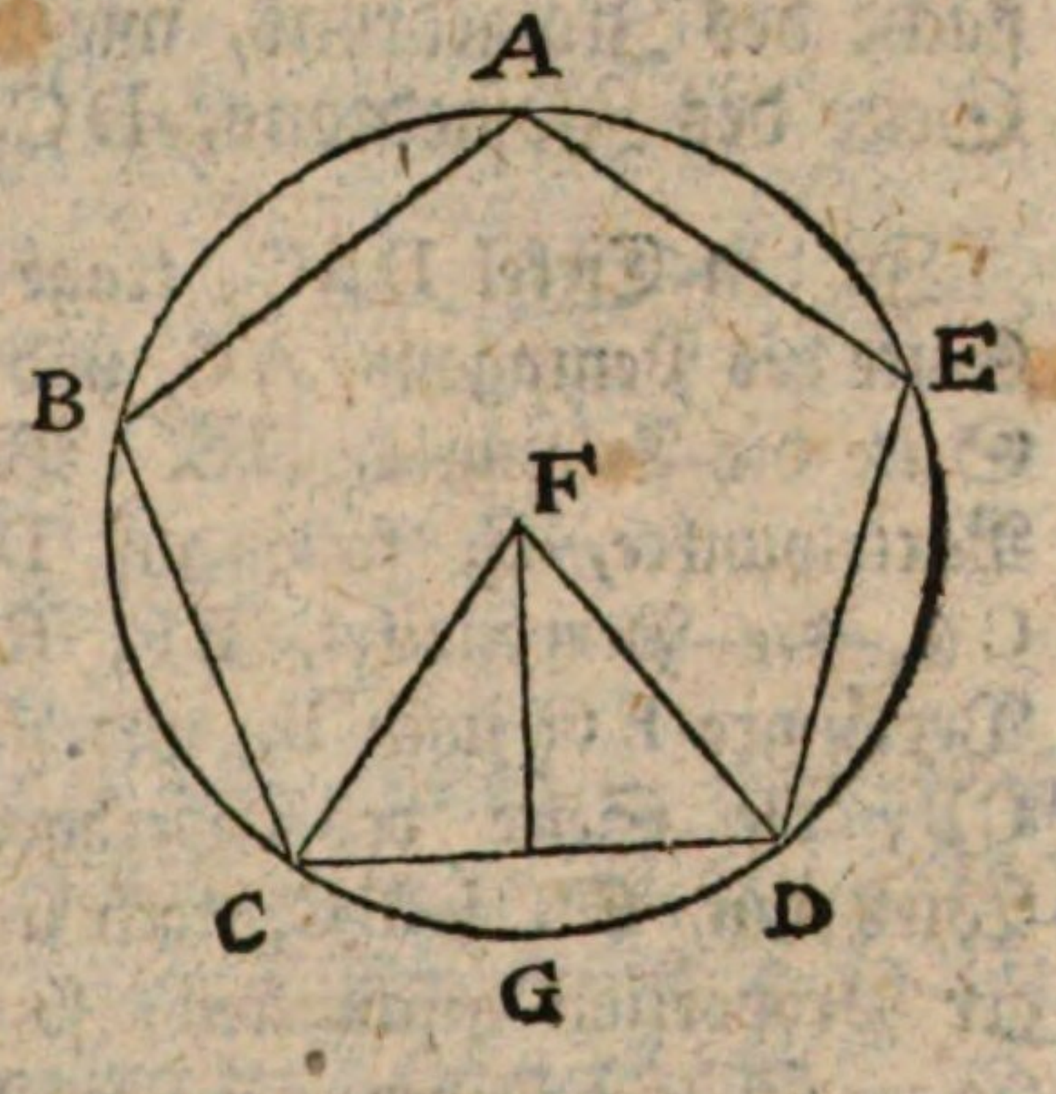
Der

Der 3. Satz.

Wenn vom Mittelpunkte, F, eines Cirkels, in welchen ein gleichseitiges und gleichwinkliches Pentagon, ABCDE, beschrieben ist, auf eine Seite des Pentagons, CD, ein Perpendikel, FG, fällt: so ist das dreyßigfache Rectangel aus der Seite, CD, und dem Perpendikel, FG, der Oberfläche des Dodekaedrons gleich. Eben so, wenn vom Mittelpunkte, D, eines Cirkels, in welchen ein gleichseitiger Triangel, ABC, beschrieben ist, auf eine Seite des Triangels, BC, ein Perpendikel, DE, fällt, ist das dreyßigfache Rectangel aus der Seite, BC, und dem Perpendikel, DE, der Oberfläche des Ikosaedrons gleich.

Erster Theil.

Ziehe CF, FD. Da (1, 41. S.) Rect. CDFG = 2 △ FCD, folglich 5 Rect. CDFG = 10 △ FCD = 2 Pentag. ABCDE: so ist 30 Rect. CDFG = 12 Pentag. ABCDE.



Zweyter Theil.

Ziehe BD, DC. Da (1, 41. S.) Rect. BCDE = 2 △ DBC, folglich 3 Rect. BCDE = 6 △ DBC = 2 △ ABC: so ist 30 Rect. BCDE = 20 △ ABC.

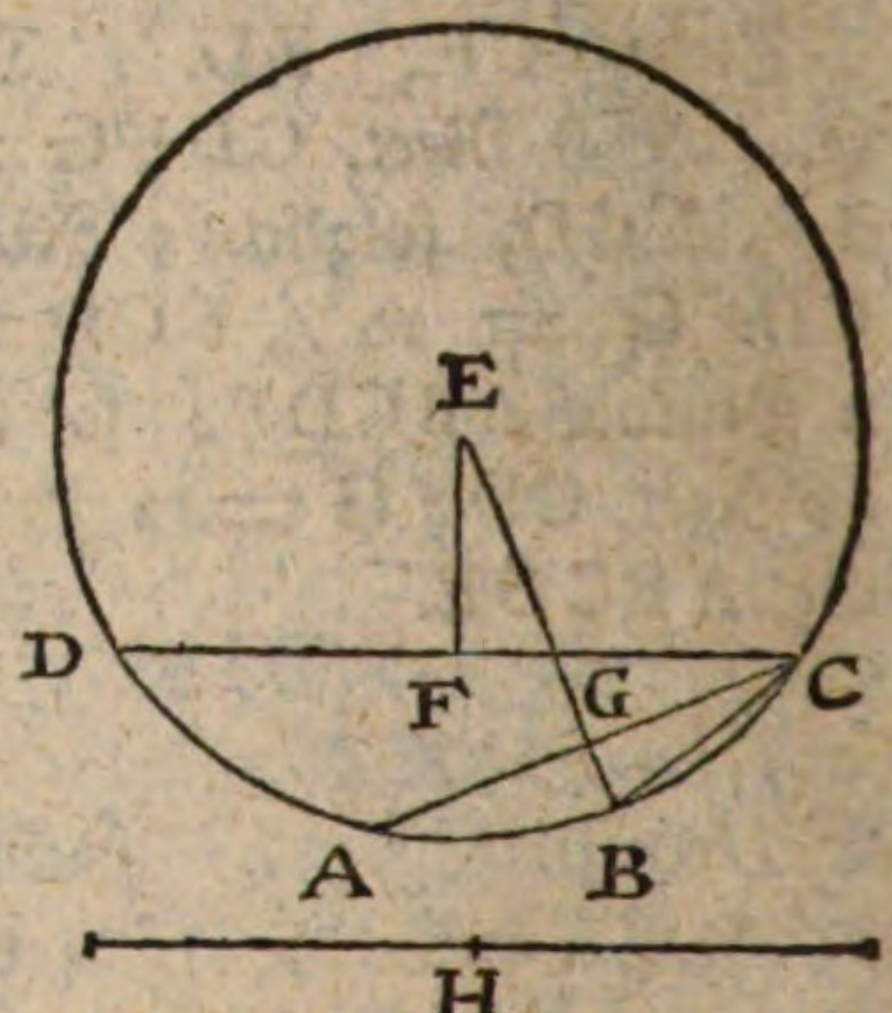
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß die Oberfläche des Dodekaedrons zur Oberfläche des Ikosaedrons, wenn beyde in einerley Kugel beschrieben sind, sich verhalte, wie das Rectangel aus der Seite des Pentagons, CD, und ihrem Perpendikel, FG, zum Rectangel aus der Seite des Triangels, ABC, und ihrem Perpendikel, DE.

Der 4. Satz.

Die Oberfläche des Dodekaedrons verhält sich zur Oberfläche des Ikosaedrons, wie die Seite des Kubus, H, zur Seite des Ikosaedrons, DC.

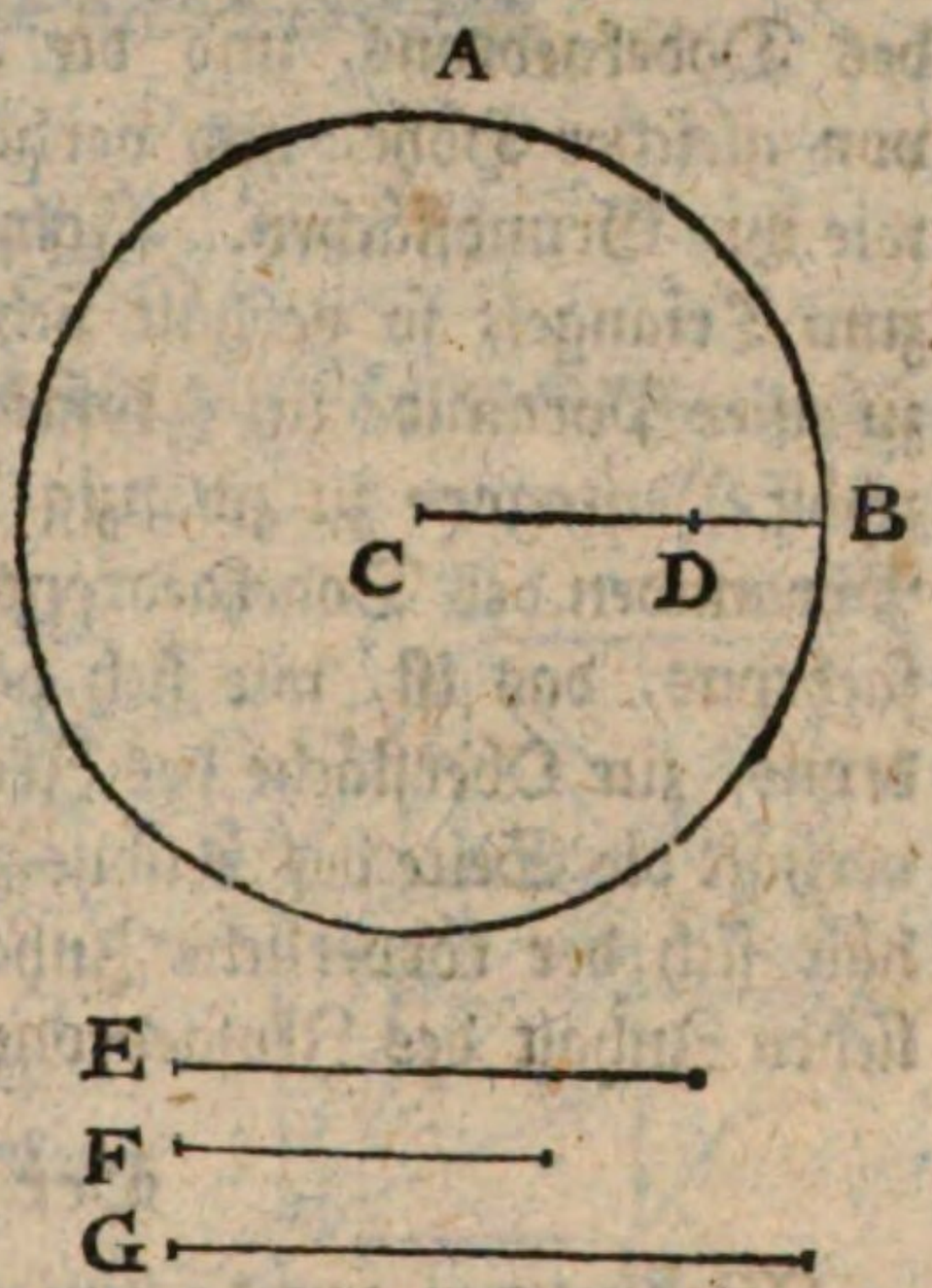
In den Cirkel DBC, trage die Seite des Pentagons, AC, und die Seite des Triangels, DC. Vom Mittelpunkte, E, fälle auf DC, CA, die Perpendikel, EF, EG. Verlängre EG nach B, und ziehe CB, die Seite des Dekagons. Wird nun, EB + BC, nach stetiger Proportion geschnitten, so ist (13, 9. S.) EB der grössere Abschnitt. Nun ist (14, 1. S.) 2 EG = EB + BC, und (13, 12. Zus.) 2 EF = EB. Folglich ist, wenn 2 EG nach stetiger Proportion geschnitten wird, der grössere Abschnitt 2 EF. Nun ist, wenn H nach stetiger Proportion geschnitten wird, (13, 17. Zus.) der grössere Abschnitt AC. Folglich ist (14, 7. S.) H : AC = EG : EF, und daher Rect. H, EF = Rect. ACEG. Nun ist (6, 1. S.) H : DC = Rect. H, EF : Rect. DCEF. Folglich ist H : DC = Rect. ACEG : Rect. DCEF, das ist, (14, 3. Zus.) die Seite des Kubus, H, verhält sich zur Seite des Ikosaedrons, DC, wie die Oberfläche des Dodekaedrons, zur Oberfläche des Ikosaedrons.



Der

Der 5. Satz.

Wird eine jede gerade Linie, BC, nach stetiger Proportion geschnitten: so verhält sich die Quadratseite der ganzen, BC, und des grössern Abschnitts, CD, zur Quadratseite der ganzen, BC, und des kleinern Abschnitts, DB, wie die Seite des Kubus, G, zur Seite des Ikosaedrons, E.



Es sey ein Cirkel, AB, welcher den Triangel des Ikosaedrons, und das Pentagon des Dodekaedrons, die beyde in einerley Kugel beschrieben sind, fasset. Vom Mittelpunkte, C, ziehe eine gerade Linie, CB, und schneide sie nach stetiger Proportion in D, so daß CD der grössere Abschnitt. Nun sey die Seite des Dodekaedrons, F, welche (13, 17. Zus.) der grössere Abschnitt der nach stetiger Proportion geschnittenen Seite des Kubus, G, seyn wird. Nun ist (13, 12. S.) $\square E = 3 \square CB$, und (13, 4. S.) $\square CB + \square BD = 3 \square CD$. Folglich ist $\square E : \square CB + \square BD = \square CB : \square CD =$ (14, 7. S.) $\square G : \square F$, folglich $\square G : \square E = \square F : \square CB + \square BD$. Nun ist F die Seite des Pentagons, und (13, 5. S. und 9. Zus.) CD die Seite des Dekagons, und daher (13, 10. S.) $\square F = \square CB + \square CD$. Folglich ist G zu E, wie die Quadratseite von $\square CB + \square CD$ zu der Quadratseite von $\square CB + \square BD$.

Der 6. Satz.

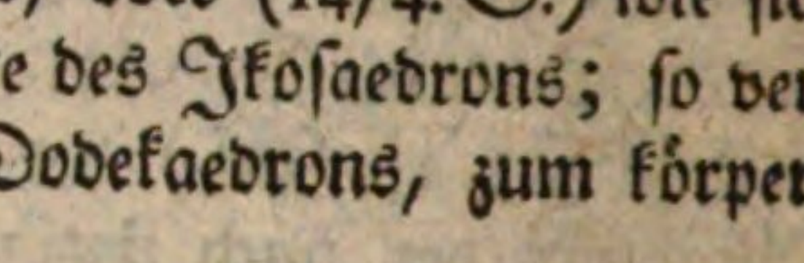
Wie die Seite des Kubus sich zur Seite des Ikosaedrons verhält: so verhält sich der körperliche Inhalt des Dodekaedrons zum körperlichen Inhalt des Ikosaedrons.

Da (14, 2. S.) gleiche Cirkel das Pentagon des Dodekaedrons, und den Triangel des Ikosaedrons, wenn beyde in einerley Kugel beschrieben sind, fassen; in einer Kugel aber gleiche Cirkel vom Mittelpunkt gleich weit abstehen, indem die Perpendikel vom

Mittelpunkt der Kugel auf die Cirkelebnen, sowohl einander gleich sind, als auch die Mittelpunkte dieser Ebnen treffen: so sind die geraden Linien vom Mittelpunkte der Kugel nach dem Mittelpunkte des Cirkels, welcher das Pentagon des Dodekaedrons, und den Triangel des Ikosaedrons, faßt, da sie senkrecht, auch einander gleich. Folglich die Pyramiden, welche zur Spitze den Mittelpunkt der Kugel, und zu Grundflächen die Pentagone des Dodekaedrons, und die Triangel des Ikosaedrons haben, von gleicher Höhe, und verhalten sich daher (12, 5. und 6. S.) wie ihre Grundflächen. Folglich, wie sich verhält das Pentagon zum Triangel, so verhält sich eine Pyramide im Dodekaedron, zu einer Pyramide im Ikosaedron. Folglich, wie sich verhalten zwölf Pentagone zu zwanzig Triangeln: so verhalten sich zwölf Pyramiden des Dodekaedrons, zu zwanzig Pyramiden des Ikosaedrons, das ist, wie sich verhält die Oberfläche des Dodekaedrons, zur Oberfläche des Ikosaedrons, oder (14, 4. S.) wie sich verhält die Seite des Kubus zur Seite des Ikosaedrons; so verhält sich der körperliche Inhalt des Dodekaedrons, zum körperlichen Inhalt des Ikosaedrons.

Der 7. Satz.

Wenn zwey gerade Linien, AB, DE, nach stetiger Proportion geschnitten werden: so verhält sich die eine, AB, zu ihrem grössern Abschnitt, AC, wie die andre, DE, zu ihrem grössern Abschnitt, DF.



Da (6, 17. S.) Rect. ABBC = □ AC, und Rect. DEEF = □ DF, so ist Rect. ABBC : □ AC = Rect. DEEF : □ DF, folglich (5, 15. S.) 4 Rect. ABBC : □ AC = 4 Rect. DEEF : □ DF, folglich verbunden 4 Rect. ABBC + □ AC : □ AC = 4 Rect. DEEF + □ DF : □ DF. Folglich ist (2, 8. S.) □ AB + BC : □ AC = □ DE + EF : □ DF, folglich (6, 22. S.) AB + BC : AC = DE + EF : DF, folglich verbunden AB + BC + AC : AC = DE + EF + DF : DF, das ist, 2 AB : AC = 2 DE : DF, folglich auch AB : AC = DE : DF.

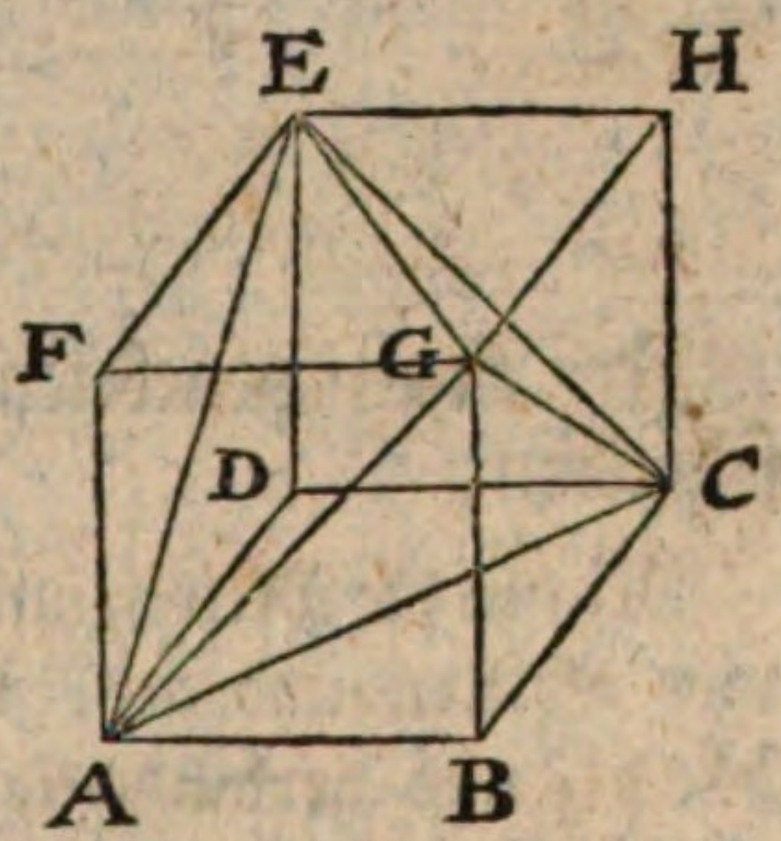
Euklids Elemente

Funfzehntes Buch.

Der 1. Satz.

In einen gegebnen Kubus, AH, ein Tetraedron zu beschreiben.

Ziehe in den sechs Quadraten die Diagonalen, AC, AE, AG, CE, EG, GC, so sind offenbar die Triangel, AEC, AGE, AGC, CGE, gleichseitig. Folglich ist (11, 26. Def.) ECGA ein Tetraedron, dessen vier Winkel die Winkel des Kubus treffen.

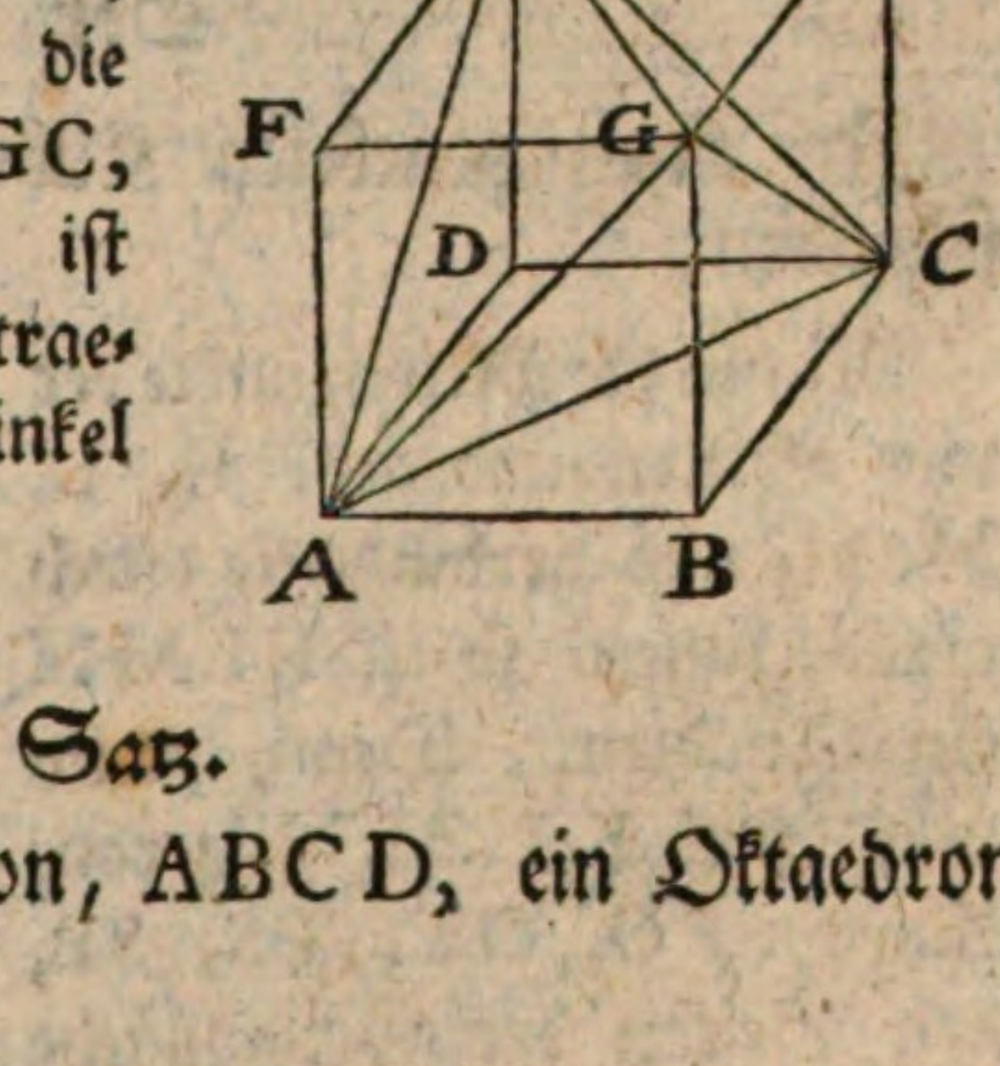


Der 2. Satz.

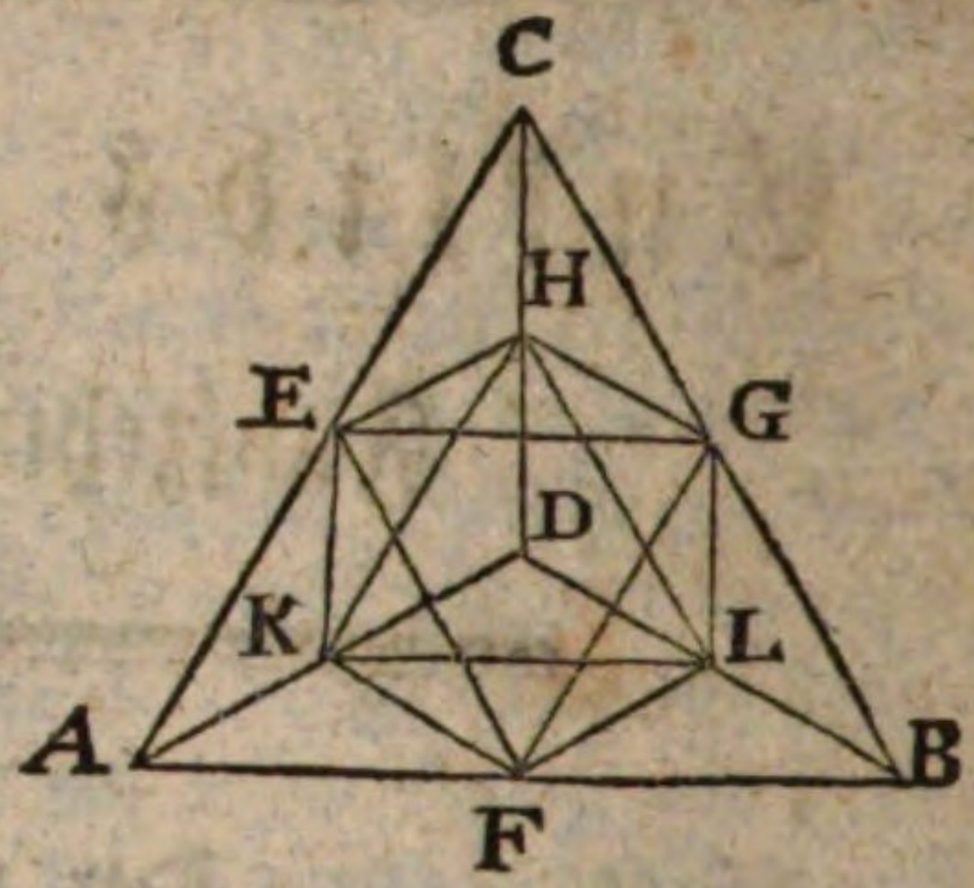
In ein gegebnes Tetraedron, ABCD, ein Oktaedron zu beschreiben.

Halbire die Seiten des Tetraedrons in den Punkten, E, F, G, H, K, L, und verbinde diese Punkte durch zwölf gerade Linien, HK, HL, EF, FG, u. s. w.

Da DA, DC, in K, H, halbirt, so ist (6, 4. S.) $KH = \frac{1}{2}AC$. Eben so ist $HL = \frac{1}{2}CB$, desgleichen KE sowohl als LG, $= \frac{1}{2}DC$; auch $HE = \frac{1}{2}AD$, $HG = \frac{1}{2}DB$, $EG = \frac{1}{2}AB$;



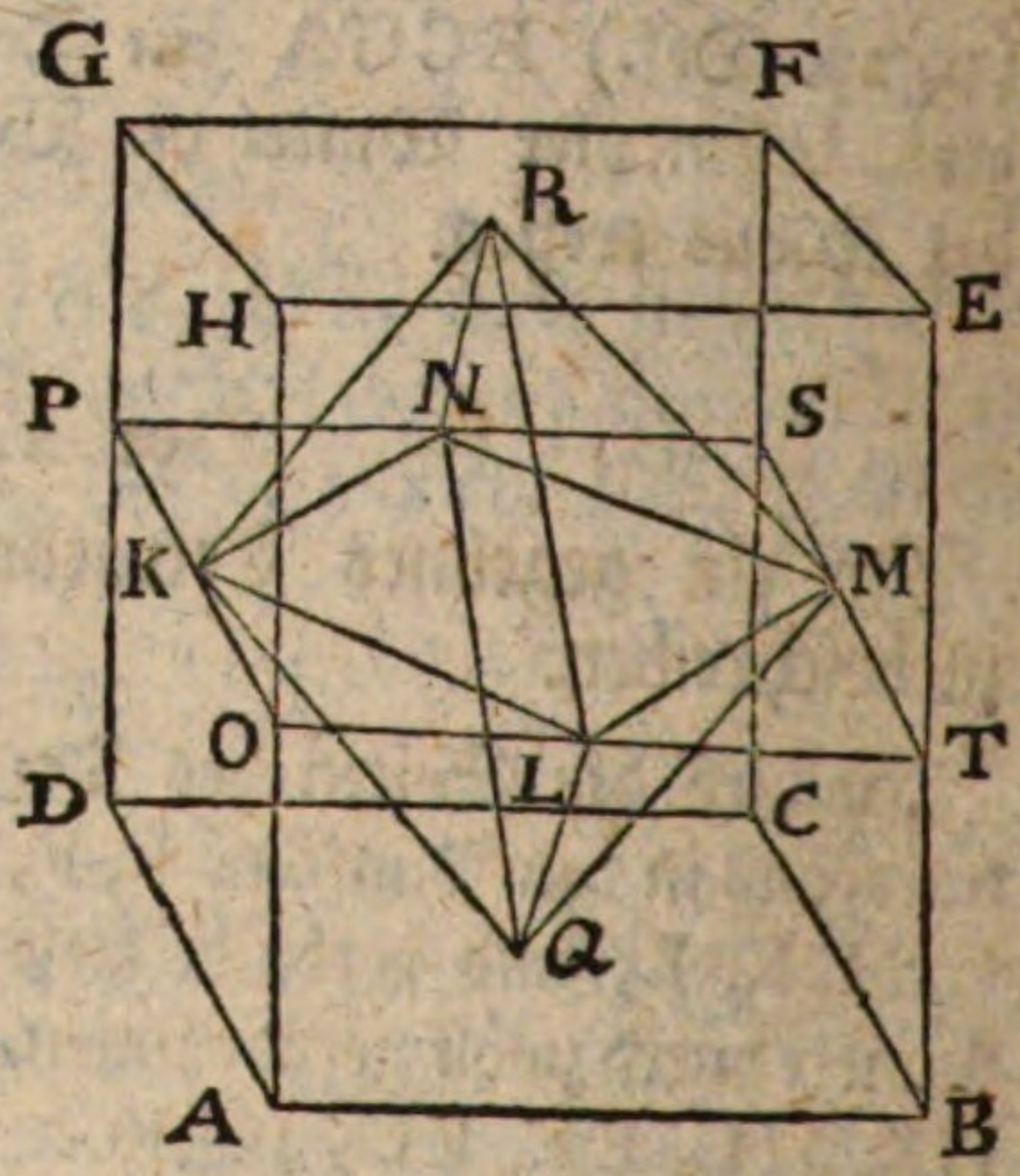
ferner $KL = \frac{1}{2} AB$, $LF = \frac{1}{2} AD$, $FK = \frac{1}{2} DB$. Nun sind (11, 26. Def.) alle Seiten des Tetraedrons einander gleich, und daher auch ihre Hälften. Folglich sind die acht Trianael, deren Grundlinien, FG, GH, HK, KF, und deren Spitzen E, L, gleichseitig. Folglich ist der Körper EL, (11, 27. Def.) ein Oktaedron, dessen Winkel die Mitte der Seitenlinien des Tetraedrons treffen.



Der 3. Satz.

In einen gegebnen Kubus, AF, ein Oktaedron zu beschreiben.

Nimm die Mittelpunkte der vier Seitenquadrate, K, L, M, N, und verbinde sie durch gerade Linien, so ist KLMN ein Quadrat. Denn, wenn man durch K, L, M, N, gerade Linien, PO, OT, TS, SP, den Seiten der Grundfläche parallel, ziehet, so sieht man leicht, daß solche zusammen treffen, und (11, 10. S.) rechte Winkel einschliessen, auch daß $KO = OL$. Folglich ist (1, 47. S.) $\square KL = 2 \square OL$. $\square LM = 2 \square LT$. Folglich ist $\square KL = \square LM$, und daher $KL = LM$. Eben so wird auch von den übrigen Seiten der Figur, KLMN, die Gleichheit bewiesen. Demnach ist KLMN gleichseitig, und (1, 13. und 32. S.) rechtwinklich, folglich ein Quadrat.



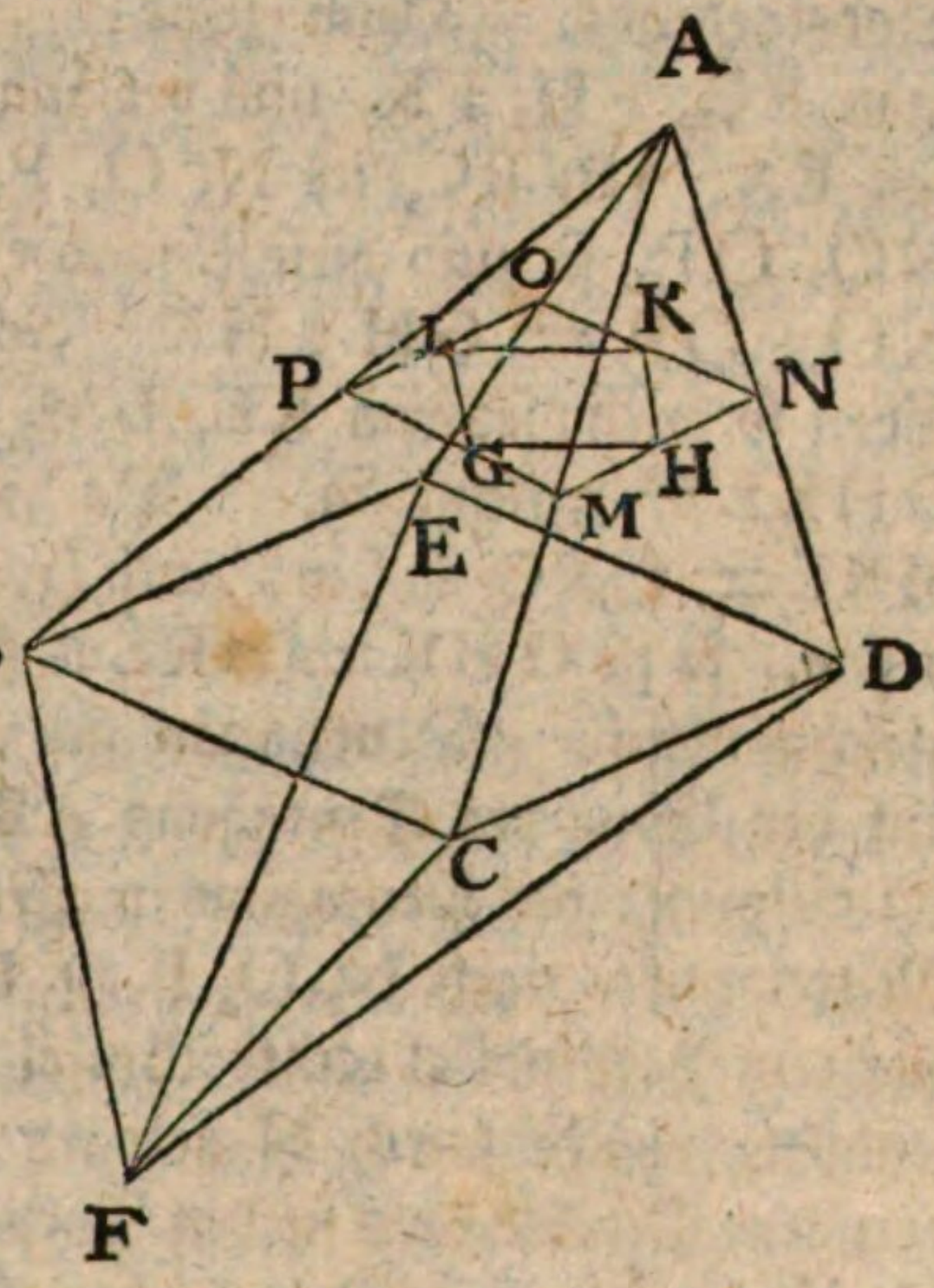
Nun ist aus gleichem Grunde

Nimm

Nimm die Mittelpunkte der beyden Grundflächen Q, R, und ziehe von beyden nach den Punkten K, L, M, N, gerade Linien: so wird, wie vorher bewiesen, daß die daher entstehenden acht Triangel, welche zur Spitze, Q, R, und zu Grundlinien KL, LM, MN, NK, haben, gleichseitig sind. Folglich ist (11, 27. Def.) der Körper RQ, ein Oktaedron, dessen sechs Winkel die Mitte der Flächen des Kubus treffen.

Der 4. Satz.

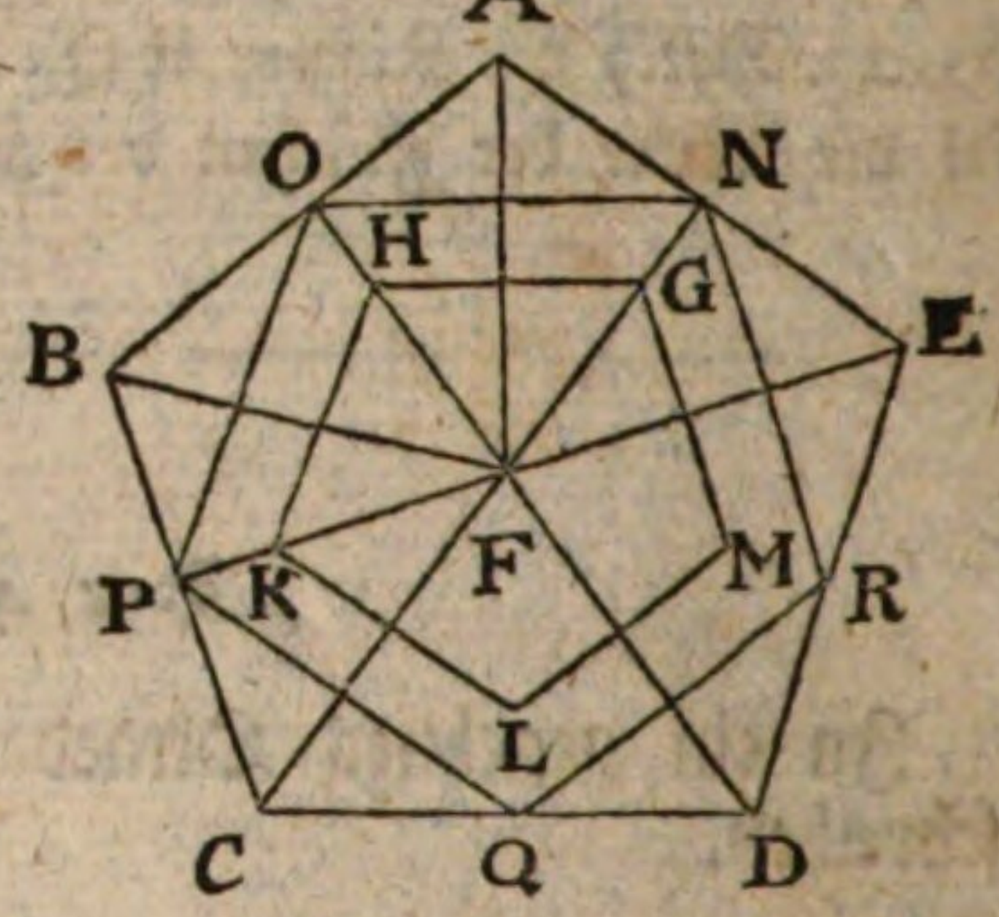
In ein gegebnes Oktaedron, AF, einen Kubus zu beschreiben.



Halbire die Seitenlinien der Pyramide, ABCDE, in M, N, O, P, und ziehe MN, NO, OP, PM, welche (1, 4. S.) einander gleich und (6, 2. S. und 13, 14. S.) den Seiten des Quadrats, BCDE, parallel sind, und daher (11, 10. S.) rechte Winkel einschliessen. Folglich ist MNOP ein Quadrat. Halbire die Seiten dieses Quadrats in G, H, K, L, und ziehe GH, HK, KL, LG, welche (1, 4. S.) einander gleich sind, und (1, 13. und 32. S.) rechte Winkel einschliessen. Folglich ist GHKL ein Quadrat. Macht man nun eben dieses in den fünf übrigen Pyramiden des Oktaedrons, so erhält man fünf andre Quadrate, welche dem Quadrat GHKL gleich sind, und mit ihm den Kubus einschliessen, dessen Winkel die Mitte der Seitenlinien des Oktaedrons treffen.

Der 5. Satz.

In ein gegebnes Ikosaedron ein Dodekaedron zu beschreiben.



Es sey die Pyramide des Ikosaedrons, ABCDEF, deren Spitze, F, und deren Basis das Pentagon, ABCDE, auch seyen G, H, K, L, M, die Mittelpunkte der Triangel, EFA, AFB, BFC, CFD, DFE, durch die geraden Linien, GH, HK, KL, LM, MG, verbunden: so ist GHKLM das Pentagon des verlangten Dodekaedrons. Denn zieht man FG, FH, FK, und verlängert sie nach N, O, P, so werden EA, AB, BC, in N, O, P, halbirt. Ziehet man nun NO, OP, so sind diese einander gleich. Nun ist (6, 4. S.) NO : OP = GH : HK. Folglich ist auch GH = HK. Eben so wird dies von KL, LM, MG, bewiesen. Folglich ist GHKLM gleichseitig. Da (11, 10. S.) GHK = NOP, HKL = OPQ u. s. w., auch (1, 4. u. 13. S.) NOP = OPQ u. s. w., so ist GHK = HKL u. s. w., folglich GHKLM auch gleichwinklich. Denkt man sich nun einen Perpendikel von F auf der Ebne des Pentagons ABCDE, so wird derselbe den Mittelpunkt des Pentagons treffen, und alle Linien von diesem Mittelpunkte nach N, O, P, Q, R, werden (11, 4. S.) mit gedachtem Perpendikel rechte Winkel machen. Ziehe durch G derjenigen, welche durch N gezogen ist, eine andre parallel, und von dem Punkte, wo sie den Perpendikel trift, gerade Linien nach H, K, L, M, so wird gedachter Perpendikel von der Parallele durch G in der Verhältniß FN : FG = FO : FH = FP : FK u. s. w. geschnitten. Folglich werden (6, 2. S.) alle die Linien, die von G, H, K, L, M, nach dem Perpendikel gezogen sind, den erstern von A, B, C, D, E, parallel seyn, und daher auch rechte Winkel mit dem Perpendikel machen, folglich (11, 5. S.) in Einer Ebne seyn. Demnach ist GHKLM ein gleichseitiges

und

und gleichwinkliches Pentagon. Construirt man nun ein gleiches in den übrigen eilf Pyramiden des Ikosaedrons, so formiren diese zwölf Pentagone ein Dodekaedron, dessen Winkel die Mitte der Flächen des Ikosaedrons treffen.

Der 6. Satz.

Die Seiten und Winkel der fünf Körper zu finden.

Erster Theil.

Die Zahl der Seiten findet man, wenn man die Zahl der Ebnen mit der Zahl der Seiten einer jeden Ebne multiplicirt, und das Product halbirt. Denn ein Ikosaedron wird durch zwanzig Triangel, und jeder dieser Triangel durch drey Linien begrenzt. Dies machte sechzig Seiten. Weil aber jede Seite zweymal genommen wird, so beträgt die Zahl nur die Hälfte, nämlich dreyßig. Eben so wird ein Dodekaedron von zwölf Pentagonen, und jedes dieser Pentagonen von fünf Linien begrenzt. Dies giebt sechzig Linien, aber weil jegliche zwey nur eine Seite des Körpers ausmachen, nur die Hälfte, nämlich dreyßig.

Zweyter Theil.

Die Zahl der körperlichen Winkel findet man, wenn man die Zahl der Ebnen mit der Zahl der Winkel in jeder Ebne multiplicirt, und das Product mit der Zahl der ebnen Winkel, welche einen körperlichen Winkel einschliessen, dividirt. So sind in einem Ikosaedron zwanzig Triangel, und in jedem Triangel drey Winkel. Dies giebt sechzig, aber, weil jeder körperliche Winkel des Ikosaedrons von fünf solchen ebnen Winkeln eingeschlossen ist, nur den fünften Theil, nämlich zwölf.

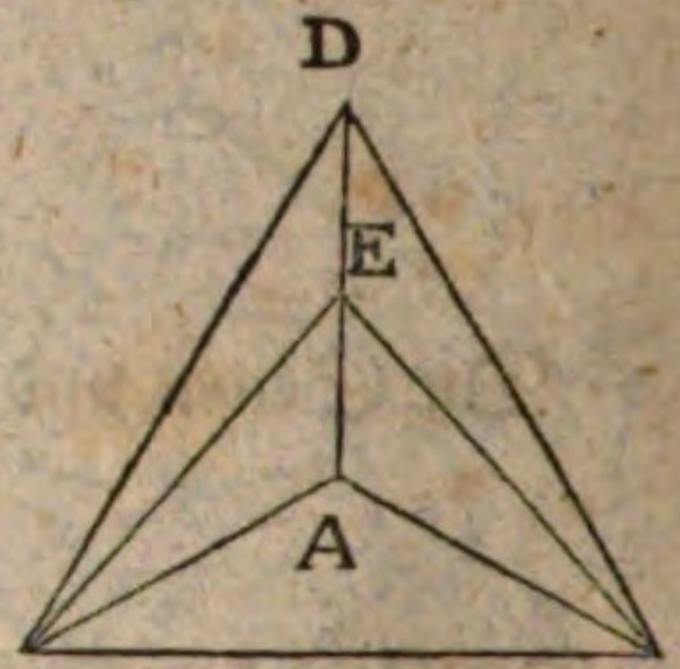
Der 7. Satz.

Die Neigungswinkel der Ebnen in den fünf Körpern zu finden.

1.) Vom

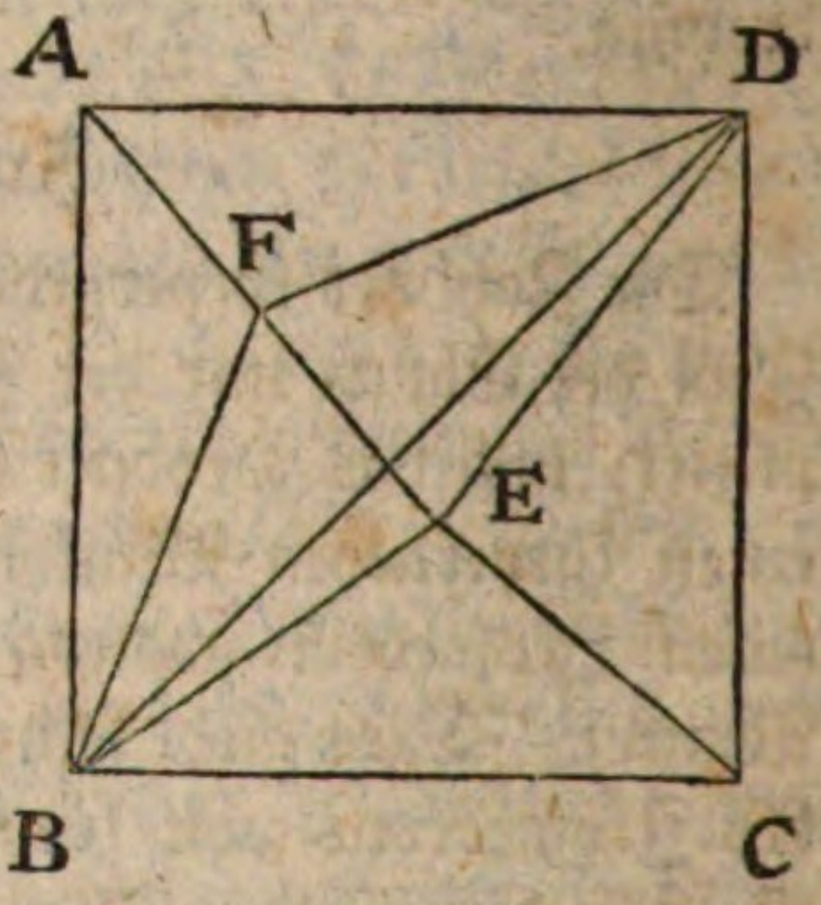
1.) Vom Kubus ist es an sich klar, daß seine Ebnen senkrecht auf einander sind.

2.) Es sey ABCD ein Tetraedron, dessen Basis ABC und dessen Spitze, D. Halbire AD in E, und ziehe EB, EC, so sind, weil die Triangel gleichseitig, (1, 8. S.) BE, CE, senkrecht auf AD, (auch BE = EC). Da □BC = □AB = (1, 47. S.) □AE + □EB; aber (13, 12. Zus.) < □CE, so ist □BC < □CE + □EB, und daher (2, 13. S.) CEB ein spitzer Winkel.



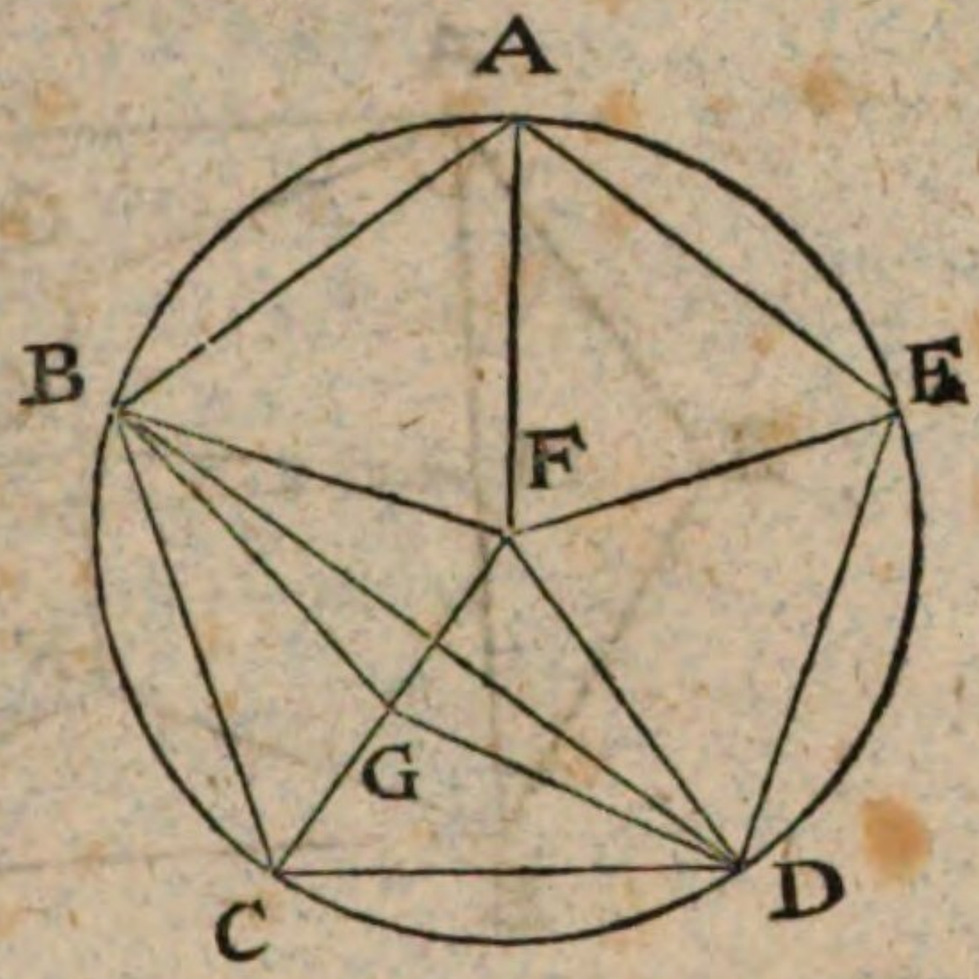
Demnach ist (11, 6. Def.) CEB der Neigungswinkel der Ebnen des Tetraedrons. Beschreibe aus B und C, mit BE = CE, zwey Cirkel, die einander in E schneiden müssen. Von E ziehe nach B und C gerade Linien, so hast du den Neigungswinkel, BEC.

3.) Es sey ABCD das Quadrat der Seite des Oktaedrons, und E die Spitze der einen Pyramide des Oktaedrons, so daß also die Triangel EBA, EAD, u. s. w. gleichseitig sind. Halbire AE in F, und ziehe FB, FD, welche einander gleich und auf AE senkrecht sind. Ziehe BD, so ist □BF + □FD = 2□BF < 2□AB, das ist, < □BD, folglich (2, 12. S.) DFB ein stumpfer Winkel. Demnach ist (11, 6. Def.) DFB die Ergänzung des Neigungswinkels der Ebnen eines Oktaedrons zu zweyen rechten. Beschreibe aus B und D, mit BF = FD, zwey Cirkel, die einander in F schneiden müssen. Von F ziehe nach B und D gerade Linien, so hast du den Winkel BFD, dessen Nebenwinkel der verlangte Neigungswinkel ist.



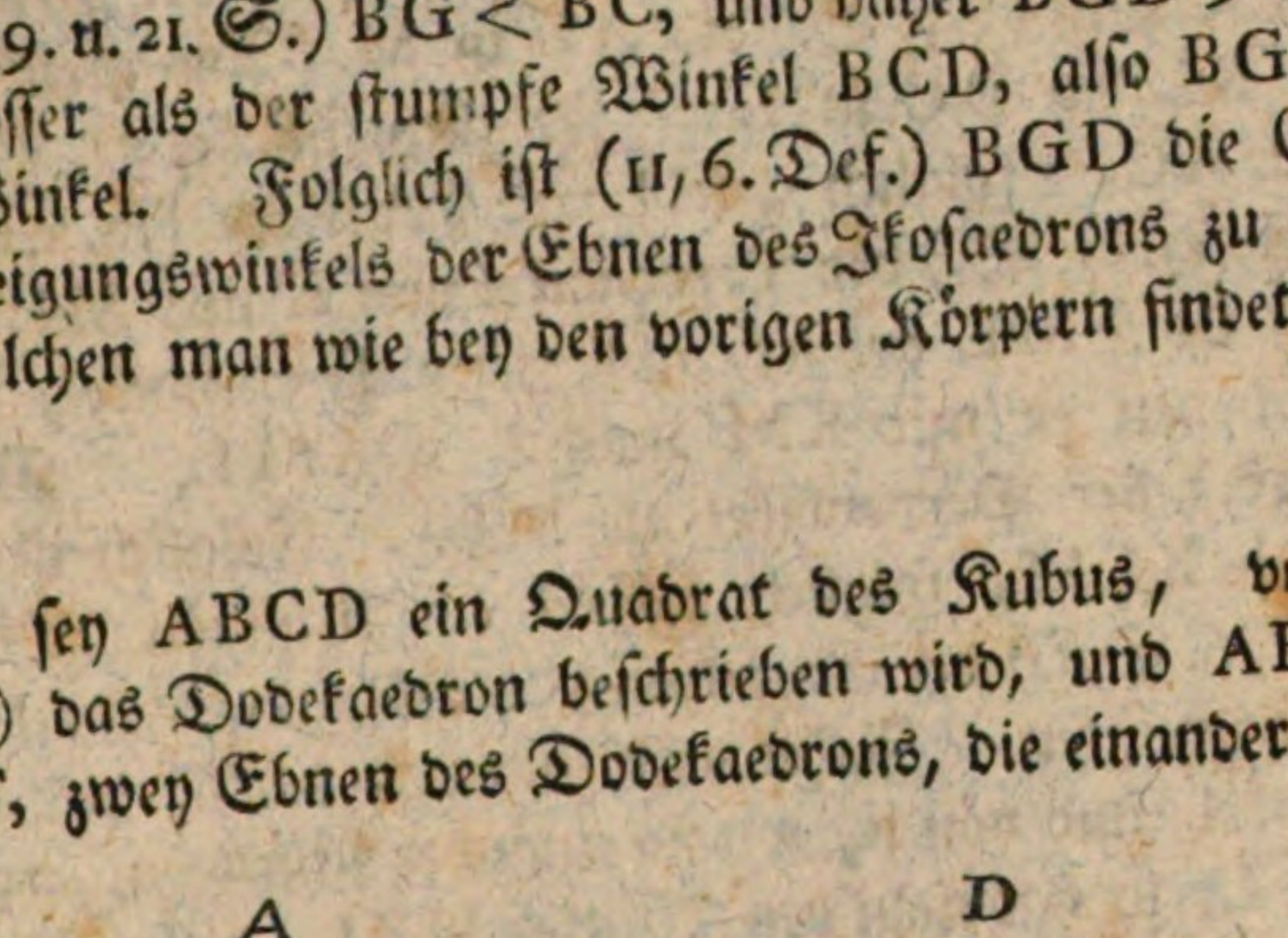
4.) Es

4.) Es sey von der Seite des Ikosaedrons, AB, das gleichseitige und gleichwinkliche Pentagon, ABCDE, beschrieben, und BD die Gegenseite des Pentagonwinkels, C, auch sey F die Spitze einer Pyramide des Ikosaedrons, so daß also die Triangel, FBC, FCD, u. s. w. gleichseitig sind.

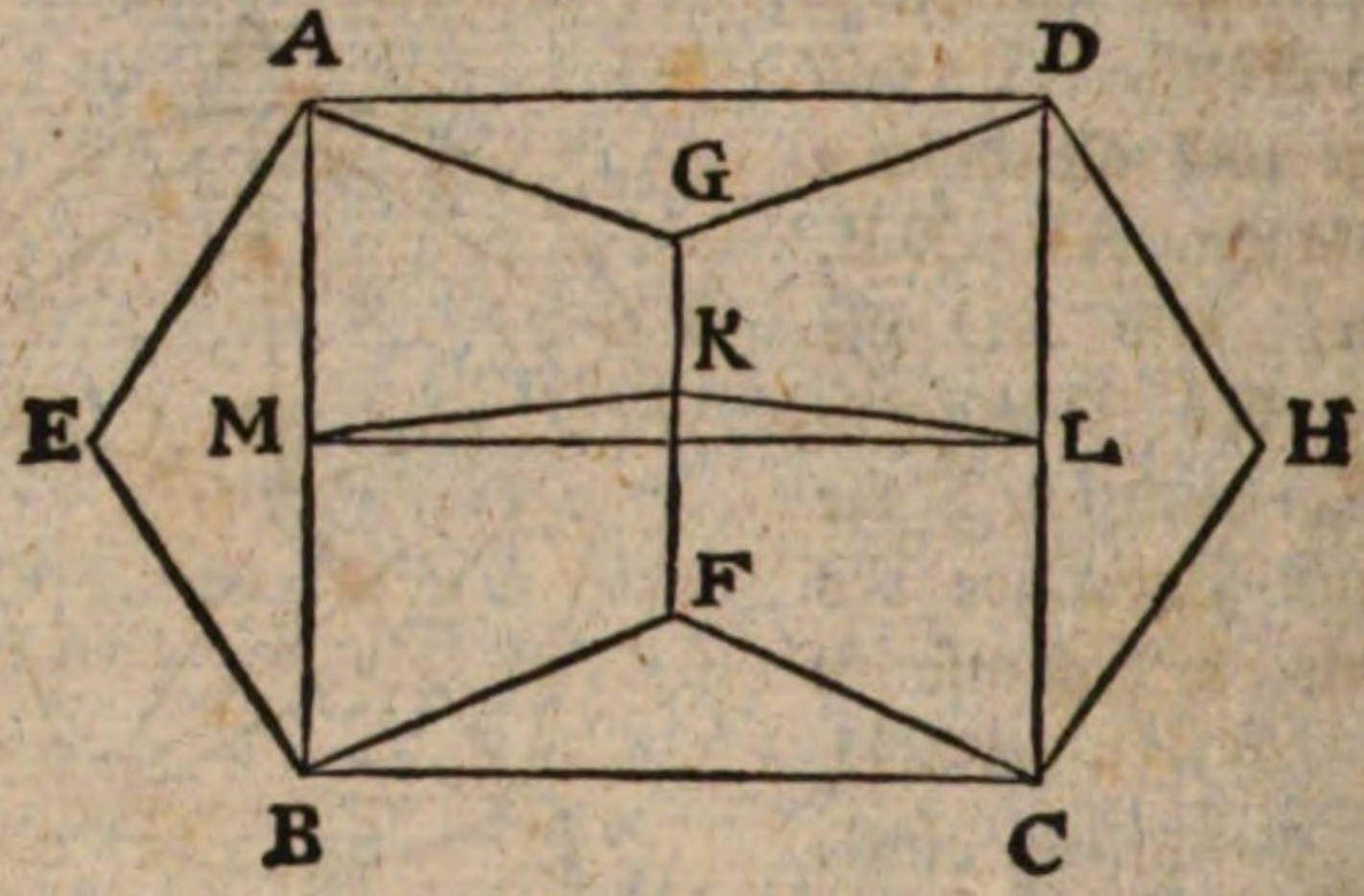


Halbire CF in G, und ziehe GB, GD, welche einander gleich und auf CF senkrecht sind. Nun ist (1, 19. u. 21. S.) BG < BC, und daher BGD > BCD, das ist, grösser als der stumpfe Winkel BCD, also BGD ein stumpfer Winkel. Folglich ist (11, 6. Def.) BGD die Ergänzung des Neigungswinkels der Ebnen des Ikosaedrons zu zweyen rechten, welchen man wie bey den vorigen Körpern findet.

5.) Es sey ABCD ein Quadrat des Kubus, von dem (13, 17. S.) das Dodekaedron beschrieben wird, und AEBFG, GDHCF, zwey Ebnen des Dodekaedrons, die einander in GF



schneiden, und so gestellt sind, daß AB, DC, die Gegenseiten der Polygonwinkel E, H, sind. Halbire GF in K, und errichte in beyden Ebnen auf GF die Perpendikel KM, KL. Ziehe ML. Da



Da GF, AB, parallel, so ist KM auch auf AB senkrecht, gehet daher (3, 1. S.) durch den Mittelpunkt des Pentagons, und halbiret folglich (3, 3. S.) die AB in M. Aus gleichem Grunde halbirt KL die DC in L. Folglich ist (1, 33. S.) ML = AK = AC, folglich $\frac{1}{2}$ML = $\frac{1}{2}$AB > (13, 8. S.) $\frac{1}{2}$AG. Nun ist (13, 17. S.) der Perpendikel von K auf ML = $\frac{1}{2}$AG. Folglich ist $\frac{1}{2}$ML grösser, als dieser Perpendikel, folglich der Winkel, den er mit KM macht, > KML. Nun halbirt (13, 17. S.) der Perpendikel die ML. Folglich ist LKM > KML + KLM, folglich LKM ein stumpfer Winkel, und daher (11, 6. Def.) die Ergänzung des Neigungswinkel der Ebnen zu zweyen rechten. Ziehet man nun von M, L, mit MK, LK, zwey Cirkel, und von K, wo sie einander schneiden, gerade Linien nach M, L, so hat man den Winkel MKL, dessen Nebenwinkel der verlangte Neigungswinkel der Ebnen des Dodekaedrons ist.

E N D E.

Verbesserungen.

S. 48. in der zweyten Figur setze oben B.
S. 152. Satz 7. letzte Zeile, statt A, D, E. setze B, D, E.
S. 157. Zeile 9, statt FE setze F.E.
10, nach **Primzahl** setze ein Comma.
S. 170. Zusatz. Zeile 2, nach **deren** setze **gröstes.**
S. 178. Zeile 6, statt **derselben** setze **denselben.**
S. 207. Zeile 2, statt □FH setze □FG.
13 von unten, statt **und** setze **nur.**
S. 211. Zeile 14, statt **wäre** setze **waren.**
S. 219. Zeile 3, statt das **Quadrate** setze das **Quadrat.**
S. 221. Zeile 3, statt LI setze LF.
S. 224. Zeile 13, statt □□CF setze □CF.
S. 230. Zeile 7 von unten, statt **war** setze **wär.**
2 von unten, statt **oder** setze **nur.**
S. 233. Zeile 9 von unten, statt **angesetzt** setze **angepaßt.**
S. 234. Zeile 7 von unten, statt BC setze GC.
S. 242. Zeile 6 von unten, nach LP ⌣ PN streiche ⌣ = aus.
S. 244. Zeile 10 von unten, statt **commensurabel** setze **incommensurabel.**
S. 254. Zeile 12 von unten, statt IK setze IH.
S. 255. Zeile 9 von unten, nach **medial und** streiche in **Länge** aus.
S. 293. in der Figur ziehe die geraden Linien BH, EL, DM.
S. 304. Zeile 6 von unten, nach **vorherbewiesenen** setze ein **Comma.**
S. 313. Zeile 8 von unten, statt **der** setze **den.**
S. 320. Zeile 3, statt **in der** setze **in die.**
S. 346. Zeile 2 von unten, statt = setze >

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Euclides, / Lorenz, Johann Friedrich, / Meil, Johann Wilhelm,

Euklid's Elemente funfzehn Bücher

Halle 1781
A.gr.b. 1438
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10235925-9
VD18 10243801